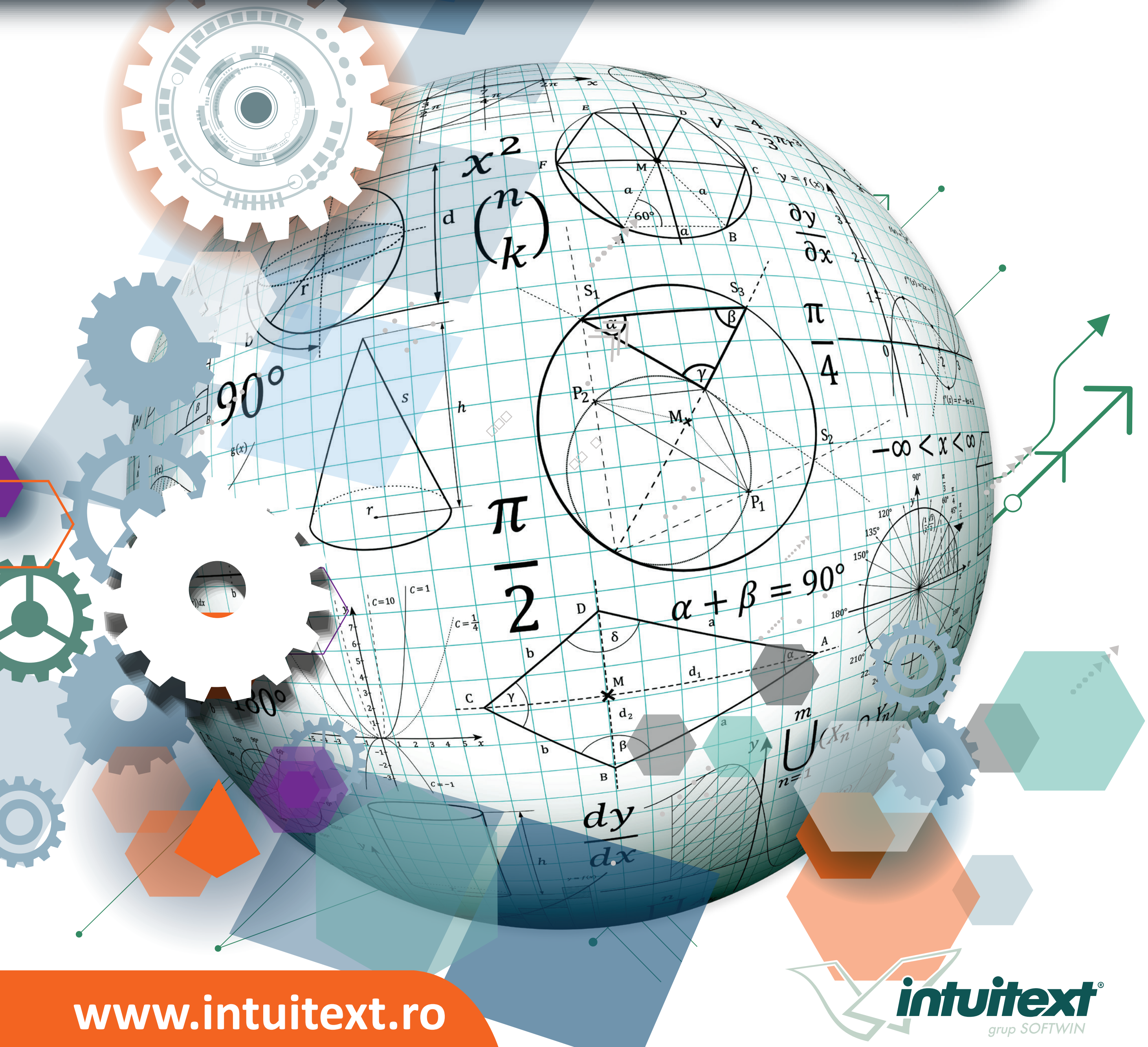
Ministerul Educaţiei şi Cercetării

MATEMATICĂ

Ion CICU • Eliza-Mihaela DAVID • Ioana IACOB • Răzvan CEUCĂ

Clasa a VIII-a



www.intuitext.ro

intuitext®
grup SOFTWIN

Acest manual școlar este proprietatea Ministerului Educației și Cercetării.

Manualul școlar a fost aprobat prin Ordinul ministrului educației și cercetării nr. 5523 din 07.09.2020. Acest manual este realizat în conformitate cu programa școlară aprobată prin Ordinul ministrului educației naționale nr. 3393 din 28.02.2017.

116 111
TELEFONUL COPILULUI
numărul de telefon
de asistență pentru copii

Ministerul Educaţiei şi Cercetării

MATEMATICĂ

Ion CICU • Eliza-Mihaela DAVID • Ioana IACOB • Răzvan CEUCĂ

Clasa a VIII-a

www.intuitext.ro

intuitext®
grup SOFTWIN

Disciplina: **Matematică**
Clasa: **a VIII-a**

Tipul programei școlare: **Programa școlară** pentru disciplina **Matematică**, Clasele a V-a – a VIII-a
Acest manual școlar este realizat în conformitate cu **Programa școlară** aprobată prin **OM nr. 3393/28.02.2017**

Număr de pagini: 224

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE						
Anul	Numele elevului	Clasa	Școala	An școlar	Starea manualului*	
					la primire	la returnare
1						
2						
3						
4						

*Starea manualului se înscrie folosind termenii: *nou, bun, îngrijit, nesatisfăcător, deteriorat.*

Cadrele didactice vor controla dacă numele elevului este scris corect. Elevii nu trebuie să facă niciun fel de însemnări pe manual.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României

Editura INTUITEXT
București, b-dul Dimitrie
Pompeiu nr. 10A,
Clădirea Conect 1, etaj 1,
zona A, biroul nr. 2, sector 2

Departamentul vânzări:
Telefon: 0372.156.300
Fax: 021.233.07.63
vanzari@intuitext.ro
www.intuitext.ro

Referenți:
Prof. univ. dr. **Radu Gologan** – Universitatea Politehnica București
Prof. **Monica Sas** – Colegiul Național "Liviu Rebreanu", Bistrița

Manualul este împărțit în nouă unități de învățare care acoperă integral cele patru domenii de conținut prevăzute de programa școlară: **Mulțimi. Numere, Algebră, Funcții. Organizarea datelor și probabilități** și **Geometrie.** Pe lângă unitățile de învățare, manualul include două unități destinate recapitulării și evaluării inițiale și recapitulării și evaluării finale.

Fiecare unitate de învățare cuprinde lecții de predare, o secțiune de recapitulare, un test de evaluare și o secțiune de ameliorare și dezvoltare care contribuie, treptat, la formarea și dezvoltarea competențelor matematice.

Amintește-ți!

Îți vei aminti ceea ce ai învățat.

Observă și descoperă!

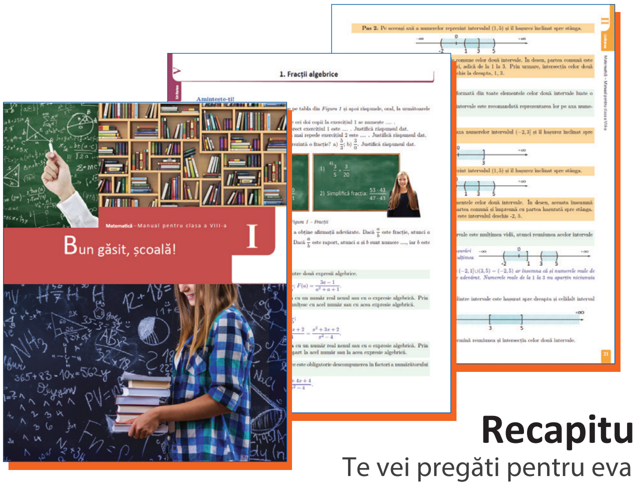
Vei descoperi sau vei observa aplicații a ceea ce înveți în lecție.

Important

Aici îți sunt prezentate informațiile principale și sunt oferite exemple.

Exersează!

Vei realiza activitățile propuse cu ajutorul modelelor și al problemelor rezolvate.



Recapitulare

Te vei pregăti pentru evaluare, rezolvând exercițiile din *Recapitulare*.

Exersezi și progresezi

Vei realiza activitățile propuse pentru a-ți îmbunătăți pregătirea.

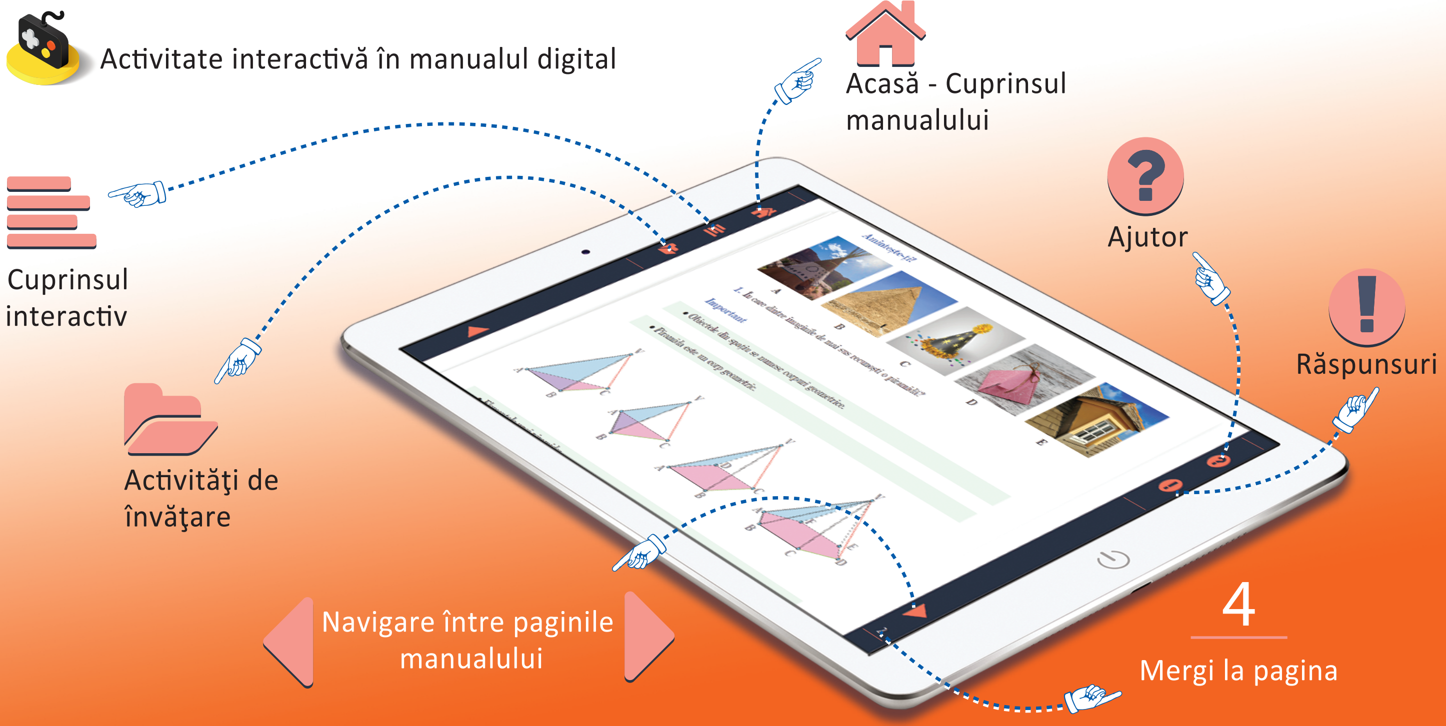
Evaluare

Proba de evaluare îți va arăta cât de pregătit/pregătită ești la acea unitate.

📷 Imagine în manualul digital

▶ Film sau animație în manualul digital

🎮 Activitate interactivă în manualul digital



Cuprins

Competențe generale:

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar;
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale;
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice;
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situaţie dată;
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situaţii date;
6. Modelarea matematică a unei situaţii date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii.

Competențe specifice:

1.1. Recunoaşterea apartenenţei unui număr real la o mulțime;
1.2. Identificarea componentelor unei expresii algebrice;
1.3. Identificarea unor dependenţe funcţionale în diferite situaţii date;
1.4. Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configuraţii spaţiale date;
1.5. Identificarea corpurilor geometrice și a elementelor metrice necesare pentru calcularea ariei sau a volumului acestora;
2.1. Efectuarea unor operaţii cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulţimi definite printr-o proprietate a elementelor ei;
2.2. Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere;
2.3. Descrierea unei dependenţe funcţionale într-o situaţie dată, folosind diagrame, tabele sau formule;
2.4. Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configuraţii spaţiale date;
2.5. Prelucrarea unor date caracteristice ale corpurilor geometrice studiate în vederea calculării unor elemente ale acestora;
3.1. Utilizarea unor procedee matematice pentru operații cu intervale și rezolvarea inecuațiilor în R;
3.2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat şi a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuaţiilor şi a inecuaţiilor;
3.3. Reprezentarea în diverse moduri a unor funcții cu scopul caracterizării acestora;
3.4. Folosirea unor proprietăţi de paralelism sau perpendicularitate pentru analizarea poziţiilor relative ale dreptelor și planelor;
3.5. Alegerea metodei adecvate pentru calcularea unor caracteristici numerice ale corpurilor geometrice.
4.1. Folosirea terminologiei aferente noţiunilor de mulţime, de interval numeric şi de inecuații;
4.2. Exprimarea matematică a unor situaţii concrete prin calcul algebric;
4.3. Utilizarea unui limbaj specific pentru formularea unor opinii referitoare la diferite dependenţe funcţionale;
4.4. Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configurații geometrice;
4.5. Utilizarea unor termeni și expresii specifice pentru descrierea proprietăţilor figurilor și corpurilor geometrice;
5.1. Interpretarea unei situaţii date utilizând intervale şi inecuaţii;
5.2. Interpretarea unei situaţii date utilizând calcul algebric;
5.3. Analizarea unor funcţii în context intra şi interdisciplinar;
5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configuraţii spaţiale şi a calculării unor elemente metrice;
5.5. Analizarea condiţiilor necesare pentru ca o configuraţie geometrică spațială să verifice anumite cerinţe date:
6.1. Rezolvarea unor situaţii date, utilizând intervale numerice sau inecuaţii;
6.2. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuaţiilor sau a formulelor de calcul prescurtat;
6.3. Modelarea cu ajutorul funcţiilor a unor fenomene din viața reală;
6.4. Modelarea unor situaţii practice în limbaj geometric, utilizând configurații spațiale;
6.5. Interpretarea informațiilor referitoare la distanțe, arii și volume după modelarea printr-o configurație spațială a unei situații date din cotidian.

I

Bun găsit, școală!

1. Recapitulare

1. Transformă următoarele fracții zecimale în fracții ordinare ireductibile:

a) 0,237;
b) 1,54;
c) 2,004;
d) 0,(234);
e) 1,(54);
f) 2,(004);
g) 0,23(4);
h) 1,5(4);
i) 2,0(04).

2. Calculează:

a) $0{,}2^3 - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{10}$;

b) $0{,}(3) : \left[\frac{1}{6} - 3 \cdot \left(2 + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}\right]$.

3. În *Figura 1* este reprezentată distribuția notelor la Evaluarea Națională pentru clasele a VIII-a A și a VIII-a B. Determină numărul elevilor care au obținut note mai mari sau egale cu 6.

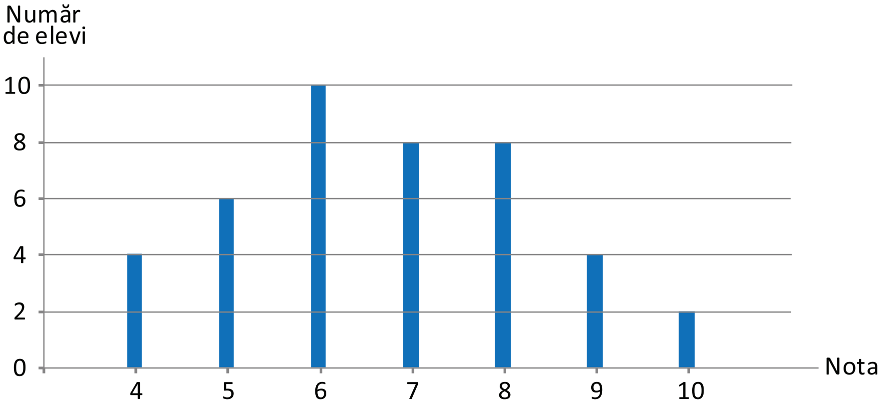


Figura 1 - Activitățile zilnice ale unui elev și timpul alocat lor

4. În tabelul de mai jos sunt rezultatele unui test de matematică la o clasă a VIII-a.

Nota	3	4	5	6	7	8	9	10
Număr de elevi	2	3	4	5	7	4	3	2

Determină media clasei la acest test.

5. În *Figura 2* este reprezentată distribuția, în procente, a timpului alocat activităților desfășurate de un elev pe parcursul unei zile.

Care este timpul, în procente, pe care un elev îl alocă distracției?

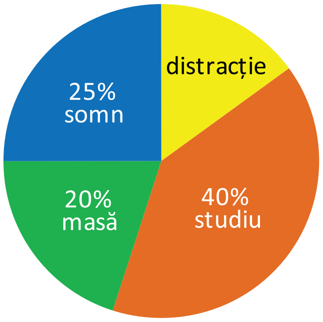


Figura 2

6. Se consideră numerele:

$$x=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011} \text{ şi } y=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}.$$

Calculează media aritmetică a numerelor x şi y.

7. Rezolvă, în mulţimea numerelor raţionale, ecuaţiile:

a) $x+17=12$;

b) $3x-5=22$;

c) $5x+4=7x+1$;

d) $2(x-3)+1=5-4(x-2)$;

e) $\frac{x}{3}-\frac{x-3}{4}=\frac{x+1}{6}$;

f) $\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{5}{4}x-\frac{5}{6}\right)=3x-\frac{1}{6}$;

g) $0,(3)x+1,5=1$;

h) $3+|2x-1|=5$.

8. a) Scoate factorii de sub radical $\sqrt{648}$.

b) Introdu factorii sub radical $11\sqrt{3}$.

9. Compară numerele reale: a) $2\sqrt{5}$ și $3\sqrt{2}$; b) $4\sqrt{3}$ şi 7; c) $5\sqrt{6}$ şi $6\sqrt{5}$.

10. Stabilește care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate și care sunt false:

a) $\left|3-2\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}-3$; b) $\left|3\sqrt{3}-2\sqrt{6}\right|=3\sqrt{3}+2\sqrt{6}$; c) $\left|-4-2\sqrt{2}\right|=4+2\sqrt{2}$.

11. Raționalizează numitorul: a) $\frac{5}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; c) $\frac{6}{5\sqrt{2}}$; d) $\frac{5}{4\sqrt{3}}$.

12. Transcrie în caiet tabelul de mai jos, apoi asociază fiecărui exercițiu din coloana **A** răspunsul corect din coloana **B**.

A	**B**
$2\sqrt{2}+5\sqrt{2}-14\sqrt{2}$	$7\sqrt{2}$
$\sqrt{27}-\sqrt{75}+\sqrt{12}$	$6\sqrt{15}-15$
$3\sqrt{5}\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$	$-7\sqrt{2}$
	0

13. Arată că numărul $\sqrt{\left(3-\sqrt{10}\right)^2}+\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$ este întreg.

14. Într-un sistem de axe ortogonale se consideră punctele $A(1,3)$, $B(5,0)$ și $C(-3,0)$.

a) Reprezintă cele trei puncte în sistemul de axe ortogonale.

b) Determină lungimile segmentelor: BC, AB și AC;

c) Determină perimetrul triunghiului ABC.

d) Determină aria triunghiului ABC.

15. Într-un sistem de axe ortogonale xOy se consideră punctul $M(-3,2)$.

a) Reprezintă simetricul punctului M față de originea O a sistemului de axe ortogonale și precizează-i coordonatele.

b) Reprezintă simetricul punctului M față de axa Ox a sistemului de axe ortogonale și precizează-i coordonatele.

c) Reprezintă simetricul punctului M față de axa Oy a sistemului de axe ortogonale și precizează-i coordonatele.

16. Determină aria:

a) unui pătrat cu lungimea laturii egală cu 3 cm;

b) unui dreptunghi cu lungimile laturilor de 3 cm, respectiv 5 cm;

c) unui romb cu diagonalele de 2 cm, respectiv 6 cm;

d) unui triunghi dreptunghic cu catetele de 4 cm, respectiv 5 cm;

e) unui triunghi echilateral cu latura de 8 cm;

f) unui triunghi isoscel cu două dintre laturi de 5 cm și cea de-a treia de 6 cm.

17. În *Figura 3* ABC este un triunghi isoscel, $AB = AC$ şi AD înălţime în triunghi, cu $D \in BC$.

Se știe că $AB = 13$ cm şi $AD = 5$ cm.

a) Determină perimetrul triunghiului ABC.

b) Determină aria triunghiului ABC.

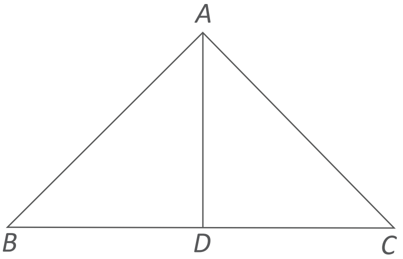


Figura 3 - Triunghi isoscel

18. În paralelogramul $ABCD$, $AB = 8$ cm, $AC = 17$ cm şi $AD = 15$ cm. Arată că $ABCD$ este dreptunghi.

19. Se consideră triunghiul ABC, din *Figura 4*, P un punct oarecare pe latura BC, iar punctele M şi N simetricele punctului P faţă de mijloacele laturilor AC şi, respectiv, AB.

a) Arată că patrulaterul $AMCP$ este paralelogram.

b) Arată că patrulaterul $ANBP$ este paralelogram.

c) Demonstrează că punctele M, A și N sunt coliniare.

d) Arată că lungimea segmentului MN nu depinde de poziţia punctului P pe latura BC.

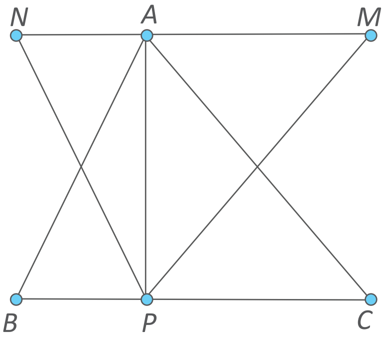


Figura 4

20. Pe diagonala AC a paralelogramului $ABCD$ se iau punctele distincte M şi N astfel încât $AM = MN = NC$. Demonstrează că $BMDN$ este paralelogram.

21. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu bazele $AB = 4$ cm, $CD = 8$ cm și laturile neparalele $AD = BC = 4$ cm.

a) Determină măsura unghiului C.

b) Calculează diagonala trapezului.

c) Determină lungimea segmentului AO, unde O este punctul de intersecție a diagonalelor trapezului.

22. Se consideră $ABCD$ un patrulater convex, ca în *Figura 5*, şi punctele M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, respectiv DA.

Demonstrează că $MNPQ$ este un paralelogram.

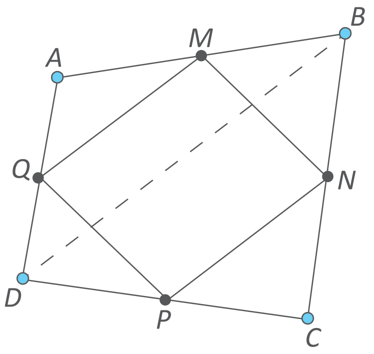


Figura 5

23. În triunghiul ABC medianele AM şi BN se intersectează în G. Se consideră P un punct pe segmentul AM astfel încât $GM = MP$.

a) Arată că $BPCG$ este paralelogram.

b) Demonstrează că punctul G este mijlocul segmentului AP.

24. Se consideră $ABCD$ un paralelogram, ca în *Figura 6*. Bisectoarele unghiurilor A şi B se intersectează în E care este situat pe latura CD.

a) Arată că punctul E este mijlocul laturii CD.

b) Ştiind că $AD = 5$ cm, calculează perimetrul paralelogramului $ABCD$.

c) Ştiind că aria paralelogramului $ABCD$ este egală cu 12 cm^2 şi O este mijlocul segmentului AC, determină aria patrulaterului $AOED$.

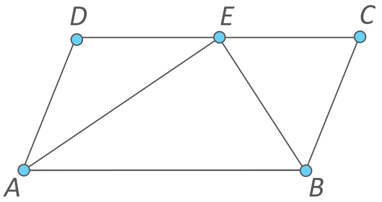


Figura 6

25. Se consideră cercul $\mathcal{C}(O,4)$ din *Figura 7*, cu AB diametru, iar C un punct pe cerc (diferit de A şi B). Tangentele la cerc în A şi B se intersectează cu tangenta în C la cerc în punctele D, respectiv E.

a) Demonstrează că $DE = AD + BE$;

b) Demonstrează că $\sphericalangle DOE = 90°$;

c) Arată că $AD \cdot BE = 16$.

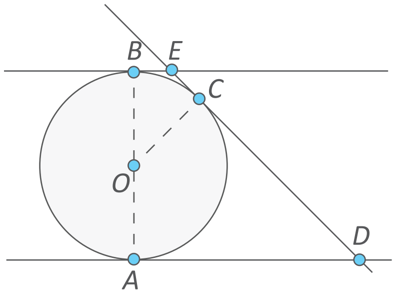


Figura 7

26. Din punctul A exterior unui cerc construim tangenta la cerc AT şi secanta BC (B şi C sunt puncte pe cerc).

a) Demonstrează că $\sphericalangle ATB = \sphericalangle ACT$.

b) Demonstrează că $AB \cdot AC = AT^2$.

27. Se consideră $ABCD$ un romb cu $\sphericalangle A = 60°$ şi un punct E în exteriorul rombului astfel încât, triunghiul ADE este triunghi echilateral.

a) Demonstrează că punctele E, D, C sunt coliniare.

b) Demonstrează că $ABCE$ este trapez isoscel.

c) Demonstrează că $ABDE$ este romb.

d) Dacă $AC = 6\sqrt{3}$ cm şi $BD = 6$ cm, calculează aria rombului $ABDE$.

28. Un dreptunghi are perimetrul egal cu 28 cm şi lungimea diagonalei de 10 cm. Determină aria dreptunghiului.

29. Se consideră $ABCD$ un trapez isoscel cu baza mare $AB = 16$ cm, $AD = BC = 10$ cm şi $\sphericalangle ADC = 120°$.

a) Determină perimetrul trapezului.

b) Determină aria trapezului.

2. Evaluare inițială

Timp de lucru: 45 de minute
Din oficiu 10p

Partea I. Încercuiește răspunsul pe care îl consideri corect. Numai unul dintre răspunsuri este corect.

1. Numărul 1,2(3) se scrie ca fracție ordinară astfel: *5p*

A. $1\frac{23}{100}$; B. $1\frac{23}{90}$; C. $\frac{37}{30}$; D. $\frac{119}{90}$.

2. Calculând $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}:\frac{5}{6}$ obținem: *5p*

A. 1; B. $\frac{14}{18}$; C. 0,9; D. 0,1.

3. Soluția ecuației $3x-2=13$ este: *5p*

A. 5; B. $\frac{11}{3}$; C. -5; D. 3.

4. Calculând $2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{6}$ obținem: *5p*

A. $6\sqrt{6}$; B. $6\sqrt{3}$; C. 18; D. $18\sqrt{2}$.

5. Perimetrul unui pătrat este egal cu 28 cm. Aria acestui pătrat este egală cu: *5p*

A. 7 cm^2; B. 49 cm^2; C. 36 cm^2; D. 25 cm^2.

6. Un triunghi dreptunghic are ipotenuza de 13 cm și una dintre catete de 12 cm. Cealaltă catetă este de: *5p*

A. 1 cm; B. 25 cm; C. 5 cm; D. 3 cm.

7. Laturile unui triunghi isoscel sunt de 6 cm, 5 cm și 5 cm. Aria acestui triunghi este egală cu: *5p*

A. 30 cm^2; B. 24 cm^2; C. 12 cm^2; D. 25 cm^2.

Partea a II-a. La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

8. Se consideră ecuația $3x-2m=x+8$, unde m este un număr real.

a) Determină numărul real m pentru care soluția ecuației este 3; *5p*

b) Pentru $m=1$ rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația. *5p*

9. În *Figura 8*, este schița unui teren având ca formă dreptunghiul $ABCD$.

Un observator care stă în punctul A stabilește că $AC=12$ cm și $\sphericalangle CAB=30°$.

a) Determină lungimile laturilor dreptunghiului. *10p*

b) Calculează perimetrul și aria dreptunghiului. *10p*

c) Determină distanța de la punctul A la dreapta BD. *5p*

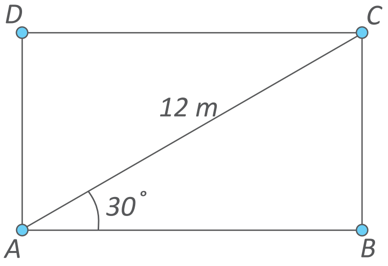


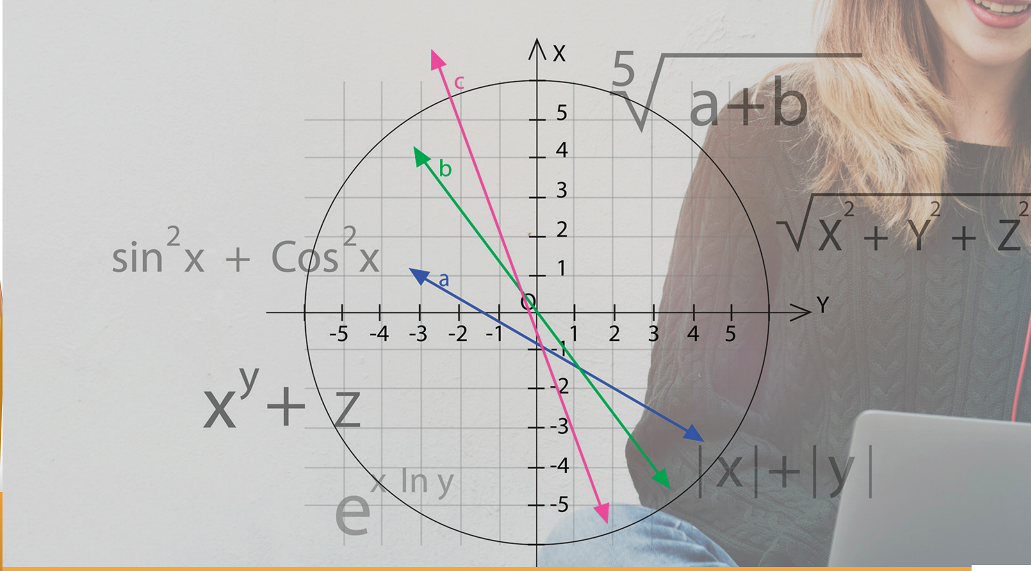
Figura 8 - Schița unui teren

10. Într-un sistem de axe ortogonale xOy, se consideră punctele $A(-2,1)$ și $B(3,6)$.

a) Reprezintă punctele A și B în sistemul de axe ortogonale. *10p*

b) Determină lungimea segmentului AB. *5p*

c) Demonstrează că $OA\perp OB$, unde O este originea sistemului de axe ortogonale. *5p*



Matematică – Manual pentru clasa a VIII-a

II

Intervale de numere reale. Inecuații în ℝ

1. Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor lor

Amintește-ți!

1. Folosind *Figura 1* răspunde la întrebările de mai jos.

a. Care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate și care sunt false:
a) $1 \in A$; b) $3 \in B$; c) $8 \in A$; d) $2 \in A$; e) $5 \in B$; f) $7 \in B$.

b. Scrie, folosind acolade, mulțimile A și B.

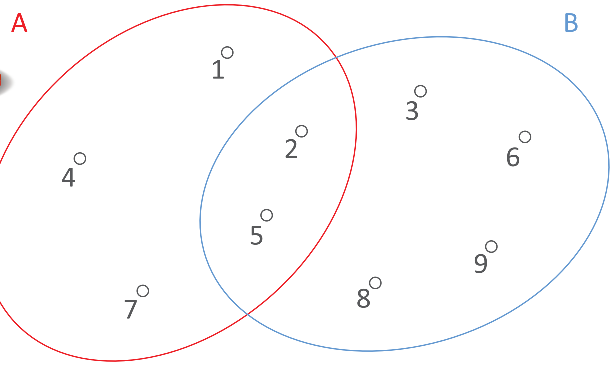


Figura 1 - Diagramele mulțimilor A și B

Observă și descoperă!

2. *Ana către Radu:* Profesorul de matematică mi-a cerut să scriu mulțimea A a elevilor din clasa noastră și mulțimea B a elevilor din școala noastră.

Radu: Și care este problema?

Ana: Știu să scriu mulțimea A deoarece cunosc numele tuturor colegilor din clasă. Dar nu cunosc numele tuturor elevilor din școală.

Ajut-o pe Ana să scrie mulțimea B răspunzând la următoarele întrebări:

a) Ce au în comun elementele din mulțimea A?

b) Spune o proprietate comună tuturor elementelor din mulțimea B.

Important

- O mulțime se poate scrie precizând o proprietate P, comună elementelor din mulțime.
Vom scrie: $M = \{x \mid x \text{ verifică } P\}$.
Vom citi: M este mulțimea elementelor x cu proprietatea că x verifică P.

Exemplu: Ana va scrie $B = \{x \mid x \text{ este elev al școlii noastre}\}$

Exersează!

3. Asociază mulțimii din coloana **A** descrierea corespunzătoare din coloana **B**.

A

i) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ divide } 12\}$

ii) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \,\vdots\, 12 \text{ și } x < 35\}$

iii) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$

iv) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10 \text{ și } x \text{ număr par}\}$

B

1. A este mulțimea numerelor naturale x cu proprietatea că x se divide cu 12 și este mai mic decât 35.
2. A este mulțimea numerelor naturale x cu proprietatea că x este număr par mai mic decât 10.
3. A este mulțimea numerelor naturale x cu proprietatea că x divide pe 12.
4. A este mulțimea numerelor naturale x cu proprietatea că x este mai mare sau egal cu 6.
5. A este mulțimea numerelor naturale x cu proprietatea că x este mai mic sau egal cu 6.

4. Asociază mulțimii din coloana **A**, mulțimea corespunzătoare din coloana **B**.

	A		B
i)	$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ divide } 12\}$	1.	$\{8, 16, 24, 32\}$
ii)	$\{x \in \mathbb{N} \mid x \,\vdots\, 8 \text{ și } x < 35\}$	2.	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
iii)	$\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$	3.	$\{0, 2, 4, 6, 8\}$
iv)	$\{x \in \mathbb{N} \mid x < 10 \text{ și } x \text{ număr par}\}$	4.	$\{0, 8, 16, 24, 32\}$
		5.	$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

5. Identifică o proprietate comună numerelor naturale din mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

6. Mulțimea cifrelor din care este format numărul natural 235876524 este .... .

7. Mulțimea consoanelor din cuvântul „armonie” este .... .

8. Se consideră mulțimea $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este pătratul unui număr natural, } x < 100\}$. Numărul de elemente al acestei mulțimi este egal cu ... .

9. În *Figura 2* sunt prezentate fructe și legume și principalele vitamine pe care acestea le conțin. Scrie mulțimea fructelor și legumelor din care putem asimila complexul de vitamine B (B_1, B_2, B_3, B_5, B_6, B_9, B_{12}).

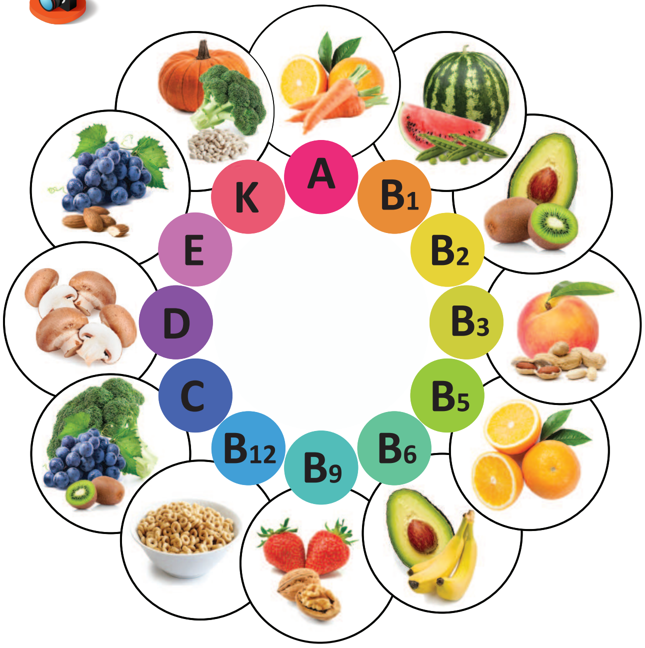


Figura 2 - Vitamine din fructe și legume

10. Se consideră mulțimea
$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.

Precizează elementele următoarelor mulțimi:

$M = \{x \in A \mid x \text{ este multiplu de } 3\}$;

$N = \{x \in A \mid x \text{ este număr impar}\}$;

$P = \{x \in A \mid x \text{ este număr prim}\}$.

11. Scrie următoarele enunțuri matematice ca mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor sale:

a) mulțimea numerelor reale egale cu modulul lor;

b) mulțimea numerelor raționale pentru care numărătorul și numitorul sunt numere naturale nenule având suma 10.

12. Problemă rezolvată: Determină elementele mulțimii $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \frac{6}{2x+3} \in \mathbb{N}\right\}$.

Soluție: O fracție reprezintă un număr natural dacă **numitorul** divide **numărătorul**. Prin urmare $2x + 3 \mid 6$.

Deoarece 6 este natural și $2x+3$ trebuie să fie natural. Divizorii naturali ai lui 6 sunt $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$.

Deci $2x + 3 \in \{1, 2, 3, 6\}$ implică $2x \in \{-2, -1, 0, 3\}$, de unde $x \in \{-1, 0\}$. În concluzie, mulțimea este $A = \{-1, 0\}$.

13. Determină elementele următoarelor mulțimi:

$A = \left\{x \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{10}{x} \in \mathbb{N}\right\}$;

$B = \left\{x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \frac{15}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$;

$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ divide pe } 20\}$;

$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este cubul unui număr natural mai mic decât } 150\}$.

2. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor

Observă și descoperă!

1. Observă *Figura 3* și *Figura 4*, apoi completează, oral, propozițiile:

Figura 3 – Program magazin

Figura 4 – Program școala de vară

Magazinul este deschis în intervalul orar .... de luni până sâmbătă, iar duminica în intervalul orar .... . Programul școlii de vară se desfășoară în intervalul orar .... .

2. Câte numere naturale sunt între 15 și 19? Dar între 2 și 3?

3. Spune două numere raționale cuprinse între 2 și 3.

4. Spune două numere iraționale cuprinse între 2 și 3.

5. Spune două numere reale cuprinse între 2,4 și 2,5.

6. Spune două numere reale cuprinse între 1,5 și $\sqrt{8}$.

7. Câte numere reale bănuiești că sunt între 2 și 3?

8. Enumeră elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 15 < x \leq 19\}$.

9. Poți enumera toate elementele mulțimii $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 2 \leq x \leq 3\}$? Justifică răspunsul dat.

Important

- **Intervalul** reprezintă mulțimea numerelor reale cuprinse între două numere reale date.
- Cele două numere date se numesc **capetele intervalului.**
- Un interval se notează scriind între paranteze pătrate sau rotunde cele două numere date; întotdeauna vom scrie în stânga numărul mai mic.

Exemplu: $(-2, 1)$, $[3, 5]$.
Capetele intervalelor sunt -2 *și* 1*, respectiv* 3 *și* 5.

- Elementele unui interval sunt numere reale. Niciodată nu vom putea scrie efectiv toate elementele unui interval.
- **Elementele unui interval** se pot reprezenta cu ajutorul axei numerelor reale. Pentru aceasta reprezentăm pe axa numerelor capetele intervalului și hașurăm porțiunea din axă cuprinsă între cele două numere.

Exemplu: În Figura 5 sunt reprezentate intervalele $(-2, 1)$ *și* $[3, 5]$.

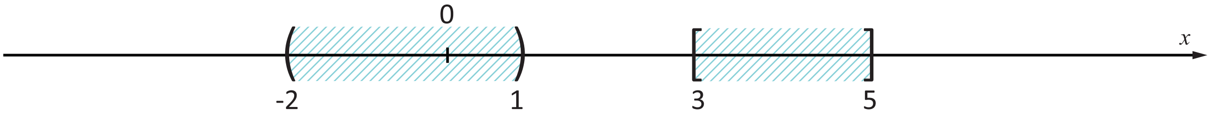
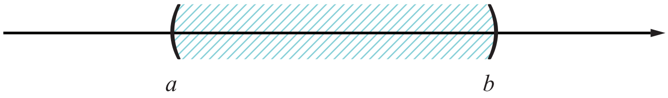
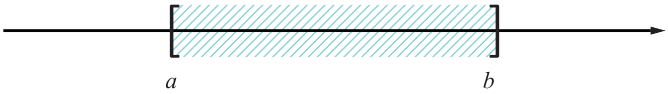


Figura 5 - Intervale reprezentate pe axa numerelor reale

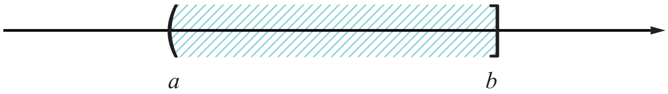
- Reprezentarea pe axa numerelor a unui interval de tipul (a, b) sau $[a, b]$ este un segment.
- Dacă a și b sunt capetele intervalului, $a < b$, atunci avem:
  - ▷ „**Intervalul deschis** a, b" (nu conține numerele a și b): $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.



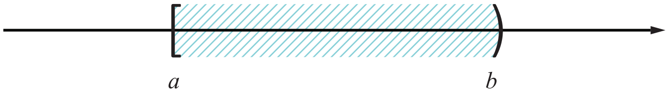
▷ „**Intervalul închis** a, b" (conține numerele a și b): $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.



▷ „**Intervalul deschis la stânga, închis la dreapta**" (nu conține numărul a și conține numărul b): $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.



▷ „**Intervalul închis la stânga, deschis la dreapta**" (conține numărul a și nu conține numărul b): $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.



Exemple: $[-3, 2)$ *este „intervalul închis la stânga, deschis la dreapta,* -3*,* 2*", adică îl conține pe* -3 *și nu-l conține pe* 2*.* $[3, 5]$ *este „intervalul închis* 3*,* 5*", adică le conține pe* 3 *și* 5*.*

Observă și descoperă!

10. *Bogdan:* Am înțeles cum se poate reprezenta un interval pe axa numerelor. Dar, dacă eu hașurez ca în *Figura 6*, voi mai putea scrie cu ajutorul intervalelor mulțimea acestor numere reale?

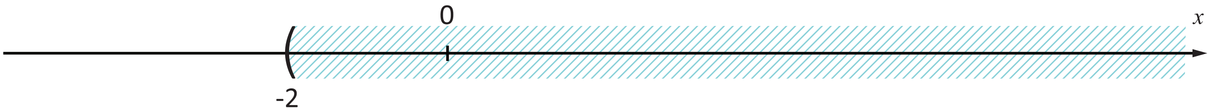


Figura 6 - Intervale de numere pe axă

Adina: Vom putea face acest lucru, dar va trebui să introducem două simboluri. Este vorba de $+\infty$ (citim plus infinit) și $-\infty$ (citim minus infinit).

$+\infty$ arată nemărginirea numerelor reale în partea pozitivă a axei numerelor.

$-\infty$ arată nemărginirea numerelor reale în partea negativă a axei numerelor.

Pe axa numerelor, cele două simboluri sunt situate ca în *Figura 7*.

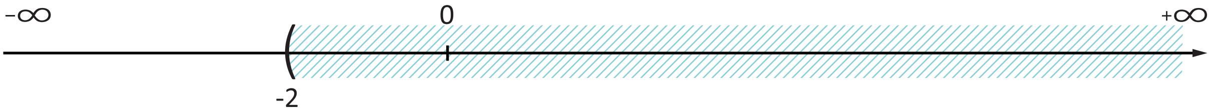


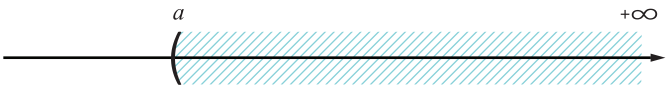
Figura 7 - Intervale de numere pe axă

11. Scrie, ca interval, mulțimea punctelor de pe axa numerelor hașurată de Bogdan: (...., ...).

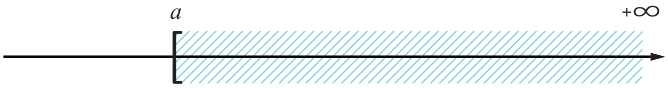
12. Ce figură geometrică reprezintă intervalul din *Figura 7*?

Important

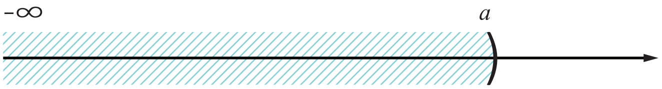
- La $+\infty$ (plus infinit) și la $-\infty$ (minus infinit) intervalul este totdeauna deschis, deoarece ele nu sunt numere.
- Avem următoarele tipuri de intervale:
  - ▷ „**Interval deschis a, plus infinit**”: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$.



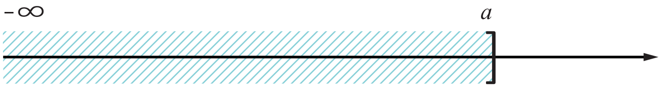
▷ „**Interval închis a, plus infinit**”: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$.



▷ „**Interval deschis minus infinit, a**”: $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$.



▷ „**Interval închis minus infinit, a**”: $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$.



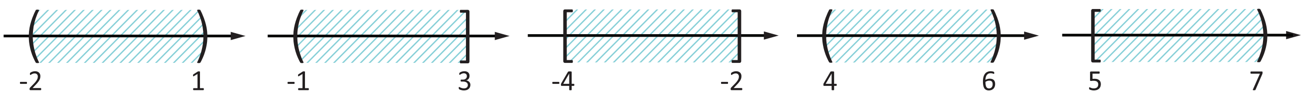
Exemplu: Mulțimea hașurată de Bogdan se scrie ca interval $(-2, +\infty)$.

- Mulțimea numerelor reale este un interval: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.
- Reprezentarea pe axa numerelor a unui interval de tipul $(a, +\infty)$ sau $(-\infty, a)$ este o semidreaptă deschisă, adică nu conține originea semidreptei.
- Reprezentarea pe axa numerelor a unui interval de tipul $[a, +\infty)$ sau $(-\infty, a]$ este o semidreaptă închisă, și atunci conține originea semidreptei.

Exersează!

13. Asociază fiecărui număr din prima linie intervalul căruia îi aparține, din linia a doua.

-2 -1 1 6



14. Stabilește care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate (A) și care sunt false (F):

a) $1 \in (0,2)$; b) $-3 \in [-4,\ -3)$; c) $\frac{1}{3} \in (-2,1)$; d) $\frac{5}{2} \in (1,3)$; e) $2 \in (-\infty, 2]$.

15. Stabilește care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate (A) și care sunt false (F):

a) $-2 \in (-7;\ -2)$; b) $2\sqrt{2} \in (1{,}3;\ 2{,}82]$; c) $3{,}(6) \in \left[3{,}1;\ \frac{11}{3}\right]$; d) $0 \in (-1;\ 0{,}1]$; e) $-\sqrt{5} \in (-3;\ 2)$.

16. Scrie sub formă de interval sau enumerând elementele:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x < 4\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 2\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \le x < 2\}$;

e) $E = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{2}{5} \le x < \frac{2}{5}\right\}$;

f) $F = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > \frac{3}{4}\right\}$;

g) $G = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \le -\frac{5}{9}\right\}$;

h) $H = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, -3 < x \le \frac{28}{9}\right\}$;

i) $I = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \le x \le 2\}$;

j) $J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 17\}$.

17. Reprezintă pe axa numerelor mulțimile:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2{,}5 < x \le -1\}$; b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 4 \le x \le 7\}$; c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \le x \le 3\}$; d) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > \sqrt{7}\right\}$.

18. Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \le 4\}$.

a) Scrie ca interval mulțimea A.

b) Reprezintă pe axa numerelor mulțimea A.

c) Scrie un număr irațional din mulțimea A.

d) Precizează cel mai mic număr natural din mulțimea A.

19. În *Figura 8* este prezentată schița pentru ultima copertă a unui caiet și semnificația înscrisurilor de pe această copertă. Știind că acest caiet conține 100 de foi, calculează, cu ajutorul unui calculator, în ce interval se află masa acestui caiet, exprimată în grame.

20. Pentru paginile manualului tău de matematică s-a folosit hârtie de 70g/m^2, iar pentru coperțile lui hârtie de 200g/m^2. Numărul de pagini ale manualului îl găsești pe pagina 2, iar dimensiunile manualului le vei măsura singur. În ce interval se află masa acestui manual, dacă se admite o abatere a gramajului de ±5%. Verifică rezultatul obținut cu ajutorul unui cântar de bucătărie.

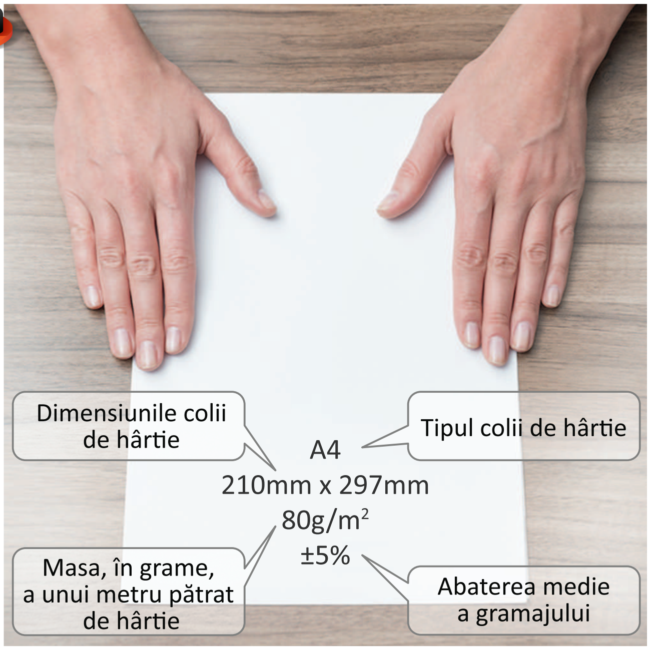


Figura 8 - Schița unei coperți de caiet

3. Intersecția și reuniunea intervalelor

Amintește-ți!

1. Folosind *Figura 9,* răspunde următoarelor cerințe:

a. Scrie, folosind acolade, mulțimile A și B.

b. Efectuează $A \cap B$ și $A \cup B$.

Indicație: $A \cap B$ înseamnă A intersectat cu B și conține elementele comune ale mulțimilor A și B. $A \cup B$ înseamnă A reunit cu B și conține toate elementele celor două mulțimi, fără a le repeta.

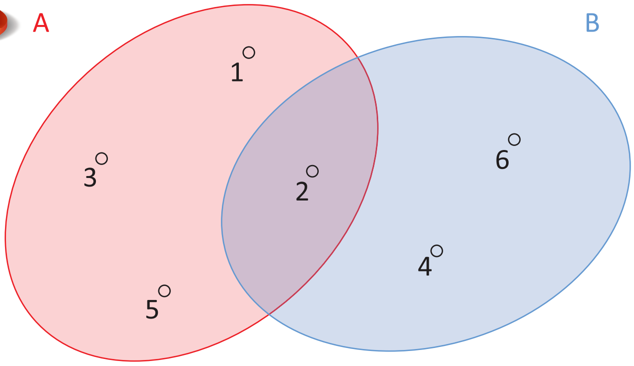


Figura 9 - Diagramele mulțimilor A și B

Observă și descoperă!

2. Victor trebuie să meargă astăzi și la școală și la bibliotecă. Observă *Figura 10* și *Figura 11* și rezolvă cerințele.

Figura 10 – Afiș program școală

Figura 11 – Afiș program bibliotecă

Programul școlii se desfășoară în intervalul orar ..., iar biblioteca este deschisă în intervalul orar ... .
Unde se poate afla Victor la ora 10? Dar la ora 13?

Important

• Intervalele sunt mulțimi, prin urmare și în cazul intervalelor se poate vorbi despre **intersecție** și **reuniune**.

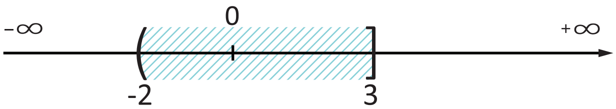
• **Intersecția a două intervale** este formată din elementele comune ale celor două intervale.

• Pentru a determina intersecția a două intervale este recomandată reprezentarea lor pe axa numerelor, ca în exemplul de mai jos.

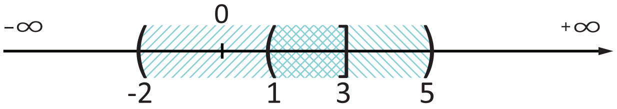
Exemplu: Să efectuăm $(-2, 3] \cap (1, 5)$.

Cum gândesc: Pas 1. Reprezint pe axa numerelor intervalul $(-2, 3]$ și îl hașurez înclinat spre dreapta.

Cum scriu:



Pas 2. Pe aceeași axă a numerelor reprezint intervalul $(1, 5)$ și îl hașurez înclinat spre stânga.



Pas 3. Intersecția înseamnă elementele comune celor două intervale. În desen, partea comună este aceea în care se suprapun cele două hașurări, adică de la 1 la 3. Prin urmare, intersecția celor două intervale este „intervalul deschis la stânga, închis la dreapta, 1, 3".

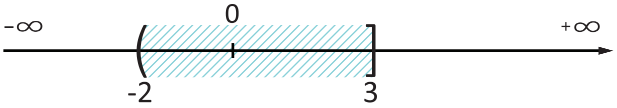
$$(-2, 3] \cap (1, 5) = (1, 3]$$

- **Reuniunea a două intervale** este formată din toate elementele celor două intervale luate o singură dată.
- Pentru a determina reuniunea a două intervale este recomandată reprezentarea lor pe axa numerelor.

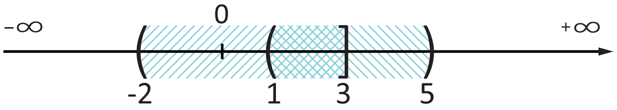
Exemplu: Să efectuăm $(-2, 3] \cup (1, 5)$

Cum gândesc: Pas 1. Reprezint pe axa numerelor intervalul $(-2, 3]$ și îl hașurez înclinat spre dreapta.

Cum scriu:



Pas 2. Pe aceeași axă a numerelor reprezint intervalul $(1, 5)$ și îl hașurez înclinat spre stânga.



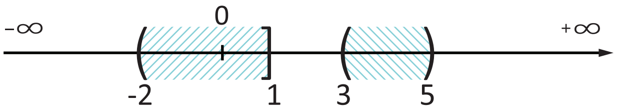
Pas 3. Reuniunea înseamnă toate elementele celor două intervale. În desen, aceasta înseamnă partea hașurată spre dreapta împreună cu partea comună și împreună cu partea hașurată spre stânga. Prin urmare, reuniunea celor două intervale este „intervalul deschis -2, 5".

$$(-2, 3] \cup (1, 5) = (-2, 5)$$

- **Atenție!** Dacă intersecția a două intervale este mulțimea vidă, atunci reuniunea acelor intervale nu se poate scrie ca interval.

Exemplu: Deoarece $(-2{,}1] \cap (3{,}5) = \emptyset$ *(cele două hașuri nu au nimic comun), nu putem scrie ca interval* $(-2{,}1] \cup (3{,}5)$.

Dacă am scrie $(-2{,}1] \cup (3{,}5) = (-2{,}5)$ *ar însemna că și numărul 2 aparțien reuniunii. Dar 2 nu aparține niciunuia dintre intervalele date.*



Exersează!

3. În *Figura 12*, pe axa numerelor, unul dintre intervale este hașurat spre dreapta și celălalt interval este hașurat spre stânga.

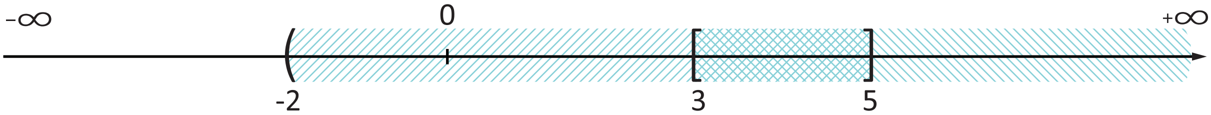


Figura 12 - Intervale de numere pe axă

a) Care sunt cele două intervale? b) Determină reuniunea și intersecția celor două intervale.

4. Încercuiește răspunsul corect.

a) $(-\infty,-5)\cap(-7,\ 2]=$

A. $(-\infty,2]$; B. $(-7,-5)$; C. $\emptyset$; D. $(-5,2]$.

b) $(0,8)\cup[3,+\infty)=$

A. $(0,+\infty)$; B. $[3,8)$; C. $(8,+\infty)$; D. $(0{,}3]$.

c) $\left[-\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right]\cap\left(-1,1\frac{2}{5}\right]=$

A. $(0{,}5;\ 1{,}2)$; B. $\left[-\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)$; C. $\left(-\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right]$; D. $\left[-\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right]$.

5. Efectuează: a) $(2,7)\cap(-3,6]$; b) $[4,8)\cup[8,+\infty)$; c) $(-\infty,5)\cap[3,+\infty)$; d) $(0,7)\cup(-1,10]$; e) $[-5,11]\cup(1,9]$; f) $(-4,8)\cap[-1,5)$.

6. Efectuând $(-2,4)\cap(3,6]$ obținem .... .

7. Efectuând $(-5,7)\cup(1,6]$ obținem .... .

8. Efectuând $(-7,6]\cap\mathbb{Z}$ obținem .... .

9. Efectuând $(-4,4)\cap\mathbb{N}^*$ obținem .... .

10. Efectuând $(-1,1)\cap\mathbb{R}$ obținem .... .

11. Efectuând $(-3,7)\cup\mathbb{R}$ obținem .... .

12. Efectuând $[0,+\infty)\cap\mathbb{N}$ obținem .... .

13. Efectuând $[0,+\infty)\cup\mathbb{N}$ obținem .... .

14. Efectuează $A\cup B$ și $A\cap B$ dacă: a) $A=(-9,10)$ și $B=[-10,9)$; b) $A=\{-4,3\}$ și $B=(-4,3)$; c) $A=\left[-\frac{3}{2},2\right]$ și $B=\left(-1,\sqrt{5}\right]$; d) $A=\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]$ și $B=\left[-\sqrt{3},7\right)$.

15. Maria vrea să meargă la cabinetul medical și la cabinetul stomatologic pentru un control de rutină. În *Figura 13* sunt afișate programele celor două cabinete. Considerându-și programul din săptămâna următoare, constată că cea mai bună zi pentru mersul la control este miercuri.

Figura 13 - Program cabinete medicale

a) În ce interval orar sunt deschise ambele cabinete, miercuri?

b) Dacă fiecare control durează două ore, iar drumul între cele două cabinete durează o oră, care este ultima oră la care Maria poate intra la unul dintre cabinete astfel încât să fie sigură că poate efectua și celălalt consult în aceeași zi?

16. Ioana lucrează în Iași, România, de luni până vineri, de la ora 8:00 până la ora 17:00, cu o pauză de masă în intervalul orar 13:00 – 14:00. Răzvan locuiește în Bilbao, Spania, unde lucrează de luni până vineri, de la ora 9:00 la 18:30, cu o pauză de masă în intervalul orar 13:30 – 15:00. Se știe că, dacă în Iași ora este 15:00, atunci în Bilbao este ora 14:00. a) Câte ore pe zi lucrează cei doi în același timp? b) Care sunt porțiunile din intervalul orar 7:00 – 20:00, din România, când Ioana l-ar putea contacta pe Răzvan, astfel încât acesta să nu fie în timpul programului de muncă?

4. Inecuații de forma $ax+b\geq 0$ $(\leq,<,>)$ unde $a,b\in\mathbb{R}$

Observă și descoperă!

1. Cristina are în pușculiță o sumă de bani egală cu 230 de lei. Își propune să pună în pușculiță, săptămânal, aceeași sumă de bani, astfel încât, după 6 săptămâni, în pușculiță să fie o sumă de bani cel puțin egală cu 1 050 de lei.

Ajut-o pe Cristina să transforme această problemă într-o relație matematică, răspunzând la întrebările următoare:

a. Dacă x este suma pe care Cristina o pune săptămânal în pușculiță, câți lei va pune Cristina în pușculiță în 6 săptămâni?

b. Cum se exprimă, cu ajutorul lui x, suma de bani pe care o va avea Cristina în pușculiță după 6 săptămâni?

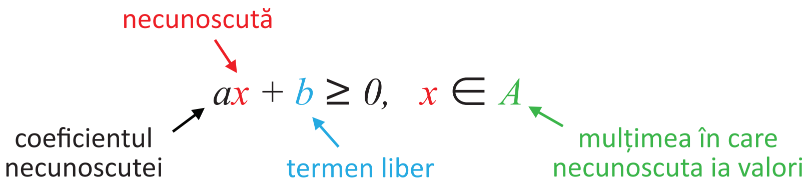
c. Cum se scrie matematic „numărul A este cel puțin egal cu 1 050”?

d. Scrie relația matematică în care se transformă problema de mai sus.

Ar fi trebuit să fi ajuns la $6x + 230 \geq 1\,050$. Această relație se numește inecuație.

Important

- **Inecuația** este o inegalitate care conține unul sau mai mulți termeni necunoscuți și care este adevărată numai pentru anumite valori ale necunoscutelor.



- În locul semnului $\geq$ putem avea $\leq$, $<$ sau $>$.

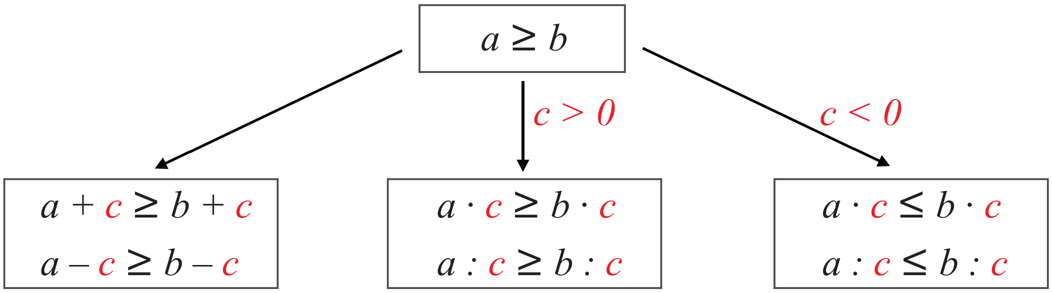
Exemple:
$6x + 230 \geq 1050$, *cu* $x \in \mathbb{Z}$; $3x - 2 \leq 5$, *cu* $x \in \mathbb{R}$; $-3x + 2 > 10$ *(dacă nu este specificată mulțimea căreia îi aparține* x*, atunci se consideră că este mulțimea numerelor reale).*

- Numim **soluție a unei inecuații** un număr care pus în locul necunoscutei face ca inegalitatea să fie adevărată.

Exemple:
Numărul 2 *este soluție a inecuației* $3x - 2 \leq 5$, *deoarece afirmația* $3 \cdot 2 - 2 \leq 5$ *este adevărată* $(4 \leq 5)$.
Numărul 3 *nu este soluție a inecuației* $3x - 2 \leq 5$, *deoarece afirmația* $3 \cdot 3 - 2 \leq 5$ *este falsă* $(7 > 5)$.

- **A rezolva o inecuație** înseamnă să scriem mulțimea soluțiilor inecuației.

- Pentru a rezolva o inecuație trebuie să cunoaștem relația dintre inegalitate și operațiile aritmetice.



adun sau scad, în ambii membri ai inegalității aceeași cantitate	înmulțesc sau împart ambii membri ai inegalității cu același număr pozitiv	înmulțesc sau împart ambii membri ai inegalității cu același număr negativ
Exemplu: $5 > 3 \xrightarrow{+4} 9 > 7$	$5 > 3 \xrightarrow{\cdot 2} 10 > 6$	$5 > 3 \xrightarrow{\cdot(-3)} -15 < -9$

- Cum rezolv inecuația $ax + b \geq 0$, unde a, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$?

Cum gândesc: Pas 1. Am de rezolvat inecuația „ax plus b mai mare sau egal cu zero”.

Cum scriu: $ax + b \geq 0$

Pas 2. Trec termenul liber în membrul drept, scăzând din ambii membri b.

$ax + b \geq 0 \mid -b$
$ax \geq -b$

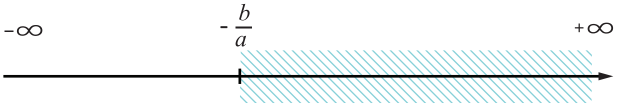
Pas 3. Împart ambii membri prin coeficientul necunoscutei și țin cont dacă este pozitiv sau negativ.

$ax \geq -b \mid : a$

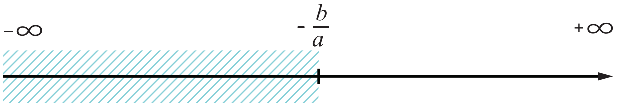
Dacă $a > 0$ obținem $x \geq -\dfrac{b}{a}$. Dacă $a < 0$ obținem $x \leq -\dfrac{b}{a}$.

Pas 4. Scriu mulțimea soluțiilor inecuației folosindu-mă de axa numerelor.

- **Pentru** $a > 0$ avem și $x \in \left[-\dfrac{b}{a}, +\infty\right)$.



- **Pentru** $a < 0$ avem și $x \in \left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right]$.



2. Probleme rezolvate. Să rezolvăm inecuațiile: a) $3 - 2x \leq 7$, $x \in \mathbb{R}$; b) $\dfrac{x-1}{3} + \dfrac{1}{2} > \dfrac{5x-1}{6}$, $x \in \mathbb{R}$.

Soluție: a)

Cum gândesc: Pas 1. Termenul liber din membrul stâng trebuie mutat în membrul drept. Pentru aceasta scad, în ambii membri, 3.

Cum scriu: $3 - 2x \leq 7 \mid -3 \Rightarrow -2x \leq 7 - 3$

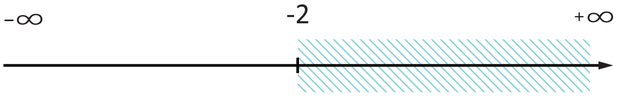
Pas 2. Efectuez calculele în membrul drept.

$$-2x \leq 4$$

Pas 3. Împart inecuația prin coeficientul necunoscutei. Deoarece acesta este negativ, în urma împărțirii, se va schimba sensul inegalității.

$$-2x \leq 4 \,|\, : (-2) \Rightarrow x \geq -2$$

Pas 4. Reprezint pe axa numerelor numerele reale mai mari sau egale cu -2.



Pas 5. Scriu mulțimea soluțiilor inecuației. Intervalul este închis la -2 deoarece avem „mai mare sau egal”. Dacă aveam semnul „mai mare”, atunci era interval deschis.

$$x \in [-2, +\infty)$$

b) $\frac{x-1}{3} + \frac{1}{2} > \frac{5x-1}{6}$, $x \in \mathbb{R}$.

Cum gândesc: Pas 1. Inecuația trebuie adusă la forma $ax + b \geq 0$ sau cu $\leq, >, <$. Pentru aceasta procedez ca la ecuații, adică:

Elimin numitorii, aducând toți termenii la același numitor și apoi înmulțind inecuația cu numitorul comun. Aici numitorul comun este 6.

Cum scriu: $^{2)}\frac{x-1}{3} + {}^{3)}\frac{1}{2} > \frac{5x-1}{6} \Rightarrow \frac{2(x-1)}{6} + \frac{3}{6} > \frac{5x-1}{6} \Big| \cdot 6 \Rightarrow 2(x-1) + 3 > 5x - 1$

Pas 2. Desființez paranteza.

$$2x - 2 + 3 > 5x - 1$$

Pas 3. Aduc toți termenii în membrul stâng. Termenii care trec peste „>” își vor schimba semnul.

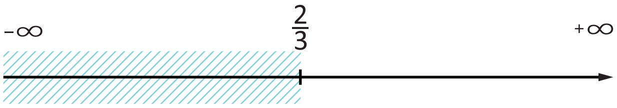
$$2x - 2 + 3 - 5x + 1 > 0$$

Pas 4. Efectuez calculele în membru stâng.

$$-3x + 2 > 0$$

Pas 5. Rezolv această inecuație și reprezint soluțiile pe axa numerelor reale.

$$-3x + 2 > 0 \Rightarrow -3x > -2 \,|\, : (-3) \Rightarrow x < \frac{2}{3} \Rightarrow x \in (-\infty, \frac{2}{3})$$



Exersează!

3. Asociază fiecărui grup de numere, din prima linie, inecuațiile, din linia a doua, pentru care aceste numere sunt soluții.

1 și 2

-3 și -5

2 și 4

6 și 8

$x + 3 \leq 1$

$3 - x < 2$

$2x - 3 \leq 1$

$x - 2 \geq 3$

$3x - 28 > -1$

4. Reprezintă pe axa numerelor soluțiile inecuațiilor:

a) $x \leq -3$; b) $x > 2$; c) $x \geq \frac{3}{2}$; d) $x < 0$; e) $x + 3 < 1$; f) $2x - 1 < 7$, unde x este număr real.

5. Încercuiește varianta corectă pentru intervalul care reprezintă mulțimea soluțiilor inecuației:

a) $2x + 3 \leq 5$, $x \in \mathbb{R}$

A. $(-\infty, 0)$ B. $[0, +\infty)$ C. $(-\infty, 1]$ D. $(-\infty, 4]$

b) $3x - 4 > -2$, $x \in \mathbb{R}$

A. $(2, +\infty)$ B. $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ C. $(-2, +\infty)$ D. $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$

c) $-x + 6 \geq 9$, $x \in \mathbb{R}$

A. $[-3, +\infty)$ B. $(-\infty, -3]$ C. $(15, +\infty)$ D. $[3, +\infty)$

d) $-2x - 7 < -3$, $x \in \mathbb{R}$

A. $(-2, +\infty)$ B. $(-\infty, -2)$ C. $(-5, +\infty)$ D. $(+\infty, -5)$

6. Mulțimea soluțiilor inecuației $3x - 7 \leq 2$, $x \in \mathbb{R}$ este intervalul .... .

7. Numerele întregi care verifică inecuația $|x| \leq 4$ sunt .... .

8. Scrie A, dacă afirmația este adevărată sau F, dacă afirmația este falsă.
Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci:

a) $x \leq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2]$;

b) $-x + 1 < 5 \Leftrightarrow x \in (4; +\infty)$;

c) $-x < 7 \Leftrightarrow x \in (7; +\infty)$;

d) $|5x + 2| \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{2}{5}\right\}$.

9. Determină toate numerele reale care, micșorate cu 3, nu îl depășesc pe 12.

10. Determină numerele reale pentru care triplul lor mărit cu 40 este cel mult 130.

11. Determină numerele reale pentru care sfertul lor micșorat cu 20 este cel puțin egal cu jumătatea lor.

12. Determină numerele naturale, pentru care treimea lor micșorată cu 2 este cel mult egală cu cincimea lor.

13. Rezolvă următoarele inecuații:

a) $x + 2 > 5$, cu $x \in \mathbb{R}$;
b) $x + 4 > 3$, cu $x \in \mathbb{R}$;
c) $-x + 2 \leq 3$, cu $x \in \mathbb{R}$;
d) $x + 2 \leq 7$, cu $x \in \mathbb{N}$;
e) $2x - 3 \geq 5$, cu $x \in \mathbb{R}$;
f) $x + 2 > 5x - 6$, cu $x \in \mathbb{R}$;
g) $3x - 1 > 5 - 3x$, cu $x \in \mathbb{R}$;
h) $2x + 2 \leq 5x - 1$, cu $x \in \mathbb{R}$;
i) $x + 2 > 5x - 6$, cu $x \in \mathbb{N}$;
j) $\frac{x+2}{3} + \frac{x-1}{2} > 5$, cu $x \in \mathbb{R}$;
k) $\frac{x}{4} + \frac{2-x}{6} > \frac{5x}{12} - 1$, cu $x \in \mathbb{R}$.

14. Problemă rezolvată: Determină mulțimea soluțiilor inecuației $\frac{-2}{x+3} \geq 0$.

Soluție:

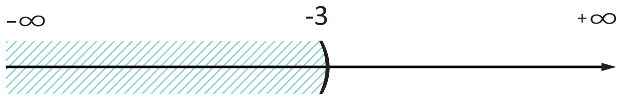
Cum gândesc: Pas 1. Numărătorul (-2) este un număr negativ. Mă întreb: „Ce semn trebuie să aibă numitorul $(x + 3)$ pentru ca fracția să fie pozitivă (≥ 0)?"

Evident, semnul minus, deoarece, la împărțire $(-) : (-) = (+)$. Așadar, inecuația dată este echivalentă cu $x + 3 < 0$ (nu pun $\leq$ deoarece numitorul unei fracții nu poate fi zero).

Cum scriu: Deoarece $-2 < 0$, $\frac{-2}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow x + 3 < 0$.

Pas 2. Rezolv inecuația $x+3<0$.

$$x+3<0 \Leftrightarrow x<-3 \Rightarrow x \in (-\infty,\ -3)$$



15. Rezolvă inecuațiile:

a) $\dfrac{3}{x-4}>0$, cu $x \in \mathbb{R}$; b) $\dfrac{-3}{2x+4} \leq 0$, cu $x \in \mathbb{R}$; c) $\dfrac{6}{5x-15} \leq 0$, cu $x \in \mathbb{N}$.

16. Problemă rezolvată: Determină numerele reale x pentru care $|x| \leq 3$.

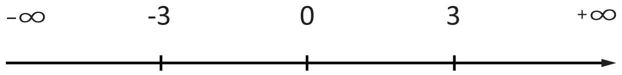
Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Îmi amintesc că modulul unui număr real reprezintă, pe axa numerelor, distanța de la origine până la punctul corespunzător numărului.

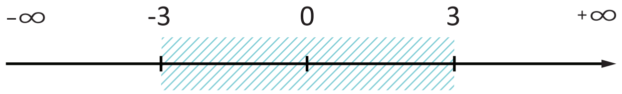
Inecuația $|x| \leq 3$ o putem citi „distanța de la origine până la punctul corespunzător numărului x este mai mică sau egală cu 3”.

Desenez o axă a numerelor și pe ea trec punctele corespunzătoare numerelor 3 și -3.

Cum scriu:



Pas 2. Punctele corespunzătoare numerelor x care sunt soluții ale inecuației $|x| \leq 3$ se vor găsi pe segmentul cu capetele în punctele corespunzătoare numerelor 3 și -3.



Pas 3. Așadar, inecuația $|x| \leq 3$ este echivalentă cu $-3 \leq x \leq 3$, soluția fiind intervalul închis de la -3 la 3.

$$x \in [-3, 3]$$

Pas 4. Concluzie.

Din exemplul de mai sus deducem că dacă $a \geq 0$, atunci $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, de unde obținem $x \in [-a, a]$.

17. Rezolvă, în mulțimea numerelor reale, inecuațiile:

a) $|x| \leq 6$; b) $|x+5|<0$; c) $|2x+1| \leq 3$; d) $|-x+4| \leq 0$; e) $|3x-2|<1$.

18. Determină mulțimile:

$$A=\{x \in \mathbb{R} \,|\, 5x-8 \geq 2x+3\};\ B=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{2x+3}{5}<1\right\};\ C=\{x \in \mathbb{R} \,|\, -4 \leq 3x+2<7\};$$

$$D=\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, |x+1|<\sqrt{5}\right\};\ E=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -1 \leq \frac{5x-6}{2}<3\right\}.$$

19. Se știe că $\sqrt{a}$ este definit (are sens) numai dacă $a \geq 0$. Determină, după model, valorile lui x pentru care următorii radicali sunt definiți:

a) $\sqrt{x-2}$; b) $\sqrt{3x-5}$; c) $\sqrt{2-x}$; d) $\sqrt{4-2x}$; e) $\sqrt{\dfrac{3}{x+2}}$; f) $\sqrt{\dfrac{2}{5-x}}$; g) $\sqrt{\dfrac{-3}{x+5}}$.

Model: Pentru ca $\sqrt{x-2}$ să fie definit trebuie ca $x-2 \geq 0$, de unde $x \geq 2$, adică $x \in [2, +\infty)$.

5. Recapitulare

1. a) Scrie mulțimea cifrelor numărului 13526435.

b) Scrie mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul *colosal*.

2. Scrie următoarele mulțimi folosind o proprietate comună a elementelor sale:

a) $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$; b) $B = \left\{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, ..., 2^{100}\right\}$; c) $C = \{16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144\}$.

3. Stabilește care dintre următoarele afirmații sunt adevărate sau false:

a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este număr prim}\} \subset \mathbb{N}$; b) $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 10^{10}\} \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5^5\}$.

4. Se consideră mulțimea $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este divizibil cu } 9\}$.
Scrie, pe caiet, numai afirmațiile adevărate.
a) $456 \in M$; b) $324 \in M$; c) $5\,346 \in M$; d) $2\,681 \in M$; e) $123\,456\,789 \in M$.

5. Asociază mulțimii din coloana **A** mulțimea corespunzătoare din coloana **B**:

A

i) $\{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x \leq 9\}$
ii) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 9\}$
iii) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 9, x \,\vdots\, 3\}$
iv) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3, x \,\vdots\, 9\}$

B

1. $\{0\}$
2. $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
3. $\emptyset$
4. $\{0, 3, 6, 9\}$
5. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

6. Determină elementele următoarelor mulțimi:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \dfrac{3}{x+2} \in \mathbb{Z}\right\}$; b) $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \dfrac{3}{x+2} \in \mathbb{N}\right\}$; c) $C = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \dfrac{3}{x+2} \in \mathbb{Z}\right\}$.

7. Cardinalul mulțimii $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \dfrac{15}{2x+3} \in \mathbb{N}\right\}$ este egal cu .... .

8. Reprezintă pe axa numerelor intervalul:

a) $(-3, 3)$; b) $[-1, 3]$; c) $[-2, \infty)$; d) $(0, 4]$; e) $[-2, 2)$; f) $(-\infty, -1]$; g) $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$; h) $\left[-\sqrt{2}, +\sqrt{2}\right]$.

9. Stabilește care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate și care sunt false.

a) $2\sqrt{3} \in (0, 4)$; b) $\sqrt{7} \in [1, 2]$; c) $-1{,}3 \in \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right]$; d) $-\sqrt{2} \in (-2, 2)$.

10. Scrisă sub formă de interval, mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3\}$ este egală cu .... .

11. Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$.

a) Scrie ca interval mulțimea A.

b) Reprezintă pe axa numerelor reale mulțimea A.

c) Scrie două numere raționale din mulțimea A.

d) Scrie două numere iraționale din mulțimea A.

e) Calculează $A \cup \mathbb{R}$ și $A \cap \mathbb{R}$.

f) Precizează care este cel mai mare număr natural din mulțimea A.

12. Calculează, folosind reprezentarea pe axa numerelor, $I_1 \cap I_2$; $I_1 \cup I_2$ dacă:

a) $I_1 = (-5;\ 4)$ și $I_2 = [-3;\ 3)$;

b) $I_1 = [-1;\ +\infty)$ și $I_2 = (-1;\ 6)$;

c) $I_1 = \left(-\sqrt{3};\ 2\right)$ și $I_2 = \left(-1{,}7;\ \sqrt{2}\right]$;

d) $I_1 = \left[-\frac{3}{4};\ \frac{1}{2}\right]$ și $I_2 = \left(-1;\ \frac{4}{5}\right]$.

13. Efectuează:

a) $[-1, 2) \cup \{2\}$;

b) $[-1, 2) \cap \{2\}$;

c) $[-2, 3] \cup \{3\}$;

d) $[-2, 3] \cap \{3\}$;

e) $(-1, 1) \cup \{-1, 1\}$;

f) $(-1, 1) \cap \{-1, 1\}$.

14. Rezolvă, în mulţimea numerelor reale, inecuațiile:

a) $4x - 3 > -5$;

b) $4 - 2x > 6$;

c) $\frac{x}{2} - 1 \geq 3$;

d) $\frac{x-1}{2} - \frac{3x-2}{4} < -\frac{5}{2}$;

e) $\frac{1-x}{2} + \frac{2-x}{3} \geq \frac{5}{6}$.

15. Rezolvă, în mulțimea numerelor reale, inecuațiile:

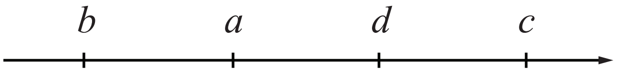
a) $|2x + 1| \leq 3$; b) $|x - 3| \leq 2$; c) $|2 - x| \leq 4$; d) $|x - 5| \leq 0$; e) $|3 - x| < -2$.

16. Problemă rezolvată: Se consideră numerele reale a, b, c, d astfel încât $b < a < d < c$. Efectuează $(b, c) \cap [a, d]$ și $(b, d) \cup (a, c]$.

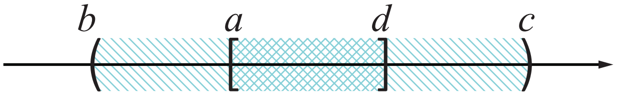
Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Reprezint, pe axa numerelor, cele patru numere ținând cont că dintre două numere, numărul mai mare se află totdeauna în dreapta.

Cum scriu:



Pas 2. Efectuez intersecția, folosind reprezentarea pe axă.



Pas 3. Scriu soluția problemei.

$$(b, c) \cap [a, d] = [a, d]$$

Pas 4. Efectuez reuniunea, folosind reprezentarea pe axă.

Pas 5. Scriu soluția problemei.

$$(b, d) \cup (a, c] = (b, c]$$

AUTOEVALUARE – În această unitate de învățare:

🟩 Am înțeles foarte bine ....

🟨 Îmi este neclar ....

🟥 Nu știu să .... / Nu am înțeles ....

Revezi lecțiile și exercițiile noțiunilor notate la culoarea galbenă. Discută cu un coleg/ o colegă sau cu profesorul despre ceea ce nu ai înțeles și ai completat la culoarea roșie.

6. Evaluare

Timp de lucru: 45 de minute
Din oficiu 10p

1. a) Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ se divide cu } 3\}$.
Dintre numerele 43 și 24 cel care aparține mulțimii A este *5p*

b) Cel mai mare număr natural din intervalul $(-1, 3)$ este egal cu *5p*
c) Cel mai mic număr întreg din intervalul $[-2, 3)$ este egal cu *5p*

2. Reprezintă pe axa numerelor intervalul $(-5, 2]$. *5p*

3. Efectuează, folosind reprezentarea pe axa numerelor:

a) $(-1, 5) \cap [2, 9)$; *5p*

b) $(-2, 3) \cup [1, 5)$. *5p*

4. Dintre numerele 1, 2 și 3, soluție pentru inecuația $x + 2 > 4$ este numărul *10p*

5. Scrie ca interval mulțimea $M = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < 2x + 1 \leq 7\}$. *10p*

6. Care dintre afirmațiile de mai jos sunt adevărate și care sunt false? *10p*

a) $2{,}5 \in (1, 3)$; b) $\sqrt{3} \in [1, 2)$;

c) $-\sqrt{5} \in [-2, 0]$; d) $\sqrt{130} \in (11, 12)$.

7. Rezolvă, în mulțimea numerelor reale, inecuația $|2x - 3| \leq 5$. *10p*

8. Determină valorile reale ale lui x pentru care $\dfrac{-5}{2x + 4} \geq 0$. *10p*

9. Ordonează crescător numerele a, b, c, d, știind că $(a, c) \cap (d, b) = (a, c)$. *10p*

7. Exersezi și progresezi

1. Mulțimea vocalelor din cuvântul *matematica* este .... .

2. Se consideră mulțimea $M = \{3, 6, 9, 12, 15\}$. Atunci A se poate scrie ca:
A. $\{x \in \mathbb{N} \mid 15 \vdots x\}$; B. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \vdots 3\}$; C. $\{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x \leq 15\}$; D. $\{x \in \mathbb{N}^* \mid x \vdots 3, x \leq 15\}$.

3. Un element al mulțimii $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 24 \vdots x\}$ este .... .

4. Cel mai mare număr natural din intervalul $(-3, 2)$ este .... .

5. Cel mai mic număr natural din intervalul $(-4, 4)$ este .... .

6. Cel mai mic număr întreg din intervalul $(-5, 3)$ este .... .

7. Mulțimea $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < 3x + 1 \leq 10\}$ scrisă sub formă de interval este .... .

8. O soluție a inecuației $4 - x > 3$ este .... .

9. Stabilește care afirmații sunt false și care sunt adevărate:
a) $-1 \in (0, 1)$; b) $2 \in (1, 3)$; c) $-5 \in [-5, 4)$; d) $-1 \in (-\infty, 2)$.

10. Unicul număr întreg din intervalul $[\sqrt{3}, \sqrt{5}]$ este .... .

11. Reprezintă pe axa numerelor reale următoarele intervale:
a) $(-3, -2]$; b) $[-2, 2]$; c) $\left(-1, \dfrac{2}{3}\right]$; d) $[1, +\infty)$; e) $(-\infty, 2]$.

12. Efectuează, folosind reprezentarea pe axa numerelor:
a) $(-1, 4] \cap (2, 5]$; b) $(-1, 1) \cap [-1, 2]$; c) $(-3, 3) \cup [-2, 4]$; d) $[-2, 1) \cup (-1, 2]$.

13. Notează cu A, dacă afirmația este adevărată și cu F, dacă este falsă. Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci:
a) $x \geq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1]$;
b) $x + 3 \geq 4 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$;
c) $2x > 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1]$;
d) $2x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$.

14. Determină toate numerele reale care mărite cu 10 depășesc numărul 30.

15. Determină toate numerele reale pentru care dublul lor mărit cu 32 este mai mic decât 2^7.

16. Determină toate numerele reale pentru care dublul lor mărit cu 2 este cel mult egal cu triplul lor

17. Într-un cartier, sunt unul lângă altul trei magazine, un magazin alimentar deschis în intervalul orar 8:00 - 20:00, un magazin de articole sportive deschis în intervalul orar 10:00 - 18:00 și o librărie deschisă în intervalul orar 9:00 - 16:00.

În ce interval orar se pot face cumpărături din toate cele trei magazine, la o singură ieșire din casă?

18. Rezolvă, în mulțimea numerelor reale, următoarele inecuații:
a) $|3x - 2| \leq 5$;
b) $|7x - 6| \leq 13$;
c) $|8x - 6| \leq 2$;
d) $|5x - 7| \leq 12$.

19. Determină valorile reale ale lui x pentru care:

a) $\dfrac{3}{x+2} \geq 0$; b) $\dfrac{-2}{2x-4} \geq 0$; c) $\dfrac{-3}{5x-1} \leq 0$; d) $\dfrac{x^2}{3-2x} \leq 0$.

20. Determină numerele reale a și b dacă:

a) $(-2, a] \cup [b, 4) = [-2, 4]$; b) $\left[a, \dfrac{5}{6}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, b\right] = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{6}\right]$; c) $[a, b] \cup (5, 7) = [5, 7]$.

21. Ordonează crescător numerele reale a, b, c, d în următoarele situații:

a) $(a, c) \cap (b, d) = (a, d)$;

b) $[a, b] \cap [c, d] = [a, b]$;

c) $(a, b) \cup [d, c] = (a, c]$.

22. Pentru fiecare număr natural nenul n, definim intervalul $I_n = \left[\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{n}\right]$.

a) Calculează $I_1 \cap I_2$; $I_2 \cap I_3$; $I_3 \cap I_4$;

b) Calculează $I_1 \cup I_2 \cup I_4$;

c) Arată că pentru orice n număr natural nenul $I_n \cap I_{n+1} \neq \emptyset$.

23. Scrie sub formă de interval mulțimea soluțiilor inecuațiilor:

a) $|3x-1| \leq 2$; b) $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{2x+1}{3}$; c) $\left|x - 2\sqrt{2}\right| \leq \sqrt{8}$; d) $\dfrac{-x+5}{-3} \geq 0$.

24. Rezolvă, în $\mathbb{R}$, inecuațiile: a) $\dfrac{4}{2-x} \leq 0$; b) $\dfrac{-2}{3x+1} \geq 0$; c) $\dfrac{x^2}{4-2x} \geq 0$; d) $\dfrac{x^2+1}{x-1} \leq 0$.

25. Determină toate valorile reale ale lui x pentru care următorii radicali sunt definiți:

a) $\sqrt{x-1}$;

b) $\sqrt{3x+2}$;

c) $\sqrt{7x-6}$;

d) $\sqrt{\dfrac{2}{2-x}}$;

e) $\sqrt{\dfrac{x^2+1}{1-x}}$.

26. Rezolvă inecuațiile și scrie mulțimea soluțiilor sub formă de interval:

a) $x^2 \leq 4$;

b) $(2x+3)^2 \leq 9$;

c) $(-x+3)^2 \leq 16$;

d) $(3x-1)^2 < 25$.

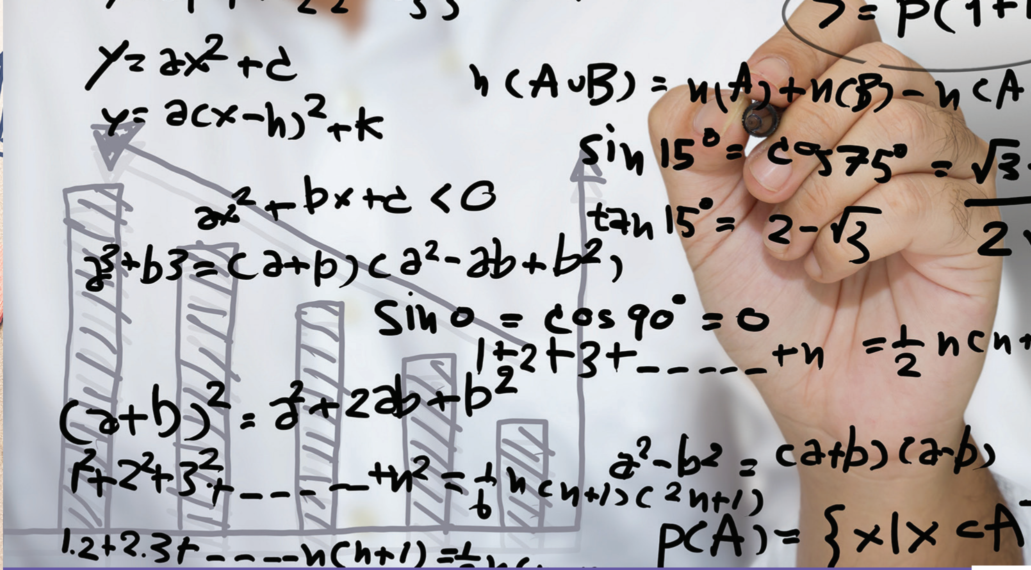
27. Petra scrie un număr natural din intervalul $(2, 15)$. Dragoș scrie un număr natural din intervalul $[13, 23]$, iar Anastasia scrie un număr natural din intervalul $(1, 14)$. Care este probabilitatea ca toți trei să scrie același număr natural?

28. Mulțimile date printr-o proprietate a elementelor au aplicabilitate pe Internet. Filtrele motoarelor de căutare de pe Internet sunt de fapt proprietăți ale elementelor unei mulțimi.

Să presupunem că dorești să achiziționezi de pe Internet un laptop cu un display cuprins între 13 și 13,9 inch, fără ecran tactil, la un preț mai mic de 1 000 de lei.

a) Alege două magazine virtuale în care poți cumpăra acest tip de produs și notează-ți pe caiet câte laptopuri erau inițial în categoria laptopuri, câte erau după introducerea dimensiunii ecranului, apoi câte au mai rămas după ce ai introdus și condiția să nu aibă un ecran tactil, iar în final câte laptopuri au rămas în căutarea ta după ce ai introdus și limita de preț.

b) Compară rezultatele obținute pentru fiecare magazin virtual.



III

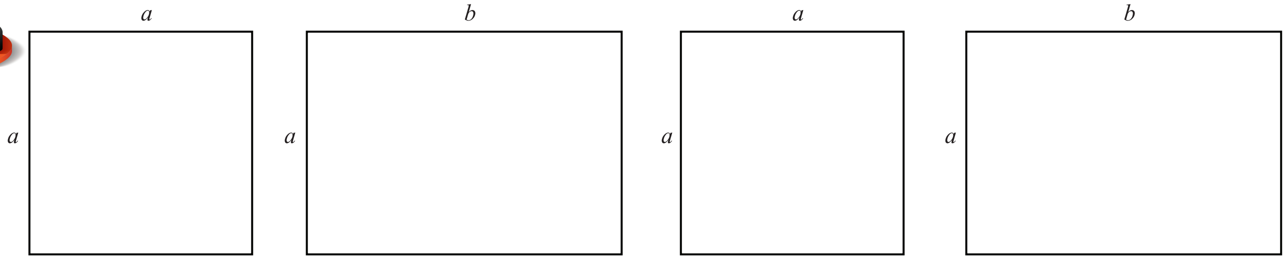
Calcul algebric în $\mathbb{R}$. Operații cu numere reale reprezentate prin litere

1. Operații cu numere reale exprimate prin litere (adunare și scădere); reducerea termenilor asemenea

Observă și descoperă!

1. Pentru a arăta cum putem exprima perimetrul sau aria unei figuri geometrice, în funcție de lungimile diferitelor elemente luate în calcul, folosim litere.

Completează spațiile punctate pentru a determina perimetrul sau aria corespunzătoare fiecărei figuri geometrice din *Figura 1*.



$P = a + a + a + a = ...$ $P = a + b + a + b = ...a + ...b$ $\mathcal{A} = a \cdot a = ...$ $\mathcal{A} = ...$

Figura 1 – Perimetrul și aria pătratului și dreptunghiului

2. Dacă vrem să scriem că un număr natural n este multiplu al lui 3, cel mai simplu este să scriem $n = 3k$, înțelegând prin aceasta $n = 3 \cdot k$, unde k este un număr natural, deoarece un multiplu de 3 se împarte exact la 3, adică dă restul 0.

Cum vei scrie că un număr natural este multiplu al lui 5?

3. Pentru a evidenția că o sumă de bani se dublează vom scrie $2x$, unde x reprezintă suma inițială de bani.

Cum vei scrie că un număr real s-a mărit de patru ori?

4. Pentru a sugera că am luat o treime dintr-un număr natural vom scrie $\frac{1}{3}x$, unde x reprezintă numărul inițial.

Cum vei scrie că un număr real s-a micșorat cu 5?

5. Pentru a exprima suma de bani care trebuie plătită pentru 2 kg de mere și 3 kg de pere vom scrie $S = 2x + 3y$, unde x reprezintă prețul unui kilogram de mere și y reprezintă prețul unui kilogram de pere. Modul de calcul al lui S rămâne același, indiferent de preț.

Cum vei scrie suma de bani pe care ar trebui să o plătești pentru 4 caiete și 3 creioane?

Important

- Uneori numerele reale se pot exprima și cu ajutorul literelor. Literele țin locul unor numere a căror valoare este necunoscută.
- O expresie formată din numere și litere se numește **expresie algebrică**.

Exemple: $3k$, $2x$, $2x + 3y$, $x - 5$.

- Putem nota expresia algebrică cu E urmată de paranteze între care se trec literele care apar în expresie.

Exemple: $E(x) = x - 5$, *citim „E de x este egal cu x minus 5”. Astfel arătăm că expresia este dependentă de x.* $E(x,y) = 2x + 3y$, *citim „E de x și y este egal cu doi x plus trei y”. Astfel arătăm că expresia este dependentă de x și y.*

- Cea mai simplă expresie algebrică este formată dint-un număr și una sau mai multe variabile (litere) legate numai prin operație de înmulțire.

Exemplu:

$$\text{coeficient} \nearrow 3x^2y \nwarrow \text{partea literală}$$

- Dacă o astfel de expresie algebrică are coeficientul 1, acesta nu se mai scrie, iar pentru coeficientul -1 păstrăm numai semnul (în loc de $1xy^3$ scriem xy^3, iar în loc de $-1x^2y^3$ scriem $-x^2y^3$).
- Într-o expresie algebrică variabilele (literele) pot fi înlocuite cu numere concrete și apoi efectuate calculele. Spunem, în acest caz, că am aflat **valoarea numerică a expresiei.**

Exemplu: Calculați valoarea numerică a expresiei $E(x,y) = 2x^2y + 3xy - 5xy^2$, *pentru* $x = -1$ *și* $y = 2$.

Cum gândesc: Pas 1. Voi înlocui pe x cu -1 și pe y cu 2.

Cum scriu: $E(-1,2) = 2 \cdot (-1)^2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot 2 - 5 \cdot (-1) \cdot 2^2$

Pas 2. Voi efectua calculele respectând ordinea operațiilor, adică mai întâi ridicarea la putere.

$$E(-1,2) = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot 2 - 5 \cdot (-1) \cdot 4$$

Pas 3. Efectuez acum înmulțirile respectând regula semnelor.

$$E(-1,2) = 4 - 6 + 10$$

Pas 4. Efectuez adunările și scăderile în ordinea în care sunt scrise, de la stânga spre dreapta.

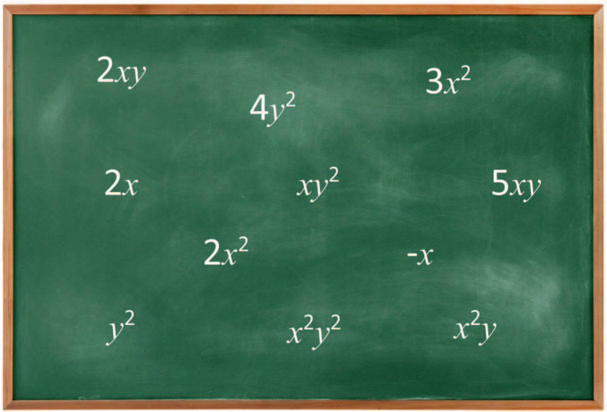
$$E(-1,2) = -2 + 20 = 18$$

Valoarea numerică a expresiei $E\,(x,y)$ pentru $x = -1$ și $y = 2$ este 18.

Observă și descoperă!

6. Pentru a ieși din Camera enigmelor, trebuie să completezi cu numere potrivite căsuțele aflate sub tablă. Descoperă numerele care ar trebui scrise în căsuțe.

(1735)



☐ x^2 ☐ y^2 ☐ xy ☐ x

7. Calculează cât mai rapid $173 \cdot 113 - 13 \cdot 173$.

8. Justifică, cu ajutorul factorului comun, egalitatea: $3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$.

9. Marchează cu X căsuța corespunzătoare răspunsului corect.
a) Este posibil să scriem suma $3a^2 + 7a^2$ ca un singur termen?
DA ☐ NU ☐
b) Suma $2x + 3y$ se poate scrie sub forma unui singur termen?
DA ☐ NU ☐

Important

• Într-o expresie algebrică, dacă doi termeni au aceeași parte literală (aceleași litere cu aceeași exponenți) ei se numesc **termeni asemenea**.

Exemple: Termenii $2x^2y$ *și* $-5x^2y$ *sunt termeni asemenea. Termenii* $2x^2y$ *și* $3xy$ *nu sunt termeni asemenea.*

• Termenii asemenea se pot aduna sau scădea după următoarea regulă:
Se adună sau se scad coeficienții și se transcrie partea literală.

Exemplu: În expresia algebrică $E(x,y) = 2x^2y + 3xy - 5x^2y$ *putem aduna termenii asemenea* $2x^2y$ *și* $-5x^2y$ *și obținem* $-3x^2y$ *(deoarece* $2 - 5 = -3$*, iar partea literală se transcrie). După această operație expresia algebrică se scrie* $E(x,y) = -3x^2y + 3xy$*.*

• Deoarece în cazul expresiilor algebrice adunăm sau scădem numai termenii asemenea, astfel încât din doi sau mai mulți termeni asemenea rămâne unul singur, în loc să spunem **„adunăm sau scădem”** vom spune **„reducem termenii asemenea”**.

Exemplu: Să se reducă termenii asemenea din expresia algebrică:
$E(x,y) = 4x^2y^3 + 2xy^2 - x^2y + 3xy^2 - 2x^2y^3 - 3xy^2$.

Cum gândesc: Pas 1. Identific în expresia algebrică dată termenii asemenea și îi subliniez în același fel.

Cum scriu: $E(x,y) = \underline{4x^2y^3} + \underline{\underline{2xy^2}} - x^2y + \underline{\underline{3xy^2}} - \underline{2x^2y^3} - \underline{\underline{3xy^2}}$

Pas 2. Între termenii asemenea descoperiți există termeni în care coeficienții sunt numere opuse? Dacă da, suma lor este zero și îi putem elimina. În exemplul nostru avem termenii $3xy^2$ și $-3xy^2$.

$$E(x,y) = \underline{4x^2y^3} + \underline{\underline{2xy^2}} - x^2y + \cancel{\underline{\underline{3xy^2}}} - \underline{2x^2y^3} - \cancel{\underline{\underline{3xy^2}}}$$

Pas 3. Reducem acum termenii asemenea rămași. Din $4x^2y^3$ și $-2x^2y^3$ rămânem cu $2x^2y^3$ deoarece $4 - 2 = 2$. Nu mai avem alți termeni asemenea de redus.

$$E(x,y) = 2x^2y^3 + 2xy^2 - x^2y$$

Exersează!

10. Se consideră următorul enunț: „Pentru calcularea perimetrului unui triunghi echilateral folosim relația $P = 3a$, iar pentru calcularea ariei unui triunghi echilateral avem relația $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$”.
Care sunt expresiile algebrice din acest enunț?

11. Scrie ca expresie algebrică următoarele enunțuri:

a) Un număr real mărit de 10 ori;

b) Un număr real ridicat la puterea a patra se micșorează cu dublul numărului;

c) Din triplul unui număr real se scade pătratul său.

12. Maria dorește să cumpere 2 caiete de același fel cu prețul de 3 lei pentru un caiet și 5 pixuri identice cu prețul de 2 lei pentru un pix.

a) Scrie, într-un exercițiu, suma pe care Maria trebuie să o plătească pentru cele 2 caiete și 5 pixuri.

b) Scrie, ca expresie algebrică, suma pe care Maria trebuie să o plătească pentru c caiete și p pixuri.

13. Scrie, ca expresie algebrică, distanța parcursă de un automobil care se deplasează x ore cu viteza de 60 km/h și y ore cu viteza de 80 km/h.

14. Se consideră expresia algebrică $E(x) = 3x^2 - 5x + 2$. Determină valoarea numerică a acestei expresii, pentru:

a) $x = 0$; b) $x = 1$; c) $x = -2$; d) $x = 3$; e) $x = \frac{1}{2}$; f) $x = -\frac{2}{3}$; g) $x = \sqrt{3}$; h) $\sqrt{2}$.

15. Se consideră expresia algebrică $E(x,y) = 6x^2y + 6xy^2 + 1$. Calculează:

a) $E(1,2)$; b) $E(-1,1)$; c) $E(2,y)$; d) $E(x,2)$; e) $E(y,x)$.

16. Identifică în următoarele expresii termenii asemenea și subliniază-i în același fel:

a) $7x^2 + 49x - 12 - 7x - 49x^2 + 15$;

b) $x^2y^2 + xy + 1 - x^2y - xy^2 + 13x^2y^2 - 7xy^2 + 8xy$;

c) $y^3 - 2y^2 + 5y^3 - y + 2 - 3y^2 + 7y$;

d) $3x^3y + 6xy^3 - 7x^2y^2 + x^3y^3 - 8xy^3 + 2x^3y + 15xy$.

Model: $\underline{7x^2} + \underline{\underline{49x}} - \underleftrightarrow{12} - \underline{\underline{7x}} - \underline{49x^2} + \underleftrightarrow{15}$.

17. Redu termenii asemenea în următoarele cazuri:

a) $7x - 3x + 5x$;

b) $-a - a - 3a + 8a$;

c) $4x^2 - x^2 + 2x^2$;

d) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x - \frac{7}{8}x$;

e) $3x^2\sqrt{5} + x^2\sqrt{5} - 2x^2\sqrt{5}$.

18. Redu termenii asemenea în următoarele cazuri:

a) $3x - 5y + 3y - x$;

b) $4x^2 + 3x + 2 - 3x^2 - 2x + 3$;

c) $7a + 3b - 5b - 8a$;

d) $10x^2 + 5x - 1 - 7x^2 - 3x + 8$;

e) $-6ax - 0{,}2a^2 + 2x + 1{,}2a^2 + 3ax - 2x$;

f) $2x^2 + y^2 - 4xy - 4y^2 + xy - x^2$;

g) $-x^3y + x^2y^2 + x^3y + 2xy - x^2y^2 + 1 - 2xy$;

h) $2x^3 - y^3 + 3x^2 + y^3$.

19. În *Figura 2* este schița unui teren, în formă de dreptunghi, care s-a împărțit în 6 parcele fiecare în formă de dreptunghi.

Exprimă, cu ajutorul lui x și y lungimea unui gard de plasă care înconjoară terenul și delimitează cele 6 parcele.

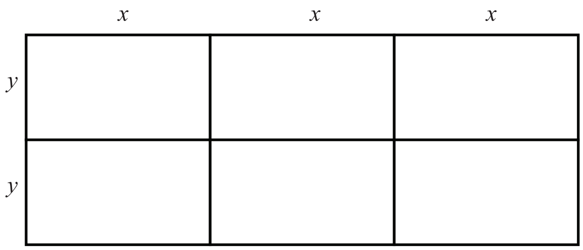


Figura 2 - Schița unui teren

2. Operații cu numere reale exprimate prin litere (înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere)

Amintește-ți!

1. Calculează:

a) $5^7 \cdot 5^3$;

b) $3^{12} : 3^4$;

c) $(3^5)^3$.

Indicii: La împărțirea a două puteri care au aceeași bază se scad exponenții ($5^{15} : 5^7 = 5^8$).
La înmulțirea a două puteri care au aceeași bază se adună exponenții ($2^5 \cdot 2^7 = 2^{12}$).
Pentru a ridica o putere la altă putere se înmulțesc exponenții ($(2^4)^5 = 2^{20}$).

2. Pentru a calcula $5 \cdot (4 + 7)$ putem proceda în două moduri. Un mod este acela în care calculăm suma din paranteză și apoi înmulțim cu 5 rezultatul obținut.

Care este celălalt mod prin care putem calcula $5 \cdot (4 + 7)$?

Important

• Două expresii algebrice formate fiecare din câte un singur termen se înmulțesc folosind următoarea regulă:

Înmulțim coeficienții între ei, respectând regula semnelor, și literele identice între ele, respectând regula de înmulțire a puterilor cu aceeași bază.

Exemplu:

$-3 \cdot (-2) = 6$

$$-3x^3y \cdot (-2x^2) = 6x^5y$$

$x^3 \cdot x^2 = x^5$

• Două expresii algebrice formate fiecare din câte un singur termen se împart folosind următoarea regulă:

Împărțim coeficienții între ei, respectând regula semnelor, și literele identice între ele, respectând regula de împărțire a puterilor cu aceeași bază.

Exemplu:

$x^5 : x^2 = x^3$

$$-12x^5y : 3x^2y = -4x^3$$

y : y = 1 Nu se mai scrie

$-12 : 3 = -4$

• O expresie algebrică formată dintr-un singur termen se ridică la o putere după următoarea regulă:

Se ridică la acea putere coeficientul, respectând regula semnelor, și fiecare literă în parte, respectând regula de ridicare la putere a unei puteri.

Exemplu:

$(x^3)^3 = x^9$

$$(-2x^3y^2)^3 = -8x^9y^6$$

$(-2)^3 = -8$

$(y^2)^3 = x^6$

- O expresie algebrică formată dintr-un singur termen se înmulțește cu o expresie algebrică cu mai mulți termeni folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere, adică $a(b+c) = ab + ac$ și $a(b-c) = ab - ac$.

Exemplu:

$$2x^2 \cdot 3x^3 = 6x^5 \qquad 2x^2 \cdot (-2xy) = -4x^3y \qquad 2x^2 \cdot y^2 = 2x^2y^2$$

$$2x^2(3x^3 - 2xy + y^2) = 6x^5 - 4x^3y + 2x^2y^2$$

- O expresie algebrică formată din mai mulți termeni se împarte la o expresie algebrică formată dintr-un singur termen folosind distributivitatea împărțirii față de adunare și scădere, adică $(b+c) : a = b : a + c : a$ și $(b-c) : a = b : a - c : a$.

Exemplu:

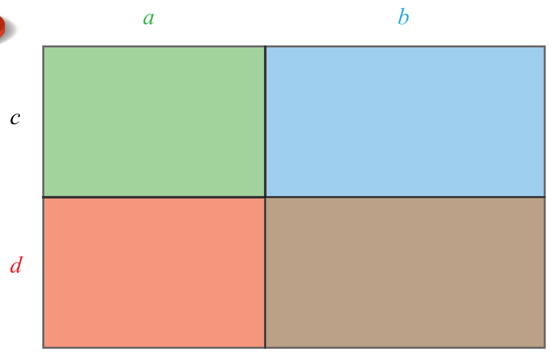
$$12x^3 : 4x^2 = 3x \qquad -20x^4y : 4x^2 = -5x^2y \qquad 4x^2y^2 : 4x^2 = y^2$$

$$(12x^3 - 20x^4y + 4x^2y^2) : 4x^2 = 3x - 5x^2y + y^2$$

- Pentru a înmulți două expresii algebrice, formată fiecare din mai mulți termeni, se înmulțește fiecare termen al uneia dintre expresii cu toți termenii celeilalte expresii și apoi se reduc termenii asemenea, dacă aceștia există.

Justificare: Aria dreptunghiului mare se poate calcula în două moduri. O dată cu formula $L \cdot l$ și atunci $\mathcal{A} = (a+b)(c+d)$.

Pe de altă parte, ca sumă de arii. Aria dreptunghiului mare este aria dreptunghiului verde plus aria dreptunghiului portocaliu plus aria dreptunghiului albastru plus aria dreptunghiului maro, adică $\mathcal{A} = ac + ad + bc + bd$.



$$\mathcal{A} = \mathcal{A} + \mathcal{A} + \mathcal{A} + \mathcal{A}$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemplu:

$$\boxed{2x \cdot 3x = 6x^2} \quad \boxed{2x \cdot (-2) = -4x}$$

$$(2x+3)(3x-2) = 6x^2 - 4x + 9x - 6 = 6x^2 + 5x - 6$$

$$\boxed{3 \cdot 3x = 9x} \quad \boxed{3 \cdot (-2) = -6}$$

Exersează!

3. Calculează:

a) $5x \cdot 2x$;
b) $-3x^2 \cdot 2x$;
c) $4y^2 \cdot 3y^4$;
d) $3xy \cdot (-5y^2)$;
e) $xy \cdot 2x^2z$;
f) $6x^3 : (2x^2)$;
g) $3xy^2 : (3xy)$;
h) $-18x^2y^3 : (6xy^2)$;
i) $30a^5 : (-6a^3)$;
j) $-40ab^2 : (-10ab)$;
k) $(2x^3)^2$;
l) $(-2xy^2)^4$;
m) $\left(x^3\sqrt{5}\right)^2$;
n) $(-x^2y^3)^3$.

4. Calculează:

a) $(2x^2)^3 : (4x^4)$;
b) $3xy \cdot (4x)^2$;
c) $16x^4 : (-4x^2)^2$;
d) $(4x^2y^2)^3 : (-8x^3y^5)$;
e) $9a^2b^3 : (3ab^2) \cdot (-3ab)$;
f) $(4x^2)^2 : (2x)^2 : x^2$.

5. Calculează:

a) $3\,(x-2)$;
b) $2x\,(x+1)$;
c) $3x\,(x^2-x+1)$;
d) $2x^5\,(x^3-3x^2+3x-1)$;
e) $-5x\,(1-2x)$;
f) $-x^2\,(x^3-2x^2+x)$;
g) $3xy\,(x^2-2xy-y^2+1)$;
h) $2x^2y\,(x^3+xy^2-xy-xy^2+y^2-3)$.

6. Calculează:

a) $(x^3-2x^2-x) : x$;
b) $(12x^6+18x^4-6x^3) : (6x^3)$;
c) $(4xy^3-2x^2y-4xy) : (2xy)$;
d) $(3xy^3-6xy^2-3y2) : (3y^2)$;
e) $(14x^3y^2-7x^3y) : (7x^3y)$;
f) $(2xyz+4x^2z-6xz^2) : (2xz)$.

7. Calculează, reducând termenii asemenea:

a) $(x+2)(x+3)$;
b) $(x-1)(x-4)$;
c) $(x-3)(x+4)$;
d) $(x+5)(x-1)$;
e) $(2x+1)(3x+2)$;
f) $(4x-1)(5x+2)$;
g) $(1-x)(3x+1)$;
h) $(4x+1)(5x-2)$.

8. Calculează, reducând termenii asemenea:

a) $(x+1)\,(x^2-x+1)$;
b) $(x-2)\,(x^2+2x+4)$;
c) $(x-y)\,(x^2+xy+y^2)$;
d) $(x+1)\,(x^3-x^2+x-1)$;
e) $(x-1)\,(x^3+x^2+x+1)$.

9. Rezolvă, în mulțimea numerelor reale, inecuațiile:

a) $(x-2)(x-3) \leq x(x-1)$;
b) $3x(2x-5) \geq x(6x-7)$;
c) $2x(1-x)+4x(2x+1)+3x(5-2x) \leq 0$;
d) $(2x+1)(12x-5) \leq (4x-3)(6x+4)$;
e) $(x+2)(x+3)+(3x+1)(2x+1) \geq 7(x+1)(x+2)$.

10. Lucrați în perechi. Scrieți în două moduri, sub forma unor expresii algebrice, ariile dreptunghiurilor exterioare din *Figura 3.* Compară rezultatele cu partenerul de echipă.

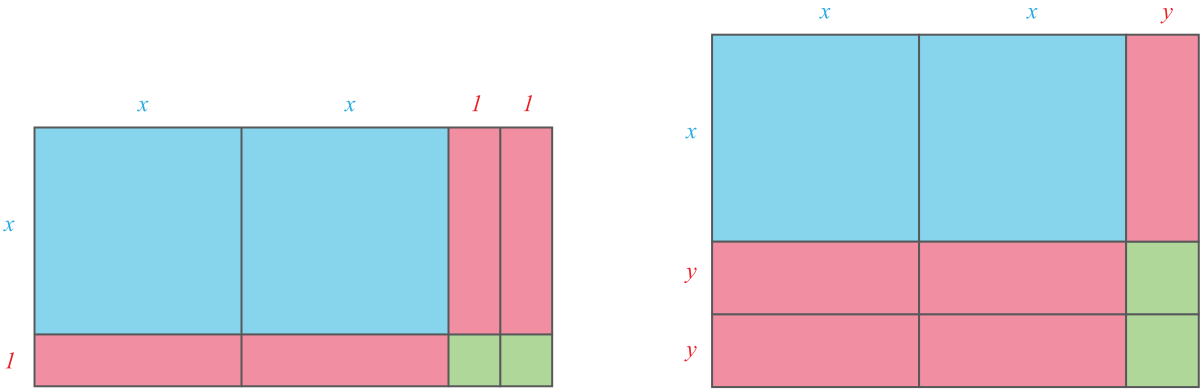


Figura 3 – Arii ale dreptunghiurilor

11. În *Figura 4*, $ABEF$ și $GHIJ$ sunt pătrate. Determină numerele naturale nenule x pentru care diferența dintre aria dreptunghiului $ABCD$ și aria trapezului $GHKJ$ este cel mult egală cu 40 m^2.

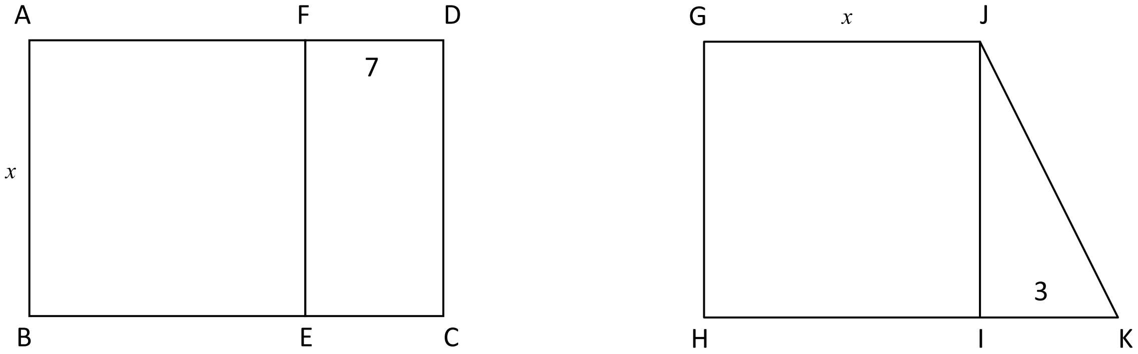


Figura 4 – Pătrate complicate

12. În *Figura 5* este schița unui teren împărțit în patru parcele. Pe parcela A se cultivă orz. Pe parcela B se cultivă grâu. Pe parcela C se cultivă rapiță, iar pe parcela D floarea soarelui.

a) Exprimă, cu ajutorul lui x și y ariile fiecărei parcele.

b) Determină, în două moduri, aria întregului teren.

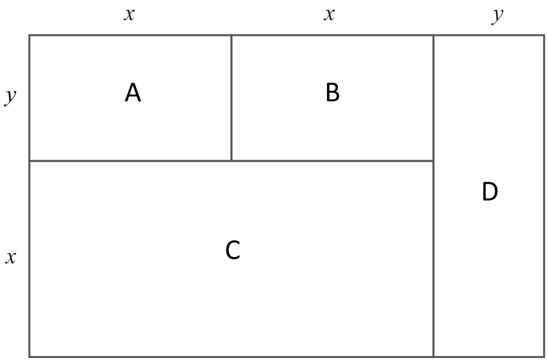


Figura 5 – Schița unui teren parcelat

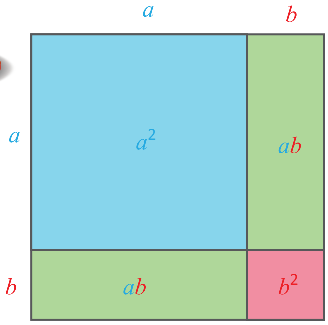
3. Formule de calcul prescurtat

Observă și descoperă!

În *Figura 6*, aria pătratului mare este formată din aria pătratului albastru, ariile celor două dreptunghiuri verzi și aria pătratului roșu. Așadar $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Știm că $x^2 = x \cdot x$ și atunci, pentru a calcula $(a+b)^2$, vom proceda astfel: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$.

Cum $ab = ba$, vom avea $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.



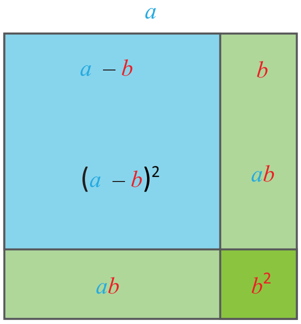
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Figura 6 – Arii și pătrate

1. Calculează $(a-b)^2$, folosind afirmația $x^2 = x \cdot x$.

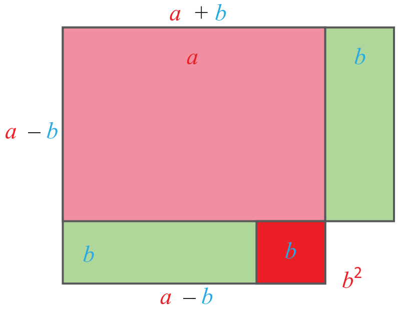
2. Calculează $(a+b)(a-b)$.

3. Descrie cum se poate ajunge la rezultatele obținute la 1 și 2 folosind *Figurile 7 și 8*.



$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Figura 7 - Arii și pătrate



$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Figura 8 - Arii și dreptunghiuri

Important

- Atunci când avem de efectuat calcule cu expresii algebrice și nu numai, pentru a scurta timpul de lucru este util să folosim anumite relații adevărate, pe care le considerăm cunoscute și pe care le vom numi **formule de calcul prescurtat**.
- O parte dintre formulele de calcul prescurtat sunt:

▷ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (pătratul sumei)

Exemplu: $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$.

▷ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (pătratul diferenței)

Exemplu: $(3x-2)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4$.

▷ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (produs dintre sumă și diferență)

Exemplu: $(2x+3y)(2x-3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$.

- Formulele anterioare pot fi folositoare și pentru calcule numerice rapide.

Exemplu: Calculează: a) 54^2; b) $44 \cdot 36$.

Soluție:

a) Putem scrie $54^2 = (50+4)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 4 + 4^2 = 2\,500 + 400 + 16 = 2\,916$.

b) Putem scrie $44 \cdot 36 = (40+4)(40-4) = 40^2 - 4^2 = 1\,600 - 16 = 1\,584$.

Exersează!

4. Calculează după model:

a) 51^2;

b) 23^2;

c) 49^2;

d) 41^2;

e) 38^2;

f) 104^2.

Model: $51^2 = (50+1)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 1 + 1^2 = 2\,500 + 100 + 1 = 2\,601$.

5. Calculează, folosind formula $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

a) $(x+1)^2$;

b) $(x+2)^2$;

c) $(x+3)^2$;

d) $(x+5)^2$.

6. Calculează, folosind formula $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

a) $(x-2)^2$;

b) $(x-1)^2$;

c) $(x-4)^2$;

d) $(x-6)^2$.

7. Calculează după model:

a) $28 \cdot 32$;

b) $49 \cdot 51$;

c) $37 \cdot 23$;

d) $102 \cdot 98$;

e) $105 \cdot 95$;

f) $1\,980 \cdot 2\,020$.

Model: $28 \cdot 32 = (30-2)(30+2) = 30^2 - 2^2 = 900 - 4 = 896$.

8. Calculează, folosind formula $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$:

a) $(x+1)(x-1)$;

b) $(x+2)(x-2)$;

c) $(x+3)(x-3)$;

d) $(x+5)(x-5)$.

9. Calculează, folosind formula potrivită:

a) $(2x-1)^2$;

b) $(2x+3)^2$;

c) $(4x+1)^2$;

d) $(2x-1)(2x+1)$;

e) $(3x+2)(3x-2)$;

f) $(x-\sqrt{3})^2$;

g) $(x\sqrt{2}-1)^2$;

h) $(2x+\sqrt{2})^2$.

10. Calculează:

a) $(2+\sqrt{3})^2$;

b) $(2\sqrt{3}-1)^2$;

c) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$;

d) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$;

e) $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$;

f) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$;

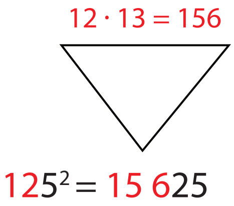
g) $(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2$;

h) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})$.

11. Problemă rezolvată. Numărul 175 se poate scrie $17 \cdot 10 + 5$. În general, orice număr care are ultima cifră 5 se poate scrie $\overline{A5} = A \cdot 10 + 5$. Arată că $\overline{A5}^2 = \overline{A(A+1)25}$, unde A este numărul inițial fără ultima cifră, iar $\overline{A(A+1)}$ reprezintă produsul dintre A și $A+1$.

Soluție: Avem $\overline{A5}^2 = (10A+5)^2 = 100A^2 + 100A + 25 = 100A(A+1) + 25 = \overline{A(A+1)25}$.

Exemplu:



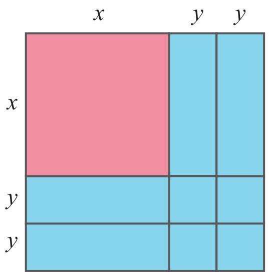
12. Calculează cât mai rapid:

a) 75^2;
b) 95^2;
c) 145^2;
d) 205^2;
e) 395^2;
f) $2\,005^2$.

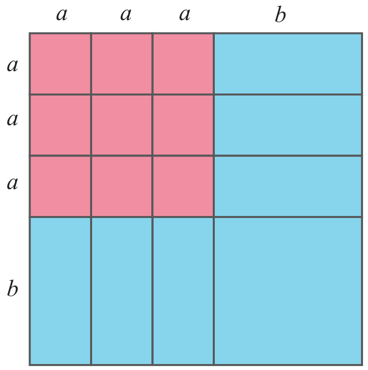
13. Scrie, sub forma cea mai simplă, următoarele expresii algebrice:

a) $E(x) = (x+2)^2 + (x-2)(x+2)$;
b) $E(x) = (x-3)(x+3) - (x-4)^2$;
c) $E(x) = (2x-5)^2 + (x+1)^2 - (x\sqrt{5}+3)(x\sqrt{5}-3)$;
d) $E(x) = 2(x-6)^2 + (x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3}) - (2x-1)^2$;
e) $E(x) = 3(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) - (x+\sqrt{2})^2 - (x-\sqrt{2})^2$;
f) $E(x) = (x^2-2)^2 - (x-1)(x+1)(x^2+1) + 4(x-3)^2$;
g) $E(x) = (x+2)(x^2+4)(x-2) - (2-x^2)^2$;
h) $E(x) = (x-3)(x^2+9)(x+3) - (x^2+1)(1+x)(x-1) + 8$.

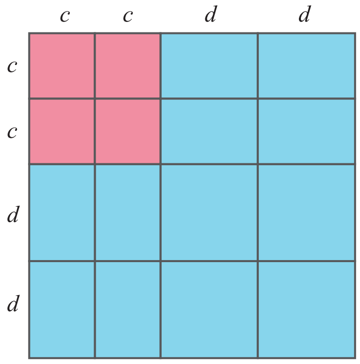
14. Pentru fiecare din figurile de mai jos, scrie, în două moduri, aria porțiunii colorate cu albastru și verifică dacă cele două rezultate sunt egale.



A



B



C

Model: A.

Modul 1. Aria porțiunii colorate cu albastru este egală cu aria pătratului mare minus aria pătratului colorat cu culoarea roșie. $A_{albastru} = (x+2y)^2 - x^2$.

Modul 2. Aria porțiunii colorate cu albastru este formată din 4 dreptunghiuri cu laturile x și y și 4 pătrate cu latura y. $A_{albastru} = 4xy + 4y^2$

Verific dacă $(x+2y)^2 - x^2 = 4xy + 4y^2$.

Așadar, $(x+2y)^2 - x^2 = x^2 + 4xy + 4y^2 - x^2 = 4xy + 4y^2$.

4. Recapitulare

1. Se consideră următorul enunț: „Numărul băieților dintr-o clasă este x, iar numărul fetelor este cu 4 mai mare." a) Scrie ca expresie algebrică numărul fetelor din această clasă. b) Scrie ca expresie algebrică numărul elevilor din această clasă.

2. Se consideră următorul enunț: „Dacă într-o clasă elevii se așază câte doi într-o bancă rămân 3 elevi în picioare." Scrie ca expresie algebrică numărul elevilor din clasă.

3. Transformă în expresii algebrice următoarele enunțuri: a) Din pătratul unui număr real se scade triplul său; b) La un număr real se adaugă cubul său; c) Într-o sală de spectacole sunt rânduri de 20 de locuri și rânduri de 24 de locuri. Care este numărul total de locuri din sala de spectacol?

4. Scrie trei termeni asemenea cu termenul $5x^2y^3$.

5. Se consideră expresia algebrică $E(x) = x^2 - x + 1$.

a) Valoarea numerică a acestei expresii pentru $x = 1$ este:

A. 2; B. -2; C. 1; D. -1.

b) Valoarea numerică a acestei expresii pentru $x = -1$ este:

A. 2; B. -2; C. -1; D. 3.

6. Se consideră expresia algebrică $E(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 10$. Calculează valoarea numerică a acestei expresii în următoarele cazuri:

a) $x = 0$; b) $x = 2$; c) $x = -1$; d) $x = \frac{1}{6}$; e) $x = -\frac{1}{2}$; f) $x = \sqrt{3}$; g) $x = -\sqrt{2}$.

7. Se consideră expresia algebrică $E(x) = x+x+x-x$. După reducerea termenilor asemenea expresia devine:

A. $E(x) = 4x$; B. $E(x) = -x^4$; C. $E(x) = 2x$; D. $E(x) = 0$.

8. Se consideră expresia algebrică $E(x) = 2x - 5 + x^2 - x - x^2 + 2$. După reducerea termenilor asemenea expresia devine:

A. $E(x) = 3x + 2x^2 - 3$; B. $E(x) = x - 3$; C. $E(x) = x + 7$; D. $E(x) = x + 3$.

9. Să se reducă termenii asemenea din următoarele expresii algebrice:

a) $E(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x - 5 - 4x^2 + 4x - 3x^3$;
b) $E(x) = 4x^2 + 4x + 4 + 2x^2 - 6x - 4$;
c) $E(x,y) = x^2y - 2xy - 3xy^2 + 3xy^2 - x^2y + 3xy$;
d) $E(x,y) = x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 - y^3$;
e) $E(x,y) = 3x^4y + 4x^3y^2 + 5x^2y^2 + 6xy^4 - 7xy^4 - 8x^2y^3 - 9x^3y^2 - 10x^4y$;
f) $E(x,y) = 5x^2 + 6xy + 7y^2 + 12x^2y^2 + 5 - 12x^2 - 6xy - 7y^2 + 2 - 12x^2y^2$.

10. Să se aducă la cea mai simplă formă următoarele expresii algebrice:

a) $2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (x^3 - 4x^2 + 6x - 2)$;
b) $5\left(y^3 - y^2 + 2y - 1\right) - 2\left(y^3 + 2y^2 + 5y - 5\right)$;
c) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3\left(x^2 + x - 2\right)$;
d) $(x - 2)\left(x^2 - x - 1\right) - (x - 3)(x^2 - 1)$;
e) $(2x + 3)\left(4x^2 - 6x + 9\right) - \left(8x^3 - 27\right)$;
f) $3x\left(x^2 - x - 1\right) + 2x^2\left(x + 2\right) - 5\left(x^3 - x^2 + x + 1\right)$;
g) $(3x + 1)\left(9x^2 - 3x + 1\right) - 27x^3$.

11. Calculează:

a) $(x + 2y)\,(x^2 - 2xy + 4y^2) - 8y^3$;
b) $(x - 2)\,(x^3 + 2x^2 + 4x + 8) - (x - 2)(x + 2)\,(x^2 + 4)$;
c) $(x - 3)\,(x - 2) + (x + 4)\,(x - 1) - (2x - 1)\,(x - 2)$;
d) $(x - 5)\,(x + 2) - 2\,(x - 1)\,(x + 3) + x^2$.

12. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile algebrice următoare, apoi să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $E(x) = 0$.

a) $E(x) = (x - 5)^2 - (x + 2)\,(x - 2)$;
b) $E(x) = (2x - 1)\,(2x + 1) - (2x - 5)^2$;
c) $E(x) = 3\,(x - 2)^2 - (2x + 3)^2 + (x - 1)\,(x + 1)$;
d) $E(x) = 5\,(x + 2)\,(x - 2) + (2x - 1)^2 + 9\,(1 - x)\,(1 + x)$.

13. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile algebrice următoare, apoi să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $E(x) \leq 0$.

a) $E(x) = (x - 2)^2 - (x + 5)\,(x - 2)$;
b) $E(x) = (2x - 1)^2 - (2x + 1)\,(2x - 5)$;
c) $E(x) = 3\,(x + 2)^2 - (2x - 3)^2 + (x - 3)\,(x + 3)$;
d) $E(x) = 5\,(x + 1)\,(x - 1) + (2x + 1)^2 + 9\,(1 - x)\,(1 + x)$.

14. Problemă rezolvată: Un triunghi dreptunghic are perimetrul egal cu 12 cm și ipotenuza de 5 cm. Determină aria triunghiului.

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Trebuie să determin aria unui triunghi și acesta este un triunghi dreptunghic. Aria triunghiului dreptunghic este jumătate din produsul lungimilor catetelor.

Cum scriu: $\mathcal{A} = \dfrac{c_1 \cdot c_2}{2}$

Pas 2. Din ipoteza problemei știu că perimetrul este 12 cm, iar ipotenuza este 5 cm. Atunci, suma catetelor este 7 cm.

Din $c_1 + c_2 + i = 12$ și $i = 5$ rezultă $c_1 + c_2 = 7$ (1).

Pas 3. Triunghiul fiind dreptunghic, pot aplica teorema lui Pitagora.

Din teorema lui Pitagora, ${c_1}^2 + {c_2}^2 = 25$ (2).

Pas 4. Legătura dintre $c_1 + c_2$ și ${c_1}^2 + {c_2}^2$ o pot realiza prin formula $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Avem $(c_1 + c_2)^2 = {c_1}^2 + 2c_1c_2 + {c_2}^2$ și din (1) și (2) rezultă $7^2 = 25 + 2c_1c_2$.

Pas 5. Acum pot determina produsul c_1c_2.

$2c_1c_2 = 49 - 25$, adică $c_1c_2 = 12$.

Pas 6. Cu aceasta pot determina aria triunghiului:

$$\mathcal{A} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{12}{2} = 6\ \text{cm}^2.$$

15. Un dreptunghi are perimetrul de 14 cm. Dacă diagonala dreptunghiului este de 5 cm, determină aria acestui dreptunghi.

16. Un triunghi dreptunghic cu aria egală cu 24 cm^2 are ipotenuza de 10 cm. Determină perimetrul acestui triunghi.

17. Arată că numărul $a = (\sqrt{7} - 3)^2 - (\sqrt{11} - \sqrt{13})(\sqrt{11} + \sqrt{13}) + 6\sqrt{7}$ este întreg.

18. Arată că numărul $x = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{2})^2$ este natural.

19. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $(x + 2)^2 + 16 = (x + 5)^2$;
b) $(2x - 1)^2 = 4(x + 1)^2 + 5$;
c) $(3x - 1)^2 - 1 - 9(x - 2)(x + 2) = 0$;
d) $16(x - 3)(x + 3) = (4x - 2)^2$.

20. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele inecuații:

a) $(x + 1)^2 > x^2 + 3$;
b) $(x - 1)^2 > (x + 1)^2 + 1$;
c) $(x + 3)^2 < (x - 1)^2 + 2$;
d) $(2x + 1)^2 \leq (2x - 3)^2 - 1$;
e) $\left(\frac{x}{3} + \sqrt{2}\right)^2 \leq \left(\frac{x}{3} - \sqrt{2}\right)^2 + 8$.

21. Suma pătratelor a două numere naturale este 52. Dacă diferența lor este egală cu 2, determină produsul lor.

22. Dacă suma pătratelor a două numere naturale este 580, iar suma lor este egală cu 34, determină produsul lor.

23. Un arhitect a primit schița unei parcele pătrate de pământ, pe care este deja reprezentată schița casei și curtea rămasă, ca în *Figura 9*. Prin amprenta la sol a casei vom înțelege suprafața determinată de porțiunea gri din imaginea alăturată.

a) Scrie aria parcelei în două moduri.

b) Calculează în funcție de x și de y amprenta la sol a casei și aria spațiului verde.

c) Pentru $x = 20$ m și $y = 30$ m, calculează amprenta la sol a casei și aria spațiului verde.

Notează acum latura parcelei cu L.

c) Folosindu-te de relația $y = L - 2x$, determină amprenta la sol a casei și aria spațiului verde în funcție de x și de L.

d) Demonstrează că dacă arhitectul dorește ca amprenta la sol a casei să fie mai mare sau egală cu aria spațiului verde, atunci trebuie ca $3x \leq L$.

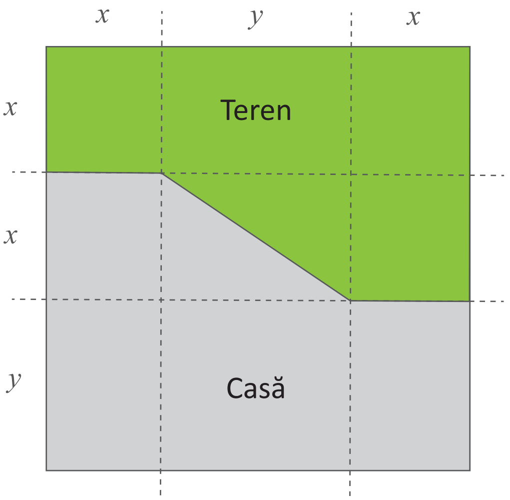


Figura 9 - Schița unei parcele

24. Calculează cât mai rapid: a) 51^2; b) 49^2; c) 101^2; d) 99^2; e) $199 \cdot 201$; f) $1990 \cdot 2010$.

AUTOEVALUARE – În această unitate de învățare:

🟩 Am înțeles foarte bine ....
🟨 Îmi este neclar ....
🟥 Nu știu să .... / Nu am înțeles ....

Revezi lecțiile și exercițiile noțiunilor notate la culoarea galbenă. Discută cu un coleg/ o colegă sau cu profesorul despre ceea ce nu ai înțeles și ai completat la culoarea roșie.

5. Evaluare

Timp de lucru: 45 de minute
Din oficiu 10p

1. Dublul pătratului numărului natural x este:

A. $2x$; B. $4x^2$; C. $2x^2$; D. x^2. *5p*

2. Se consideră expresia algebrică $E(x,y) = x^2y - 3xy + xy^2 - 2x^2y + 3x^3y$.
Termenii asemenea din această expresie sunt:

A. $-3xy$ și $3x^3y$; B. x^2y și xy^2; C. x^2y și $2x^2y$; D. x^2y și $-2x^2y$. *5p*

3. Se consideră expresia algebrică $E(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.
Valoarea numerică, a acestei expresii, pentru $x = 1$, este egală cu:

A. 1; B. 7; C. -1; D. 0. *5p*

4. Pentru a calcula $\left(4x - \sqrt{2}\right)\left(4x + \sqrt{2}\right)$ folosim formula:

A. $(a - b)^2$; B. Nu se poate folosi o formulă; C. $(a+b)(a-b)$; D. $(a + b)^2$. *5p*

5. Calculând $(3x - 2)(3x + 2)$ obținem:

A. $3x^2 - 2$; B. $3x^2 - 4$; C. $9x^2 - 4$; D. $9x^2 + 4$. *5p*

6. Calculând $(2x - 1)^2$ obținem:

A. $2x^2 - 2x + 1$; B. $2x^2 - 4x + 1$; C. $4x^2 - 4x + 1$; D. $4x^2 + 4x - 1$. *5p*

7. Rezultatul calculului $2x(x + 1) - x(2x - 1)$ este:

A. x; B. $4x^2 + x$; C. $3x$; D. $2x^2$. *10p*

8. Se consideră expresiile algebrice $E(x) = (x + 3)^2 - 12$ și $F(x) = 8x + (x - 3)^2$.

a) Arată că $E(x) = x^2 + 6x - 3$ și $F(x) = x^2 + 2x + 9$. *10p*

b) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $E(x) \geq F(x)$. *5p*

9. Suma a două numere este 5, iar suma pătratelor lor este 13.
Determină produsul celor două numere. *10p*

10. Arată că numărul $\left(\sqrt{3} - 2\right)^2 - \left(\sqrt{5} - 2\right)\left(2 + \sqrt{5}\right) + 4\sqrt{3}$ este natural. *15p*

11. Determină perimetrul unui triunghi dreptunghic, știind că una dintre catete are lungimea de 8 cm, iar lungimea celeilalte catete este cu 4 cm mai mică decât lungimea ipotenuzei. *10p*

6. Exersezi și progresezi

1. O persoană a depus la bancă o sumă de bani cu dobânda de 3% pe an.

Scrie ca expresie algebrică suma de bani pe care o primește după un an.

2. Prețul unui produs s-a mărit cu 10%.

Scrie ca expresie algebrică noul preț.

3. Prețul unui produs se mărește cu 20%. După un timp se reduce cu 20%.

Scrie ca expresie algebrică prețul după cele două operații.

4. Sorina a depus la bancă o sumă de bani cu dobânda de 4% pe an, iar Mihai a depus la altă bancă o sumă de bani cu dobânda de 5% pe an.

Scrie ca expresie algebrică suma de bani pe care o vor avea cei doi, împreună, după un an.

5. Transformă următoarele enunțuri în expresii algebrice, după model:

a) suma plătită pentru 7 pixuri de același fel;

b) distanța parcursă de un automobil în 4 ore;

c) numărul elevilor dintr-o clasă, știind că dacă se așază câte 3 într-o bancă vor rămâne cinci elevi în picioare;

d) prețul unui produs după o majorare cu 15%;

e) pătratul triplului unui număr real;

f) triplul pătratului unui număr real.

Model: a) $7x$, unde x este este prețul unui pix.

6. Redu termenii asemenea:

a) $2x - 5y + 3y - x$;

b) $(7x - 5y) - (3x - 5y) + 2x$;

c) $x^2y + xy - xy^2 - (xy - xy^2 + x^2)$;

d) $2(x + y - xy) - 3(xy - x - y) + (y - x - xy)$;

e) $-4(x + y - z) + 3(x - y + z) - 2(-x + y + z)$.

7. Să se reducă termenii asemenea:

a) $3t^5 - 4t^2 + 5t^3 - 2t + 4t^2 - 12t + t^4 - 3t^5$;

b) $(a^2 + 1) - (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$;

c) $3(z + 1)(z^2 - z + 1) - 3(z^2 - 1)(z - 1)$;

d) $(b^4 + 2)^2 - (b^2 - 2)(b^2 + 2)(b^4 + 4)$.

8. Efectuează, reducând termenii asemenea:

a) $(x - 2)^2 - (x + 3)(x - 1)$;

b)$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) - (x^2 - 1)^2$;

c) $(x + 2y)(2x - y) - 2(x + y)^2$;

d) $y^2(xz^2 + xz + x^2z) - xy(-xyz + 17yz^2 - 23yz) + 24x^2y^2z$.

9. Rezolvă:

a) $(x+1)(x+5) \leq x^2+17$, unde $x \in \mathbb{R}$;

b) $(x+1)(x+5) \leq x^2+17$, unde $x \in \mathbb{N}$;

c) $x^2-20 \geq (x+4)^2$, unde $x \in \mathbb{N}$;

d) $x^2-20 \geq (x+4)^2$, unde $x \in \mathbb{R}$;

e) $\left|(x-2)^2-(x-3)(x+1)\right| \leq 3$, unde $x \in \mathbb{Z}$;

f) $\left|(x-2)^2-(x-3)(x+1)\right| \leq 3$, unde $x \in \mathbb{R}$;

g) $\left|(x-2)^2-(x-3)(x+1)\right| \leq 3$, unde $x \in \mathbb{N}$.

10. Problemă rezolvată:

Arată că pătratul oricărui număr natural impar, $n \geq 11$, are cifra zecilor pară.

Soluție:

Cum gândesc:

Pas 1. Un număr natural impar îl pot scrie $\overline{Ai}$, unde A este numărul inițial fără ultima cifră, iar i este cifra impară.

Cum scriu: Se consideră $n=\overline{Ai}$, atunci $n^2=\overline{Ai}^2$.

Pas 2. Numărul $\overline{Ai}$ poate fi scris $\overline{A0}+i$ sau $10A+i$.

Avem $n^2=(10A+i)^2=100A^2+20Ai+i^2$.

Pas 3. Pentru că se înmulțește cu 100, numărul $100A^2$ are ultimele două cifre egale cu 0.

Numărul $20Ai$ se poate scrie $2Ai \cdot 10$ și are ultima cifră egală cu 0, pentru că se înmulțește cu 10.

Numărul i^2 poate avea o cifră (dacă i este 1 sau 3) sau două cifre, în care cifra zecilor este pară (dacă i este 5, 7 sau 9).

Notez $u(x)$ ultima cifră a numărului x.

Avem $u\left(100A\right)=0$, $u\left(20Ai\right)=0$ și $u\left(i^2\right) \in \{1,9,5\}$.

Notez $z(x)$ cifra zecilor a numărului x.

Avem $z\left(100A^2\right)=0$, $z\left(20Ai\right)=z\left(2Ai \cdot 10\right)=u\left(2Ai\right)$ și $z\left(i^2\right) \in \{0,2,4,8\}$.

Pas 4. Cifra zecilor a numărului n^2 este dată de cifra zecilor a sumei dintre cifrele zecilor ale numerelor $100A^2$, $20Ai$ și i^2.

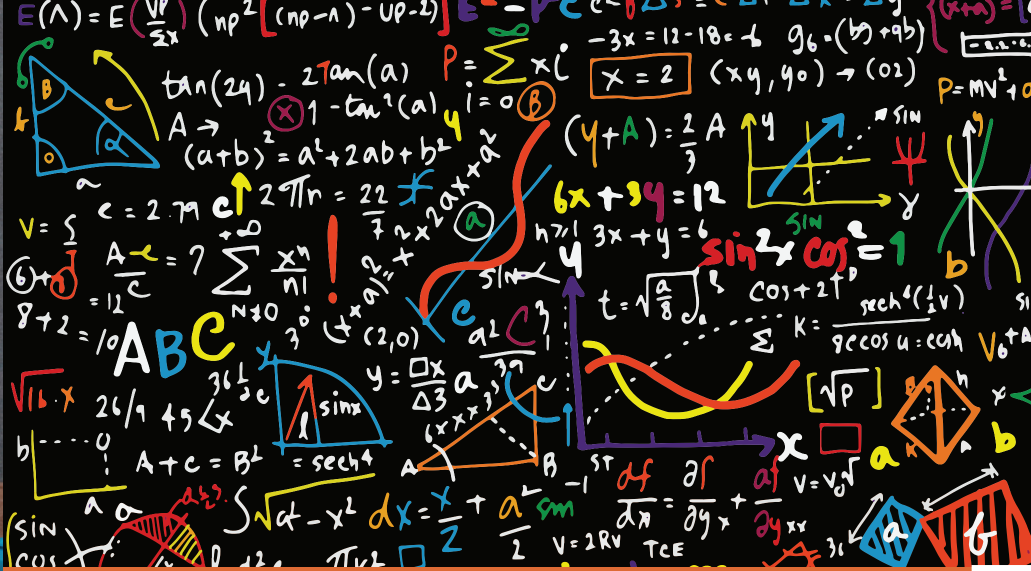
$z\left(n^2\right)=z\left(z\left(100A^2\right)+z\left(2Ai \cdot 10\right)+z\left(i^2\right)\right)=z\left(0+u\left(2Ai\right)+z\left(i^2\right)\right)$

Cum $u\left(2Ai\right)$ și $z\left(i^2\right)$ sunt cifre pare, deducem că $z\left(n^2\right)$ este cifră pară.

Observație:

Pătratul oricărui număr natural mai mare sau egal cu 5 nu poate avea toate cifrele impare.

11. Arată că expresia algebrică $E(x)=(x+3)^2+2(x-2)^2-3(x-1)(x+1)+2x-10$, unde x este număr real, nu depinde de x.



IV

Calcul algebric în ℝ. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în ℝ. Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde a, b, c∈ℝ

1. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$ (factorul comun)

Observă și descoperă!

1. Cifrul pentru a ieși din Camera enigmelor este rezultatul calculului următor:
$253 \cdot 23 + 253 \cdot 77$.

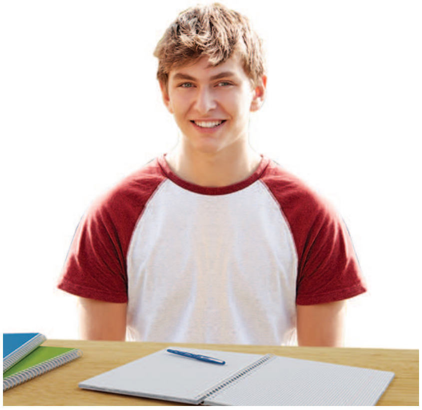
Va ieși din încăpere cel care reușește să descopere primul codul de acces.

a) Cine crezi că va reuși să iasă din Camera enigmelor mai repede?

b) Calculează, folosind factorul comun: i) $157 \cdot 79 + 21 \cdot 157$; ii) $478 \cdot 132 + 478 \cdot 18 - 50 \cdot 478$.

c) Pentru care numere naturale nenule, x, este adevărată relația $x(x-4) = 0$?

$253 \cdot 23 + 253 \cdot 77 =$
$= 253 \cdot (23 + 77) =$
$= 253 \cdot 100 = 25\,300.$



253×	253×	5819+
23	77	19481
759	1771	25300
506	1771	
5819	19481	

d) Pentru câte numere reale, x, este adevărată relația $(x+1)(x-1)(x^2+1) = 0$?

Important

• **Descompunerea în factori a unei expresii algebrice** înseamnă scrierea acelei expresii ca produs între două sau mai multe expresii algebrice.

• O metodă de descompunere în factori este **utilizarea factorului comun**. Această metodă se bazează pe distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere.

Egalitatea $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ **se poate scrie** $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$.

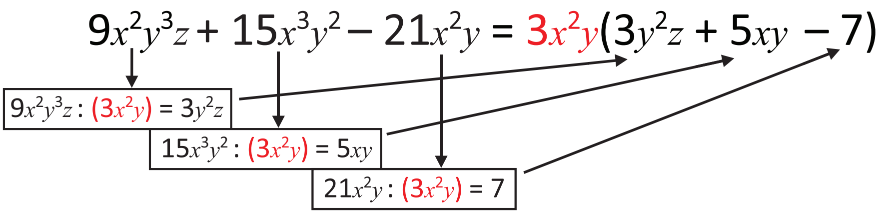
Exemplu: Descompune în factori expresia algebrică: $E(x,y,z) = 9x^2y^3z + 15x^3y^2 - 21x^2y$.

Soluție:

Cum gândesc: Există un număr, diferit de 1, la care să se împartă exact toți coeficienții? În cazul nostru răspunsul este DA; numărul căutat este **3**. El va **face parte din factorul comun**.

Există litere care apar în fiecare dintre termeni? DA; x și y. Aceste litere, **cu cel mai mic exponent la care apar, fac parte din factorul comun**. În concluzie, factorul comun este $3x^2y$.

Cum scriu:



$$9x^2y^3z + 15x^3y^2 - 21x^2y = 3x^2y(3y^2z + 5xy - 7)$$

$9x^2y^3z : (3x^2y) = 3y^2z$

$15x^3y^2 : (3x^2y) = 5xy$

$21x^2y : (3x^2y) = 7$

Exersează!

2. În expresia algebrică $12x^2 + 8x + 4$ factorul comun este .... .

A. 8; B. 4; C. 12; D. 3.

Scrie pe caiet litera corespunzătoare răspunsului corect.

3. În expresia algebrică $3x^2y^3z + 6x^3y^2 - 15x^3y^3z$, factorul comun este .... .

A. xyz; B. $3x^2yz$; C. $3x^2y^2$; D. $3x^3y^3$.

Scrie pe caiet litera corespunzătoare răspunsului corect.

4. Asociază fiecare expresie algebrică din prima linie cu descompunerea ei în factori din linia a doua.

$3x + 3y$ $\quad ax + bx$ $\quad 6x + 8y$ $\quad 4xy - 2x$ $\quad 4x^3 - 12x^2 + 4x$

$x(a + b)$ $\quad 2x(2y - 1)$ $\quad 4x(x^2 - 3x + 1)$ $\quad 3(x + y)$ $\quad 2(3x + 4y)$ $\quad 4x(x^2 - 3x)$

5. Descompune în factori, folosind factorul comun.

a) $5x^2 + 5x - 5$;
b) $9x - 18$;
c) $12x + 18y$;
d) $20x^2 + 25$;
e) $3x + 15y - 21z$;
f) $2x^2 + 2x + 2$;
g) $3x\sqrt{2} - 2y\sqrt{2}$;
h) $x\sqrt{6} + \sqrt{3}$;
i) $x\sqrt{2} + 2$.

6. Descompune în factori:

a) $3x^5 - 5x^3$;
b) $2y^6 + 3y^4$;
c) $4a^8 - 3a^5$;
d) $x^3 - 2x^2 - 3x$;
e) $5y^4 + 3y^2 - y$;
f) $4a^3 + 3a^4 - 7a^7$;
g) $x^4 - 2x^3 - x^2$;
h) $7t^5 - 5t^7$.

7. Descompune în factori, folosind factorul comun.

a) $12x^4 + 8x^3 - 16x^2$;
b) $20y^5 - 16y^6 + 12y^3 - 8y^4$;
c) $15a^5 - 9a^4 + 6a^6$;
d) $12y^4 + 18y^3 - 30y^5 + 12y^2$;
e) $4a^3 - 8a^4 + 4a^2$;
f) $15x^2 + 20x^4 - 25x^3$.

8. Descompune în factori:

a) $4x^3y^2 - 2x^3y^4 + 6x^2y^2$;
b) $14a^2b^3 + 7ab^2 - 14a^3b^2 - 21a^2b^2$;
c) $9x^3y^3 - 12x^4y^3 - 6x^3y^4$;
d) $24x^2y^3z^4 - 16x^4y^3x^2 - 8x^2y^2z^2$.

9. Scoate factor comun, după model:

a) $a(x + 1) + b(x + 1)$; b) $(x + 2)(x - 3) + 4(x + 2)$; c) $a(x + y) + b(x + y)$; d) $(x + 3)^2 - (x + 3)$; e) $(x - 2)^2 - (x - 2)^3$.

Model: $a(x + 1) + b(x + 1) = (x + 1)(a + b)$.

10. Știind că $xy = -7$ și $x + y = 2$, calculează $3x^2y + 3xy^2$.

11. Calculează produsul numerelor reale pozitive x și y, știind că $x + y = 6$ și $x^3y^2 + x^2y^3 = 24$.

12. a) Dacă $A = (x + 1)(x - 2)$ și $B = (x - 2)(x + 3)$, calculează $B - A$.

b) Știind că $(x + 1)(x - 2) = 3$ și $(x - 2)(x + 3) = 6$, determină numărul real x.

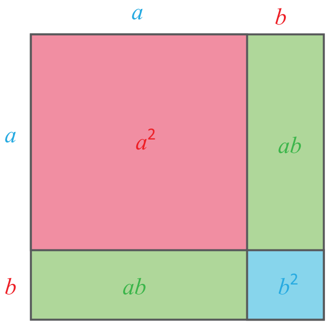
13. Un caiet și un pix costă, împreună, 7 lei. Ana cumpără 5 caiete și 3 pixuri, iar Radu cumpără 3 caiete și 5 pixuri de același fel.

Cât au plătit cei doi copii, împreună, pentru caietele și pixurile achiziționate?

2. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în ℝ (formule de calcul prescurtat)

Observă și descoperă!

1. Privește cu atenție imaginea și stabilește cine a calculat corect aria.



2. Este adevărată relația: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$?

3. Completează expresiile astfel încât să obții relații adevărate.

a) $a^2 - 2ab + b^2 = (....)^2$;

b) $a^2 - b^2 = (a - ....)(.... + b)$.

Important

- O metodă de descompunere în factori este **utilizarea formulelor de calcul prescurtat**.

Formulele de calcul prescurtat pot fi scrise și astfel:

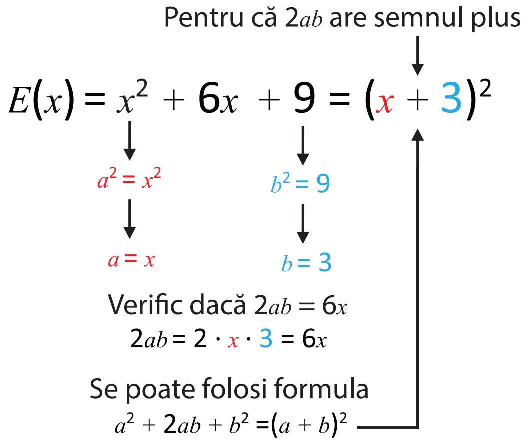
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ **(pătratul sumei)**

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ **(pătratul diferenței)**

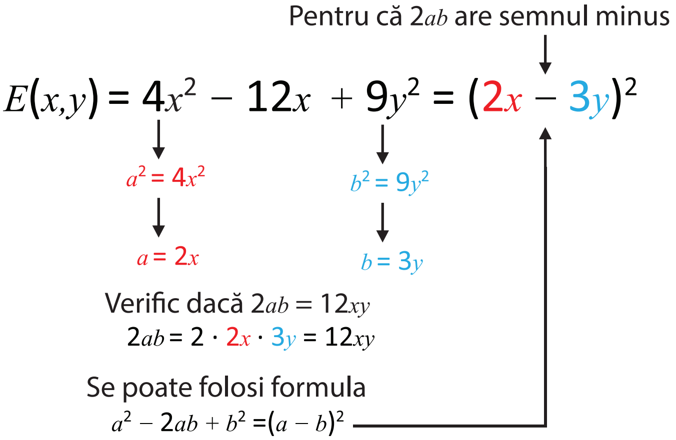
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ **(diferența de pătrate)**

Exemple: Descompune în factori expresiile algebrice: $E(x) = x^2 + 6x + 9$, $E(x, y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$, $E(x, y) = 4x^2 - y^2$.

Soluție: $E(x) = x^2 + 6x + 9$ este o expresie algebrică care are trei termeni. Mă pot gândi la una dintre formulele $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ sau $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$. Pentru aceasta trebuie să identific a^2, b^2 și $2ab$.



$E(x,y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$ este o expresie algebrică care are trei termeni. Mă pot gândi la formulele $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ și $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$. Pentru aceasta trebuie să identific a^2, b^2 și $2ab$.



Pentru că $2ab$ are semnul minus

$$E(x,y) = 4x^2 - 12x + 9y^2 = (2x - 3y)^2$$

$a^2 = 4x^2$ $\rightarrow$ $a = 2x$

$b^2 = 9y^2$ $\rightarrow$ $b = 3y$

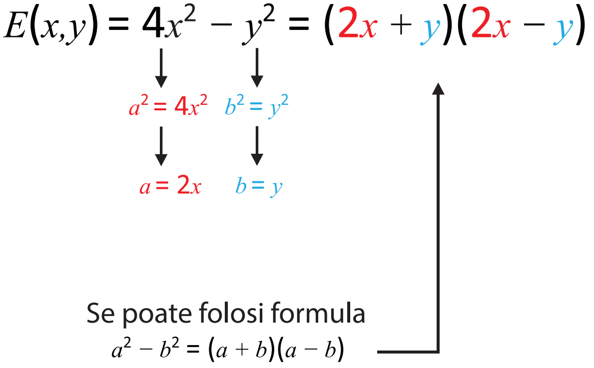
Verific dacă $2ab = 12xy$

$2ab = 2 \cdot 2x \cdot 3y = 12xy$

Se poate folosi formula

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

$E(x,y) = 4x^2 - y^2$ este o expresie algebrică care are doi termeni și între ei semnul minus. Mă gândesc la formula $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Pentru aceasta trebuie să identific a^2 și b^2.



$$E(x,y) = 4x^2 - y^2 = (2x + y)(2x - y)$$

$a^2 = 4x^2$ $\rightarrow$ $a = 2x$

$b^2 = y^2$ $\rightarrow$ $b = y$

Se poate folosi formula

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Exersează!

4. Transcrie în caiet și completează spațiile punctate:

a) În expresia $x^2 + 10x + 25$ recunosc pătratul sumei în care a^2 este ...., b^2 este ...., $2ab$ este .... .

b) În expresia $4x^2 - 49$ recunosc o diferență de pătrate în care a^2 este ...., b^2 este .... .

c) În expresia $9x^2 + 25y^2 - 30xy$ recunosc pătratul diferenței în care $a^2 = ...$, $b^2 = ...$, $2ab = ...$

5. Expresia algebrică $x^2 + 8x + 16$ se poate descompune cu:

A. pătratul diferenței; B. pătratul sumei; C. nu se descompune cu formule; D. diferență de pătrate.

6. Restrânge expresiile algebrice următoare, folosind formula $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$:

a) $x^2 + 2x + 1$; b) $x^2 + 4x + 4$; c) $x^2 + 6x + 9$; d) $x^2 + 10x + 25$; e) $x^2 + 12x + 36$.

7. Restrânge expresiile algebrice următoare, folosind formula $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$:

a) $x^2 - 2x + 1$; b) $x^2 - 4x + 4$; c) $x^2 - 6x + 9$; d) $x^2 - 10x + 25$; e) $x^2 - 12x + 36$.

8. Completează expresiile următoare pentru a putea aplica formula $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$:

a) $x^2 + 2xy + ...$; b) $x^2 + y^2$ ... ; c) $4x^2 - 4x$ ... ; d) $9x^2 + 1$ ... .

9. Compară numerele $a = 2017^2 - 3^2$ și $b = 2018^2 - 4^2$.

10. Descompune, folosind formula $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$: a) $x^2 - y^2$; b) $x^2 - 4$; c) $x^2 - 16$; d) $y^2 - 1$.

11. Descompune în factori, folosind formula potrivită:

a) $4x^2 + 12x + 9$; b) $9y^2 - 6y + 1$; c) $9x^2 - 30xy + 25y^2$; d) $25x^2 - 1$; e) $16y^2 - 49$; f) $4x^2 - 9$;
g) $25x^2 - 10x + 1$; h) $9x^2 + 12x + 4$; i) $x^2 + 2x\sqrt{2} + 2$.

12. Calculează în două moduri:

a) $1{,}3^2 + 2 \cdot 1{,}3 \cdot 2{,}7 + 2{,}7^2$; b) $2{,}3^2 - 2 \cdot 2{,}3 \cdot 1{,}3 + 1{,}3^2$; c) $52^2 - 48^2$; d) $7{,}8^2 - 2{,}2^2$; e) $13{,}2^2 - 3{,}2^2$.

13. Dacă $x^2 - y^2 = 24$ și $x + y = 2$, determină numerele reale x și y.
Indicație: determină $x - y$, apoi rezolvă sistemul de ecuații format din $x - y$ și $x + y$.

14. Se consideră expresia algebrică$E(x) = (2x-1)^2 + 2(2x-1)(1-x) + (1-x)^2$, unde x este număr real. Arată că $E(x) \geq 0$, pentru orice x număr real.

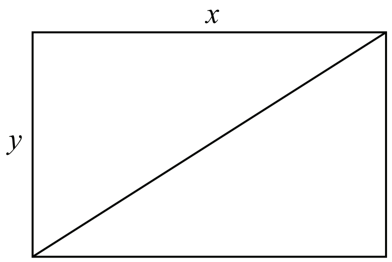
15. Se consideră expresia algebrică $E(x) = (x+2)^2 + (x-1)^2 - (x+2)(2x-2)$, unde $x \in \mathbb{R}$. Arată că $E(x)$ nu depinde de x.

16. Problemă rezolvată: Un dreptunghi are diagonala de 5 cm și aria egală cu 12 cm^2.
a) Determină perimetrul. b) Calculează dimensiunile acestui dreptunghi.

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Pentru a-mi fixa ideile desenez un dreptunghi și notez lungimea cu x, lățimea cu y, $x \geq y$.

Cum scriu:



Pas 2. Perimetrul se poate determina cu formula $P = 2(x+y)$. Prin urmare am nevoie de $x + y$. Aria este egală cu 12 cm^2. Diagonala este de 5 cm. O pot exprima în funcție de x și y folosind teorema lui Pitagora.

$P = 2(x+y)$. Știu că $xy = 12$ și $x^2 + y^2 = 25$.

Pas 3. Legătura între $x + y$, xy și $x^2 + y^2$ o realizez prin formula $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

Avem $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$.

Pas 4. Înlocuiesc ceea ce cunosc și determin $x + y$.

Adică $25 + 24 = (x+y)^2$, de unde $(x+y)^2 = 49$. De aici $x + y = 7$ sau $x + y = -7$.
Cum x și y sunt lungimi de segmente suma lor nu poate fi un număr negativ.
Convine numai $x + y = 7$.

Pas 5. Determin perimetrul, înlocuind $x + y$ în formulă.

$P = 2 \cdot 7 = 14$ cm

Pas 6. Observ că $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$ ceea ce îmi permite să determin $x - y$.

Avem $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$. Dar $x^2 - 2xy + y^2 = 25 - 2 \cdot 12 = 1$.
Obțin $(x-y)^2 = 1$ și atunci $x - y = 1$ sau $x - y = -1$.
Cum $x \geq y$ convine numai $x - y = 1$.

Pas 7. Știu cât sunt $x + y$ și $x - y$. Pot forma cu ele un sistem și îl rezolv.

$$\begin{array}{l}\underline{\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}} \\ \quad 2x = 8 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 8 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 4 + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Lungimile laturilor sunt 3 cm și 4 cm.

17. Un dreptunghi are diagonala de 13 cm și aria egală cu 60 cm^2. Determinați perimetrul și dimensiunile acestui dreptunghi.

18. Lucrează în pereche. Descompune, după model: a) $a(a+2)+1$; b)$(x^2+x)(x^2+x+2)+1$; c) $(x^2-x)(x^2-x+2)+1$; d) $(x^2+2x)(x^2+2x+2)+1$; e) $(x^2+x+1)(x^2+x+3)+1$; f) $(x^2+2x+3)(x^2+2x+9)+9$. *Model: a) Avem $a(a+2)+1 = a^2+2a+1 = (a+1)^2$.*

3. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$ (grupare de termeni)

Observă și descoperă!

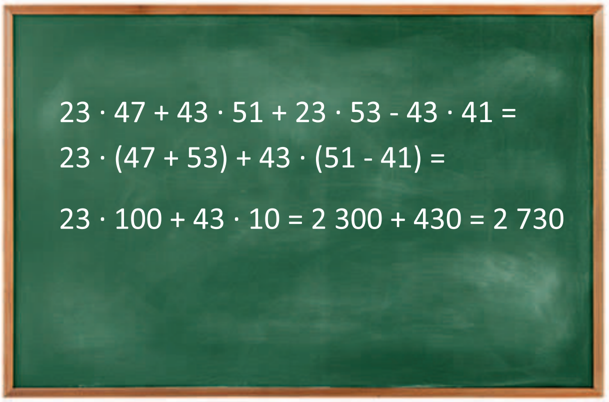
1. Urmărește cu atenție exercițiul de pe tabla din *Figura 1* și apoi efectuează, cât mai rapid, următoarele calcule:

a) $39 \cdot 104 - 39 \cdot 4 + 27 \cdot 63 + 27 \cdot 37$;

b) $57^2 + 57 \cdot 43 + 29 \cdot 79 - 29 \cdot 69$;

c) $17^2 - 2 \cdot 17 \cdot 7 + 7^2 + 20$;

d) $20^2 + 19^2 + 2 \cdot 19 \cdot 21 + 21^2$.



23 · 47 + 43 · 51 + 23 · 53 - 43 · 41 =

23 · (47 + 53) + 43 · (51 - 41) =

23 · 100 + 43 · 10 = 2 300 + 430 = 2 730

Figura 1 - Exercițiu pe tablă

Important

• O metodă de descompunere în factori este **utilizarea grupării termenilor**. Această metodă poate fi utilizată în mai multe moduri.

Exemplu: Descompune în factori expresia $E(x,y) = x^2 + xy + 2x + 2y$, unde x și y sunt numere reale.

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Observ că nu există un factor comun pentru toți termenii expresiei. Dar, dacă privesc numai primii doi termeni pot scoate factor comun pe x, iar în paranteză obțin $x + y$. Dacă privesc cei doi termeni care rămân pot scoate factor comun pe 2, iar în paranteză obțin tot $x + y$.

Cum scriu: $E(x,y) = x^2 + xy + 2x + 2y = x(x + y) + 2(x + y)$

Pas 2. Acum, paranteza $x + y$ poate fi scoasă factor comun.

$$E(x,y) = x^2 + xy + 2x + 2y = x(x + y) + 2(x + y) = (x + y)(x + 2)$$

În concluzie, $E(x,y) = (x + y)(x + 2)$.

Exemplu: Descompune în factori expresia $E(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 1$, unde x și y sunt numere reale.

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Observ că nu există un factor comun nici în cazul în care aș dori să grupez termenii. Termenii x^2, $-2x$ și 1 îmi sugerează formula $(a - b)^2$. Rescriu expresia, ordonând altfel termenii.

Cum scriu: $E(x,y) = x^2 - 2x + 1 - y^2$

Pas 2. Din primii trei termeni obțin $(x - 1)^2$.

$$E(x,y) = x^2 - 2x + 1 - y^2 = (x - 1)^2 - y^2$$

Pas 3. Forma obținută mă trimite cu gândul la o diferență de pătrate în care a este paranteza $x - 1$, iar b este y.

$$E(x,y) = (x - 1)^2 - y^2 = (x - 1 + y)(x - 1 - y)$$

În concluzie, $E(x,y) = (x + y - 1)(x - y - 1)$.

Exersează!

2. Descompune în factori, folosind gruparea termenilor:

a) $ax + ay + bx + by$;

b) $8x - 8 + ax - a$;

c) $x^2 - 3x + yx - 3y$;

d) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$.

3. Descompune în factori:

a) $18ax - 6ay + 15bx - 5by$;

b) $x^2 + 2y + 9ax^2 + 18ay$;

c) $10ax + 25ay - 22bx - 55by$;

d) $x^3 + x^2 + x + 1$;

e) $x + y - z + ax + ay - az$;

f) $(x - 2)^2 - 2x + 4$;

g) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$;

h) $x^3 - 5x^2 - x + 5$.

4. Descompune în factori:

a) $x^2 - 4x + 4 - y^2$;

b) $x^2 - 9a^2 - 6a - 1$;

c) $x^2 + y^2 - 1 + 2xy$;

d) $x^4 - 2x^2 + 1 - 2x^2 + 2$;

e) $x^2 - y^2 + ax - ay$;

f) $x^3 + x^2 + x - bx^2 - bx - b$;

g) $x - y + ax^2 - ay^2$;

h) $x^2 - 1 + ax - a + x\sqrt{2} - \sqrt{2}$.

5. Descompune în factori:

a) $4x^3 - x^2 - 36x + 9$;

b) $ax^2 - bx^2 - ay^2 + by^2$;

c) $(3x + 1)^3 - 12x - 4$;

d) $x^2 + 14x + 49 - 11x - 77$.

6. Descompune în factori:

a) $4x^2 - y^2 - 4x + 1$;

b) $x^2 + 2x + 1 - x^4$;

c) $4x^4 - 4x^2 - 4x - 1$;

d) $x^4 + 3x^2 + 4$.

7. Problemă rezolvată: a) Arată că $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.

b) Descompune în factori: $E(x) = x^2 - 3x - 10$.

Soluție:

Cum gândesc? Pasul 1. a) Pornesc din membrul stâng. Înmulțesc fiecare termen din prima paranteză cu toți termenii din a doua paranteză.

Cum scriu: $(x + a)(x + b) = x^2 + xb + ax + ab$

Pasul 2. Între termenii xb și ax dau factor comun pe x.

$$(x + a)(x + b) = x^2 + xb + ax + ab = x^2 + (a + b)x + ab$$

Pasul 3. b) Având în vedere punctul a) mă gândesc dacă îl pot scrie pe -10 ca produs de două numere a căror sumă să fie -3.

$$-10 = 2 \cdot -5 \text{ şi } 2 - 5 = -3$$

Pasul 4. Voi scrie în loc de $-3x$, $2x - 5x$.

$$x^2 + -3x - 10 = x^2 + 2x - 5x - 10$$

Pasul 5. Dau factor comun grupând termenii. Între primii doi termeni scot factor comun pe x, iar între ultimii doi termeni pe -5.

$$x^2 + 2x - 5x + 10 = x(x + 2) - 5(x + 2)$$

Pasul 6. Acum, pot da factor comun paranteza $x + 2$ și obțin descompunerea:

$$x(x + 2) - 5(x + 2) = (x + 2)(x - 5), \text{ adică } E(x) = x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$$

8. Descompune în factori: a) $x^2 + 4x - 12$; b) $x^2 - 6x - 7$; c) $x^2 + 2x - 15$; d) $x^2 - x - 20$; e) $x^2 - x - 42$.

4. Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$

Observă și descoperă!

1. Observă *Figurile 4 și 5*, apoi răspunde la întrebările următoare.

a) Ce lungime are latura pătratului albastru din cele două figuri?

b) Cât este lățimea dreptunghiului roșu din *Figura 4*? Dar a unui dreptunghi roșu din *Figura 5*?

c) Ce lungime are latura pătratului mare din *Figura 5*?

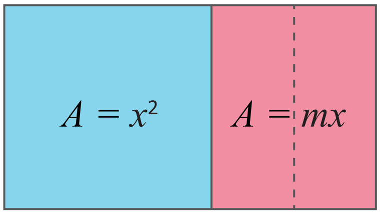


Figura 4 - Arii și dreptunghiuri

$$x^2 + mx = x^2 + 2 \cdot \frac{m}{2}x$$

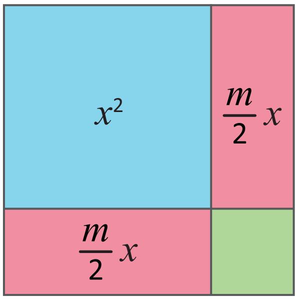


Figura 5 - Arii și pătrate

$$x^2 + 2 \cdot \frac{m}{2}x + \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{4} = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4}$$

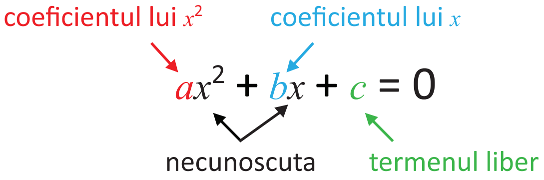
d) Cât este aria pătratului verde?

e) Scrie expresiile următoare sub forma $(x \pm p)^2 - q$, unde p și q sunt numere reale, pe care urmează să le determini:

i) $x^2 + 4x$; ii) $x^2 - 6x$; iii) $x^2 + 5x$; iv) $x^2 - 7x$.

Important

- Egalitatea $ax^2 + bx + c = 0$, $x \in M$, în care a este număr real nenul, b, c sunt numere reale, iar M este mulțimea în care necunoscuta ia valori este o ecuație cu necunoscuta x. M poate fi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, o mulțime finită sau un interval.



- Numim soluție a ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$ un număr din mulțimea în care necunoscuta ia valori, care, pus în locul necunoscutei, face ca egalitatea să fie adevărată.

Exemplu: Numărul 2 *este soluție a ecuației* $x^2 - 3x + 2 = 0$ *deoarece* $2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$ *este o relație adevărată.*

De asemenea, numărul 1 *este soluție a ecuației* $x^2 - 3x + 2 = 0$ *deoarece* $1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$ *este o relație adevărată.*

Numărul 3 *nu este soluție a ecuației* $x^2 - 3x + 2 = 0$ *deoarece* $3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 0$ *este o relație falsă.*

- A rezolva ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ înseamnă să îi găsim toate soluțiile.

- Metoda de rezolvare a unei ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$ depinde de forma concretă pe care o are ecuația.

▷ **Dacă lipsește termenul liber** ($c = 0$) ecuația devine $ax^2 + bx = 0$, $a \neq 0$.

Cum gândesc: Pas 1. Între cei doi termeni pot scoate factor comun pe x.

Cum scriu: $x\,(ax + b) = 0$

Pas 2. Un produs de factori este zero dacă cel puțin unul dintre factori este zero.

$x = 0$ sau $ax + b = 0$

Pas 3. Din prima ecuație am soluția 0, iar din a doua, prin rezolvare găsesc soluția $-\dfrac{b}{a}$.

$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \mid : a \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$

În concluzie, mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \left\{0, -\dfrac{b}{a}\right\}$.

Exemplu: Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $2x^2 - 6x = 0$.

Soluție: Avem $2x(x-3) = 0$, de unde $2x = 0$ sau $x - 3 = 0$. Obținem $x = 0$ sau $x = 3$ și deci mulțimea soluțiilor este $S = \{0, 3\}$.

▷ **Dacă lipsește coeficientul lui** x ($b = 0$) ecuația devine $ax^2 + c = 0$, $a \neq 0$.

Cum gândesc: Pas 1. Deoarece $a \neq 0$, pot împărți ecuația prin a.

Cum scriu: $ax^2 + c = 0 \mid : a \Rightarrow x^2 + \dfrac{c}{a} = 0$

Pas 2. Dacă $\dfrac{c}{a} > 0$, deoarece $x^2 \geq 0$, avem $x^2 + \dfrac{c}{a} > 0$.

Ecuația nu are soluții în mulțimea numerelor reale sau mulțimea soluțiilor este $S = \emptyset$.

Pas 3. Dacă $\dfrac{c}{a} = 0$, ecuația devine:

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Mulțimea soluțiilor este $S = \{0\}$.

Pas 4. Dacă $\dfrac{c}{a} < 0$, atunci $\dfrac{c}{a} = -p$, cu $p > 0$ și deci $\dfrac{c}{a} = -\left(\sqrt{p}\right)^2$, iar ecuația devine:

$x^2 - \left(\sqrt{p}\right)^2 = 0$

Pas 5. În membrul stâng recunosc o diferență de pătrate.

$\left(x - \sqrt{p}\right)\left(x + \sqrt{p}\right) = 0$

Pas 6. Un produs de factori este zero dacă cel puțin unul dintre factori este zero.

$x - \sqrt{p} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{p}$ sau $x + \sqrt{p} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{p}$

În concluzie, mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{\sqrt{p}, -\sqrt{p}\}$.

Exemplu: Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $4x^2 - 9 = 0$.

Soluție: $4x^2 - 9 = 0 \mid : 4 \Rightarrow x^2 - \dfrac{9}{4} = 0 \Rightarrow x^2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(x - \dfrac{3}{2}\right)\left(x + \dfrac{3}{2}\right) = 0$. De aici $x - \dfrac{3}{2} = 0$ sau $x + \dfrac{3}{2} = 0$. Obținem $x = \dfrac{3}{2}$ sau $x = -\dfrac{3}{2}$. Mulțimea soluțiilor este $S = \left\{-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$.

Observație: Ecuația se poate rezolva și astfel:

$4x^2 - 9 = 0 \mid : 4 \Rightarrow x^2 - \dfrac{9}{4} = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{9}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{9}{4}} \Rightarrow x = \pm\dfrac{3}{2}$, dar atenție să nu-l uităm pe ±.

▷ **Ecuația are toți coeficienții și termenul liber diferiți de** 0
$ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Cum gândesc: Pas 1. Deoarece $a \neq 0$, pot împărți ecuația prin a.

Cum scriu: $ax^2 + bx + c = 0 \mid : a \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Pas 2. Din ecuația obținută iau termenii x^2 și $\frac{b}{a}x$ și completez pentru a obține pătratul sumei sau pătratul diferenței.

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

Pas 3. Pentru primii trei termeni aplic formula pătratului sumei sau pătratului diferenței, iar între ultimii doi termeni scot factor comun pe -1.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = 0 \text{ sau } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Am ajuns la o ecuație de tipul „lipsește coeficientul lui x” în care x^2 este paranteza la pătrat, iar $\frac{c}{a}$ este $-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. De aici știu să rezolv.

Exemplu: Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile: a) $x^2 - 6x + 5 = 0$; b) $2x^2 + 3x + 4 = 0$.
Soluție: a) $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Cum gândesc: Pas 1. Iau termenii x^2 și $-6x$ și completez pentru a obține pătratul diferenței.

Cum scriu: $x^2 - 6x + 9 - 9 + 5 = 0$

Pas 2. Aplic formula, iar pentru ultimii doi termeni efectuez operația.

$$(x - 3)^2 - 4 = 0$$

Pas 3. Pe 4 îl privesc ca 2^2 și aplic formula diferenței de pătrate.

$$(x - 3 - 2)(x - 3 + 2) = 0 \text{ sau } (x - 5)(x - 1) = 0$$

Pas 4. Un produs de factori este zero dacă cel puțin un factor este egal cu zero.

$x - 5 = 0$ sau $x - 1 = 0$, de unde obținem $x = 5$ sau $x = 1$
Mulțimea soluțiilor este $S = \{1, 5\}$.

De la **pasul 2** pot continua şi astfel:

Pas 3. Trec termenul liber în membrul drept.

$$(x - 3)^2 = 4$$

Pas 4. Obțin:

$x - 3 = \pm\sqrt{4}$, adică $x - 3 = \pm 2$

Pas 5. Am de rezolvat două ecuații.

$x - 3 = 2$, de unde $x = 5$ și
$x - 3 = -2$, de unde $x = 1$
Mulțimea soluțiilor este $S = \{5, 1\}$.

Soluție: b) $2x^2 + 3x + 4 = 0$.

Cum gândesc: Pas 1. Împart ecuația prin 2 (coeficientul lui x^2).

Cum scriu: $x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0$

Pas 2. Iau termenii x^2 și $\frac{3}{2}x$ și completez pentru a obține pătratul sumei.

$$x^2 + 2\frac{3}{4}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} + 2 = 0$$

Pas 3. Aplic formula, iar ultimii doi termeni îi calculez.

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{16} = 0$$

Pas 4. Deoarece $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 \geq 0$ avem:

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{16} > 0$$

Mulțimea soluțiilor este $S = \emptyset$.

Exersează!

2. Se consideră ecuația $3x^2 - 8x + 5 = 0$. Care dintre afirmațiile următoare este falsă?

A. coeficientul lui x^2 este 3;

B. coeficientul lui x este 8;

C. termenul liber este 5;

D. Numărul 1 este soluție a ecuației.

Scrie în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect.

3. Pentru care dintre ecuațiile următoare, numărul -1 este soluție?

A. $x^2 - 2x + 1 = 0$;

B. $x^2 + 4x + 3 = 0$;

C. $4x^2 - 4x + 1 = 0$;

D. $2x^2 - 7x + 5 = 0$.

Scrie în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect.

4. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $x^2 + 3x = 0$;

b) $2x^2 - 7x = 0$;

c) $5x^2 + 4x = 0$;

d) $x^2 - 9 = 0$;

e) $4x^2 - 1 = 0$;

f) $x^2 + 4 = 0$;

g) $9x^2 - 4 = 0$;

h) $7x^2 + 10 = 0$.

5. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$;

b) $x^2 + 7x + 12 = 0$;

c) $x^2 - 11x + 24 = 0$;

d) $4x^2 + 4x + 3 = 0$;

e) $3x^2 - 2x + 5 = 0$;

f) $6x^2 - 7x + 2 = 0$;

g) $10x^2 + 29x + 10 = 0$;

h) $x^2 + 2x + 2 = 0$;

i) $9x^2 - 6x - 3 = 0$.

6. Diferența dintre lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic este de 7 cm. Determină aria triunghiului, știind că ipotenuza are 13 cm.

7. Un teren în formă de dreptunghi are aria de 36 dam^2 și este împrejmuit cu un gard cu lungimea de 26 dam. Determină lungimile laturilor terenului.

8. Radu a găsit într-o cutie două becuri pe care le cumpărase cu ani în urmă. Din păcate, etichetele celor două becuri s-au deteriorat, însă Radu își aduce aminte că diferența dintre rezistențele celor două becuri era de 110 Ω (Ohmi). Legând becurile în paralel, Radu constată că rezistența totală a circuitului este de 48 Ω. Dacă rezistențele celor două becuri sunt exprimate prin numerele reale pozitive R_1 și R_2 și rezistența totală este R, știind că are loc relația $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, determină rezistența fiecărui bec.

5. Recapitulare

1. Calculează:

a) $124 \cdot 32 + 124 \cdot 68$;
b) $401 \cdot 59 + 401 \cdot 78 - 401 \cdot 37$;
c) $108^2 - 108 \cdot 58$;
d) $7{,}9^2 + 7{,}9 \cdot 5{,}8 - 7{,}9 \cdot 3{,}7$;
e) $199^2 - 198 \cdot 199 + 199$.

2. Descompune în factori, folosind factorul comun:

a) $3a + 3b$;
b) $8a - 8b + 8c$;
c) $7ax - 14ay + 35az$;
d) $9x + 18y + 18$;
e) $x^2 + 5x$.

3. Descompune în factori:

a) $ma^2 - ma + ma^3$;
b) $9x^3 - 15x^2 + 21x^4$;
c) $5x^m - 10x^{m-1} + 20x^{m+1}$;
d) $\sqrt{18}a^4 + \sqrt{32}a - \sqrt{50}a^2$.

4. Determină numărul real x, știind că $xy + xz - xt = 48$ și $3y + 3z - 3t = 12$.

5. Arată că numărul $a = 2(2x+1)^2 + x(2x+1) - (2x+1)(3x+1)$ este pătratul unui număr natural, oricare ar fi numărul natural x.

6. Arată că numărul $a = 2(3x+2)^2 + x(3x+2) - 2(2x+1)(3x+2)$ este pătratul unui număr natural, oricare ar fi numărul natural x.

7. Restrânge expresiile algebrice următoare, folosind formula $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$:

a) $x^2 + 16x + 64$;
b) $81x^2 + 18x + 1$;
c) $49x^2 + 112x + 64$;
d) $9x^2 + 6x + 1$;
e) $x^2 + x + \frac{1}{4}$;
f) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$.

8. Restrânge expresiile algebrice următoare, folosind formula $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$:

a) $16 - 8x + x^2$;
b) $100 - 40x + 4x^2$;
c) $a^2 - 20a + 100$;
d) $x^2 - 3x + \frac{9}{4}$;
e) $x^2 - 5x + \frac{25}{4}$;
f) $9x^2 - 42x + 49$.

9. Descompune, după model:

a) $x^4 - 625$;
b) $9x^2 - 100$;
c) $y^2 - 16a^2$;
d) $a^2 - \frac{1}{9}$;
e) $25a^2 - 16x^2$;
f) $x^2 - 2$;
g) $x^2 - 5$;
h) $x^4 - 1$;
i) $x^4 - 81$;
j) $16x^4 - 1$.

Model: $x^4 - 625 = x^4 - 25^2 = (x^2)^2 - 25^2 = (x^2 - 25)(x^2 + 25) = (x-5)(x+5)(x^2+25)$.

10. Descompune în factori:

a) $4x - 4y + x^2 - xy$;
b) $5a^2x + x^2 + 5ax + ax^2$;
c) $2ay + 3ax - 6x - 4y$;
d) $x^3 + x^2 + mx + m$;
e) $5ay + 10ay^2 + 6by + 12by^2$;
f) $x^2 + 10x + 25 - y^2$;
g) $(4a+3)^2 - 4a - 3$;
h) $x^4 - x^2 - x - 1$;
i) $ab^3 - ab - xb - x$.

11. Se consideră expresia algebrică $E(x,y) = (x^2 + 2xy)(x^2 + 2xy + 2y^2) + y^4$. Dacă $x + y = 3$, arată că $E(x,y) = 81$.

12. Descompune în factori:

a) x^2+5x+6; c) x^2-5x+6; e) x^2-x-6; g) $x^2-3x-10$;
b) x^2+6x+8; d) $x^2+7x+12$; f) x^2+2x-8; h) x^2-x-2.

13. Se consideră expresia algebrică $E(x,y)=2x^2+10xy-6x-30y$, unde x și y sunt numere reale.

a) Arată că $E(x,y)=2(x+5y)(x-3)$, oricare ar fi numerele reale x și y.
b) Dacă $x+5y=11$ și $E(x,y)=-44$, determină numerele reale x și y.

14. Radu a cumpărat 4 kg de mere și 2 kg de pere. Ana a cumpărat 1 kg de mere și 3 kg de pere, la aceleași prețuri la care a cumpărat și Radu. Câți lei au cheltuit cei doi, împreună, dacă pentru 1 kg de mere și 1 kg de pere au plătit 7 lei?

15. Precizează coeficientul lui x^2, coeficientul lui x și termenul liber pentru fiecare dintre următoarele ecuații:

a) $6x^2-4x-2=0$; c) $-x^2+4=0$;
b) $x^2-x-2=0$; d) $x^2-x=0$.

16. Asociază fiecărei ecuații din prima linie mulțimea soluțiilor din linia a doua.

$x^2-x=0$ $4x^2-1=0$ $-x^2+4=0$ $6x^2-4x-2=0$ $x^2-x-2=0$

$\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$ $\left\{-\frac{1}{3},1\right\}$ $\{0,1\}$ $\{-1,2\}$ $\{-2,2\}$ $\left\{1,\frac{4}{3}\right\}$

17. Rezolvă, în mulțimea numerelor reale, următoarele ecuații:

a) $3x^2-6x=0$; g) $x^2-50=0$; m) $x^2+4x+5=0$;
b) $6x^2-5x=0$; h) $(x-2)^2-9=0$; n) $x^2-7x-30=0$;
c) $-4x^2+24x=0$; i) $(3-x)^2=169$; o) $2x^2-x-6=0$;
d) $(x-1)^2=0$; j) $x^2-4x+4=0$; p) $2x^2-7x+3=0$;
e) $36x^2-25=0$; k) $2x^2-16x+32=0$; r) $x^2-2x+11=0$.
f) $2x^2-18=0$; l) $x^2-x+\frac{1}{4}=0$;

18. Suma pătratelor a două numere naturale impare consecutive este 202. Determină cele două numere.

19. *Figura 6* reprezintă schița unui teren în formă de dreptunghi. Pe suprafața colorată, care are formă de pătrat, se construiește o casă, iar pe suprafața rămasă se plantează gazon. Știind că aria întregului teren este 880 m^2 și că lățimea terenului plantat cu gazon este cu 4 m mai mică decât latura pătratului, determină lungimea gardului care împrejmuiește terenul.

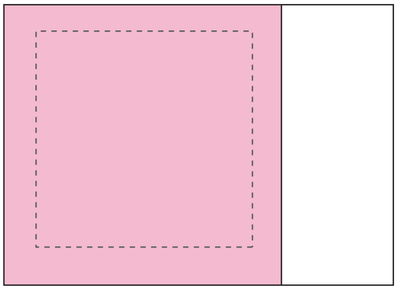


Figura 6 - Schița terenului

AUTOEVALUARE – În această unitate de învățare:

Am înțeles foarte bine ....
Îmi este neclar ....
Nu știu să .... / Nu am înțeles ....

Revezi lecțiile și exercițiile noțiunilor notate la culoarea galbenă. Discută cu un coleg/ o colegă sau cu profesorul despre ceea ce nu ai înțeles și ai completat la culoarea roșie.

6. Evaluare

Timp de lucru: 45 de minute
Din oficiu 10p

1. Pentru descompunerea în factori a expresiei algebrice $x^2 - 4xy + 4y^2$ folosești formula:
A. $a^2 - b^2$; B. $a^2 - 2ab + b^2$; C. $a^2 + 2ab + b^2$; D. $a^2 + b^2$. *10p*
Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect.

2. În ecuația $3x^2 - 2x - 1$ termenul liber este:
A. 1; B. -1; C. 2; D. -2. *5p*
Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect.

3. Mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 - 4x + 3 = 0$ este:
A. $\{-1, 3\}$; B. $\{1, 3\}$; C. $\{1, -3\}$; D. $\{-1, 4\}$. *5p*
Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect.

4. Descompune în factori următoarele expresii algebrice:
a) $3x - 3y$; *5p*
b) $x^2y + 2xy^2$; *5p*
c) $x^2 + 6x + 9$; *5p*
d) $4x^2 - 1$. *5p*

5. Calculează, folosind formule de calcul prescurtat:
a) $29^2 + 42 \cdot 29 + 21^2$; *5p*
b) $253^2 - 153^2$. *5p*

6. Descompune în factori:
a) $3x^3y - 6x^2y^2 + 3xy^3$; *5p*
b) $xy + x + y + 1$; *5p*
c) $x^4 - 16$; *5p*
d) $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3$. *5p*

7. Dacă $x + 3y = 15$ și $x^2 + 3xy + x + 3y = 60$, determină numerele reale x și y. *10p*

8. Într-o zi Ana a mers la film cu părinții, cu bunica și cu fratele ei Mihai. În altă zi a mers, la același cinematograf, numai cu mama și cu fratele ei Mihai. Dacă un bilet de adult și un bilet de copil costă, împreună, 26 de lei, determină ce sumă a plătit familia Anei pentru cele două filme? *10p*

7. Exersezi și progresezi

1. Precizați care dintre enunțurile următoare sunt adevărate și care sunt false:

a) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$;
b) $a^2 - 2ab - b^2 = (a - b)^2$;
c) $a^2 + b^2 = (a + b)^2$;
d) $ax + bx = x(a + b)$;
e) $6x + 6y = 6(x + y)$;
f) $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$;
g) $a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$;
h) $a^2 + 2a - 1 = (a - 1)^2$.

2. Scrie termenul care lipsește pentru a putea restrânge sub forma $(a + b)^2$ sau $(a - b)^2$:

a) $x^2 + 6x$ ...;
b) $a^2 -$ ... $+ 9$;
c) $x^2 + 14x$ ...;
d) $4x^2 +$ ... $+ 25$;
e) $x^2 - 18x$ ...;
f) $9a^2 - 36a$ ...;
g) $x^2 - 24x$ ...;
h) $9x^2 + 25$ ...;
i) $9x^2 - 30x$ ...;
j) $25m^2 - 40m$ ... .

3. Descompune în factori:

a) $8x(2x - 1) - 6(2x - 1)$;
b) $(3x + 1)^2 - 5x(3x + 1) - (3x + 1)$;
c) $(x - 1)(2x + 3) - (x - 1)(5x - 1)$;
d) $3x\sqrt{2}(2x + 1) + 5\sqrt{2}(2x + 1) - 7x^2\sqrt{2}(2x + 1)$.

4. Descompune în factori:

a) $(x - 2)^2 - 9$;
b) $(2x + 1)^2 - (x + 5)^2$;
c) $49a^2 - (a - 5)^2$;
d) $9(4x + 1)^2 - (2x - 3)^2$;
e) $81 - 49a^2x^2$;
f) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$;
g) $\frac{3}{4} - \sqrt{3}x + x^2$;
h) $\frac{a^2}{4} + a + 1$;
i) $0{,}01 - x^2$;
j) $20 - 5a^2$.

5. Descompune în factori:

a) $3x^2 - 3x + ax - a$;
b) $x^4 + x^2y^2 + mx^2 + my^2$;
c) $m^2 - x^2 - 2x - 1$;
d) $ax - bx + ma - mb$;
e) $6ax - 18ay + 5ax - 15ay$.

6. a) Știind că pentru orice număr real a, avem $a^2 \geq 0$, arată că $x^2 - 4x + 10 \geq 6$.

b) Se consideră expresia algebrică $E(x) = x^2 - 4x + 10$, unde x este număr real. Determină cea mai mică valoare pe care o poate avea $E(x)$.

c) Determină numărul real x pentru care se obține cea mai mică valoare a lui $E(x)$.

7. a) Determină cea mai mare valoare pe care o poate avea expresia $-x^2 + 2x + 2$.

b) Determină numărul real x pentru care se obține această valoare.

8. Arată că următoarele expresii algebrice nu depind de x:

a) $E(x) = (1 - 2x)^2 + 4x(1 - 2x) + 4x^2$, unde x este număr real;
b) $E(x) = (x + 2)^2 - 2(x + 2)(x + 1) + (x + 1)^2$, unde x este număr real.

9. Determină numerele reale pozitive x și y pentru care $x^2 + 4xy + 4y^2 = 25$ și $x^2 - 6xy + 9y^2 = 0$.

10. Problemă rezolvată: Determină numerele reale x și y pentru care $x^2+y^2-4x-6y+13=0$.

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Știu că pătratul oricărui număr real este pozitiv; $a^2 \geq 0$. Mai știu că o sumă de numere pozitive este zero, dacă și numai dacă fiecare termen este egal cu zero; $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0$ și $b=0$.

Observațiile de mai sus îmi sugerează ideea transformării membrului stâng într-o sumă de pătrate. x^2 și $-4x$ se pot restrânge în $(a-b)^2$ dacă ar mai avea un 4; îl pot lua de la 13 $(13=4+9)$. La fel, y^2 și $-6y$ se pot restrânge în $(a-b)^2$ dacă ar mai avea un 9; îl pot lua de la 13 $(13=4+9)$.

Cum scriu: $x^2+y^2-4x-6y+13=x^2-4x+4+y^2-6y+9=(x-2)^2+(y-3)^2$

Pas 2. În urma acestei scrieri, relația dată se transformă în:

$$(x-2)^2+(y-3)^2=0$$

Pas 3. Pentru ca ultima relație să fie adevărată, fiecare termen trebuie să fie egal cu zero.

Obținem $(x-2)^2=0$ și $(y-3)^2=0$, deci $x=2$ și $y=3$.

11. Determină numerele reale x și y pentru care $x^2+4y^2-2x+4y+2=0$.

12. Exercițiu rezolvat: Se consideră expresia algebrică $E(x,y)=x^2+y^2+2x+4y-4$, unde x și y sunt numere reale.

a) Arată că expresia se poate scrie $E(x,y)=(x+a)^2+(y+b)^2-9$.

b) Dacă $E(x,y)=0$, arată că $x \in [-4,2]$ și $y \in [-5,1]$.

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Trebuie identificat pătratul unor sume sau al unor diferențe. Din x^2, $2x$ și 1 pot obține $(x \pm 1)^2$, iar din y^2, $4y$ și 4 pot obține $(y \pm 2)^2$. Adun și scad 5, adică $1+4$.

Cum scriu: $E(x,y)=x^2+y^2+2x+4y-4=x^2+2x+1+y^2+4y+4-5-4=(x+1)^2+(y+2)^2-9$

Pas 2. Expresia s-a scris conform cerinței punctului a).

$$E(x,y)=(x+1)^2+(y+2)^2-9$$

Pas 3. Scriu ce înseamnă că $E(x,y)=0$.

$$(x+1)^2+(y+2)^2-9=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y+2)^2=9 \ (1)$$

Pas 4. Știu că, într-o sumă de numere pozitive, oricare termen este mai mic sau egal cu suma.

Din (1) rezultă $(x+1)^2 \leq 9$ și $(y+2)^2 \leq 9$

Pas 5. Știu că dacă $x^2 \leq a$, cu $a>0$, atunci $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{a}$, adică $|x| \leq \sqrt{a}$, de unde $-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$.

Atunci $(x+1)^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq x+1 \leq 3 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2$, deci $x \in [-4,2]$.

$(y+2)^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq y+2 \leq 3 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 1$, deci $y \in [-5,1]$.

13. Se consideră expresia algebrică $E(x,y)=x^2+y^2+4x-6y+9$, unde x și y sunt numere reale.

a) Arată că expresia se poate scrie $E(x,y)=(x+a)^2+(y+b)^2-4$.

b) Dacă $E(x,y)=0$, arată că $x \in [-4,0]$ și $y \in [1,5]$.

14. Energia cinetică a unui corp se calculează folosind formula $E_c = \dfrac{mv^2}{2}$, unde m este masa corpului, iar v viteza acestuia. Unitatea standard de măsură a energiei cinetice este Joule (J): $1\ \text{J} = 1\dfrac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$.

a) Dacă un corp cu masa de 10 kg are inițial viteza de 10 m/s, iar apoi viteza de 25 m/s, determină cu cât a crescut energia cinetică a acestui corp.

b) Dacă un corp cu masa m kg are inițial viteza v_0 m/s, iar apoi viteza $v_0 + \Delta v$ m/s, unde v_0 și Δv sunt numere reale pozitive, scrie o formulă care să descrie cu cât a crescut energia cinetică a acestui corp.

c) Care este energia cinetică a unui camion mediu cu masa de 6 000 kg care se deplasează cu viteza de 50 km/h?

d) Care este energia cinetică a unui automobil cu masa de 3 000 kg care se deplasează cu viteza de 50 km/h?

e) Care este energia cinetică a unui automobil cu masa de 3 000 kg care se deplasează cu viteza de 100 km/h?

15. Stabiliți care dintre elementele mulțimii $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ este soluție pentru fiecare dintre următoarele ecuații:

a) $x^2 + 3x + 2 = 0$;
b) $3x^2 + 4x - 7 = 0$;
c) $-x^2 - x + 12 = 0$;
d) $x^2 + 4 = 0$;
e) $3x^2 - 15x = 0$.

16. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $x^2 + 2x = 0$;
b) $2x^2 - 8x = 0$;
c) $-6x^2 + x = 0$;
d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
e) $x^2 + 14x + 24 = 0$;
f) $-x^2 - 4x - 3 = 0$;
g) $-x^2 - 2x + 8 = 0$;
h) $x^2 + 3x + 5 = 0$.

17. Se consideră ecuația $x^2 + 3x + a = 0$, cu necunoscuta x și a un număr real.

a) Determină valoarea numărului real a, știind că -2 este soluție a ecuației.

b) Pentru $a = 2$ rezolvă ecuația în mulțimea numerelor reale.

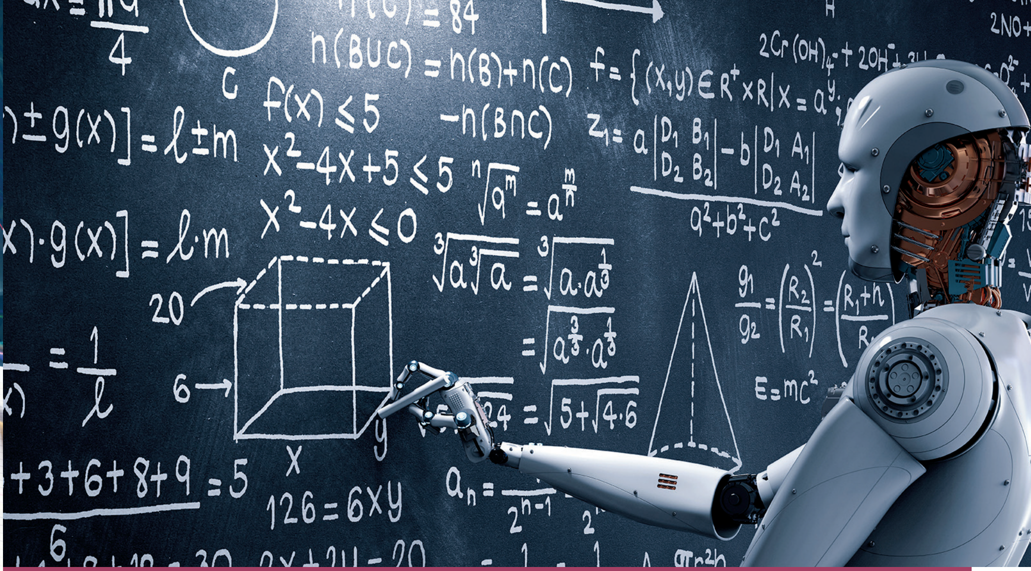
18. Suma lungimilor catetelor unui triunghi dreptunghic este egală cu 14 cm, iar aria triunghiului este egală cu 24 cm^2. Determină perimetrul triunghiului.

19. O barcă, ca în imaginea din *Figura 7*, se deplasează pe un râu, mergând de la localitatea A la localitatea B, apoi de la localitatea B la localitatea A, în 4 ore, fără a face pauză. Determină viteza bărcii, știind că viteza apei este de 3 km/h și distanța dintre cele două localități este de 10 km.

Indicație: Timpul de deplasare se determină cu formula $t = \dfrac{d}{v}$, *în care* t *este timpul,* d *este distanța, iar* v *este viteza.*

Figura 7 - Barcă pe râu

20. Determină numărul natural n pentru care $1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = 1128$.



V

Calcul algebric în $\mathbb{R}$.
Fracții algebrice

1. Fracții algebrice

Amintește-ți!

1. Urmărește, cu atenție, exercițiile scrise pe tabla din *Figura 1* și apoi răspunde, oral, la cerințele următoare:

a) Operația pe care trebuie să o efectueze cei doi copii la exercițiul 1 se numește .... .

b) Dintre cei doi copii, cel care rezolvă corect exercițiul 1 este .... . Justifică răspunsul dat.

c) Dintre cei doi copii, cel care va rezolva mai repede exercițiul 2 este .... . Justifică răspunsul dat.

d) Care dintre scrierile următoare nu reprezintă o fracție? a) $\frac{5}{3}$; b) $\frac{3}{0}$. Justifică răspunsul dat.

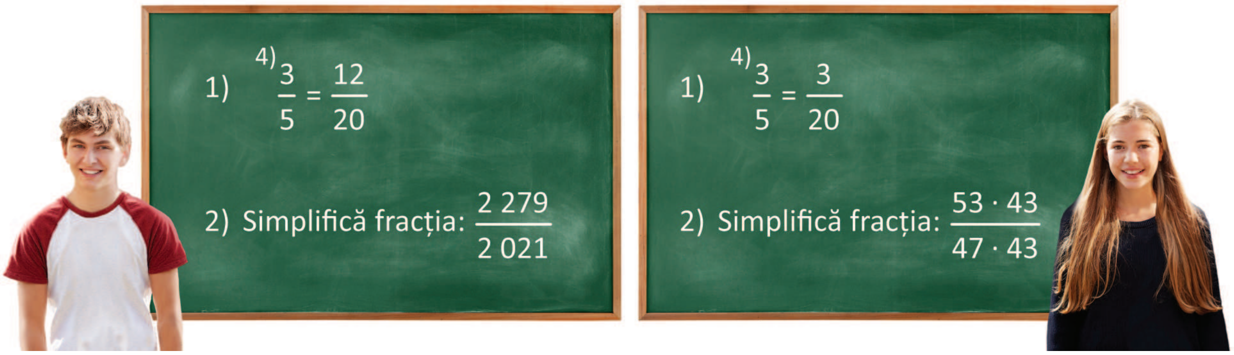


Figura 1 – Fracții

2. Completează spațiile punctate pentru a obține afirmații adevărate. Dacă $\frac{a}{b}$ este fracție, atunci a și b sunt numere ...., iar b este diferit de .... . Dacă $\frac{a}{b}$ este raport, atunci a și b sunt numere ...., iar b este diferit de .... .

Important

- Numim **fracție algebrică** raportul dintre două expresii algebrice.

Exemple: $F(x) = \frac{3x}{x^2+1}$; $F(x,y) = \frac{1}{x+y}$; $F(a) = \frac{3a-1}{a^2+a+1}$.

- O fracție algebrică se poate **amplifica** cu un număr real nenul sau cu o expresie algebrică. Prin amplificare, numărătorul și numitorul se înmulțesc cu acel număr sau cu acea expresie algebrică.

Exemple: $$^{5)}\frac{3x}{x^2+1} = \frac{5 \cdot 3x}{5(x^2+1)} = \frac{15x}{5x^2+5};$$

$$^{x+2)}\frac{x+1}{x-2} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2+x+2x+2}{x^2-4} = \frac{x^2+3x+2}{x^2-4}.$$

- O fracție algebrică se poate **simplifica** cu un număr real nenul sau cu o expresie algebrică. Prin simplificare, numărătorul și numitorul se împart la acel număr sau la acea expresie algebrică.

- Pentru simplificarea unei fracții algebrice este obligatorie descompunerea în factori a numărătorului și a numitorului.

Exemplu: Simplifică fracția algebrică $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$.

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Pentru a simplifica fracția descompunem în factori numărătorul și numitorul. La numărător recunosc pătratul sumei, iar la numitor recunosc diferența de pătrate.

Cum scriu: $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}=\dfrac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)}$

Pas 2. Fracția se simplifică prin $x+2$.

La numărător, paranteza $x+2$ apare de două ori $((x+2)^2=(x+2)(x+2))$. Prin simplificare dispare un $x+2$ și rămâne un $x+2$, de aceea vom „tăia” numai exponentul. La numitor „tăiem” paranteza $x+2$.

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}=\frac{(x+2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+2)}(x-2)}=\frac{x+2}{x-2}$$

- Pentru a calcula **valoarea numerică a unei fracții algebrice** înlocuiesc literele cu numere și efectuez calculele.

Exemplu: Calculează valoarea numerică a fracției algebrice $F(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$ *pentru* $x=3$.

Soluție: Avem $F(3)=\dfrac{3\cdot3+1}{3-2}=\dfrac{10}{1}=10$.

- Valoarea numerică a unei fracții algebrice nu se poate calcula pentru orice număr real.

Exemplu: Încercând să calculezi valoarea numerică a fracției algebrice $F(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$ *pentru* $x=2$, *vei obține* $F(2)=\dfrac{3\cdot2+1}{2-2}=\dfrac{7}{0}$, *iar o fracție sau un raport nu pot avea numitorul egal cu zero.*

- Mulțimea numerelor reale pentru care se poate calcula valoarea numerică a unei fracții algebrice se numește **mulțimea de definiție a fracției algebrice** (D).
- În general, mulțimea de definiție a unei fracții algebrice este mulțimea numerelor reale din care se elimină soluțiile ecuației „**NUMITORUL = 0**”.

Exemplu: Stabilește mulțimea de definiție a fracției algebrice $F(x)=\dfrac{2x^2-1}{3x+6}$.

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Rezolv ecuația „**NUMITORUL = 0**”.

Cum scriu: $3x+6=0\Rightarrow 3x=-6\,|:3\Rightarrow x=-2$

Pas 2. Scriu mulțimea de definiție a fracției algebrice.

$$D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$$

Exersează!

3. Mulțimea de definiție a fracției algebrice $\dfrac{2}{x-1}$ este:
A. $\mathbb{R}$; B. $\mathbb{Z}$; C. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; D. $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Scrie pe caiet litera corespunzătoare răspunsului corect.

4. Mulțimea de definiție a fracției algebrice $\dfrac{2x}{x+4}$ este:
A. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; B. $\mathbb{R}$; C. $\mathbb{R}\setminus\{0,-4\}$; D. $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$. Scrie pe caiet litera corespunzătoare răspunsului corect.

5. Pentru $x=1$ determină valoarea numerică a fiecăreia dintre următoarele fracții algebrice:
a) $\dfrac{3x-2}{x^2}$; b) $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$; c) $\dfrac{x-2}{x^2-2x-2}$.

6. Pentru $x = -2$ determină valoarea numerică a fiecăreia dintre următoarele fracții algebrice:

a) $\frac{3x-2}{x^2}$; b) $\frac{x+1}{x^2+x+1}$; c) $\frac{x-2}{x^2-2x-2}$.

7. Distanța parcursă de un mobil care se deplasează cu viteza constantă v se determină cu formula $d = vt$, unde t este timpul de deplasare. Cu ce viteză constantă se deplasează un mobil care parcurge 270 km în 3 ore?

8. Determină mulțimea de definiție pentru fiecare dintre următoarele fracții algebrice:

a) $\frac{2x-1}{2x+4}$; b) $\frac{-8}{x^2}$; c) $\frac{6x+5}{x(x+1)}$; d) $\frac{6}{2x^2+3}$.

9. Prin amplificare cu numărul real nenul x, fracția algebrică $\frac{3x}{x+1}$, unde $x \neq -1$, devine:

A. $\frac{3x^2}{x^2+1}$; B. $\frac{3x^2}{x^2+x}$; C. $\frac{3x}{x^2+x}$; D. $\frac{3x^2}{x+1}$. Scrie pe caiet litera corespunzătoare răspunsului corect.

10. Prin simplificarea fracției algebrice $\frac{3x^2}{2x}$, unde $x \neq 0$, se obține:

A. $\frac{3}{2}$; B. $\frac{3x}{2x}$; C. $\frac{3x}{2}$; D. $\frac{3}{2x}$. Scrie pe caiet litera corespunzătoare răspunsului corect.

11. Amplifică cu numărul real x, $x \neq 0$, următoarele fracții algebrice:

a) $\frac{1}{x}$; b) $\frac{5x}{x+2}$, unde $x \neq -2$; c) $\frac{x+4}{x^2+1}$; d) $\frac{x^3+4x+1}{x^2-5x}$, unde $x \neq 5$.

Model : ${}^{x)}\frac{x+1}{x^2+2} = \frac{x(x+1)}{x(x^2+2)} = \frac{x^2+x}{x^3+2x}$.

12. Scrie fracția algebrică rezultată în urma amplificării (valorile lui x sunt cele din mulțimea de definiție a fiecărei fracții algebrice):

a) ${}^{3)}\frac{5}{x^2}$; b) ${}^{2x)}\frac{6x}{x^2-1}$; c) ${}^{x+4)}\frac{x-1}{x+1}$; d) ${}^{\sqrt{3}-x)}\frac{x}{x\sqrt{3}+1}$; e) ${}^{-x^2)}\frac{3}{x^2-5}$.

13. Simplifică următoarele fracții algebrice (valorile lui x, y și z sunt cele din mulțimea de definiție a fiecărei fracții algebrice):

a) $\frac{ax}{bx}$; b) $\frac{18x}{24x^2}$; c) $\frac{6xy}{15x^2y^3}$; d) $\frac{27xy^3z^2}{45x^2y^2z^3}$; e) $\frac{x^3}{x(x-1)}$; f) $\frac{x+1}{4x(x+1)^2}$; g) $\frac{(x+2)(x-1)}{3(x+2)}$; h) $\frac{(x+3)^2}{5x(x+3)^3}$.

14. Simplifică fracțiile algebrice (valorile lui x sunt cele din mulțimea de definiție a fiecărei fracții algebrice):

a) $\frac{3x-6}{4x-8}$; b) $\frac{x^2-1}{x+1}$; c) $\frac{(x-3)^2}{x^2-9}$; d) $\frac{3(x^2-1)}{9x(x+1)}$; e) $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$; f) $\frac{5x^3+5x^2}{10(x^2-1)}$; g) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-4x+3}$;

h) $\frac{x^2+5x+6}{(x+3)^2}$; i) $\frac{x^2-x-6}{x^2+2x-15}$.

15. Se consideră fracția algebrică $E(x) = \frac{x^2-10x+25}{x^3-25x}$.

a) Arată că $x^3 - 25x = x(x-5)(x+5)$.

b) Determină mulțimea de definiție a fracției algebrice $E(x)$.

c) Arată că $E(x) = \frac{x-5}{x(x+5)}$.

d) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $E(x) = \frac{1}{x(x+5)}$.

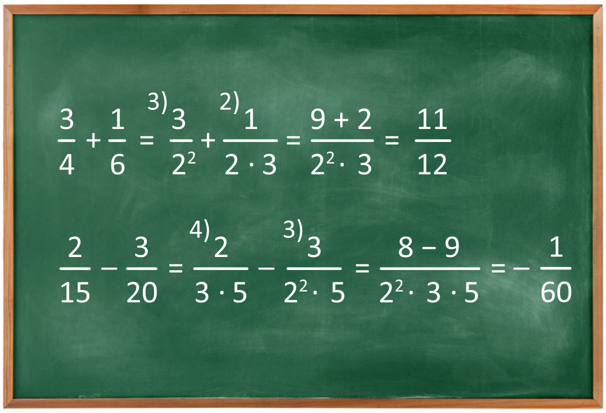
2. Operații cu fracții algebrice (adunarea și scăderea)

Amintește-ți!

1. Urmărește, cu atenție, exercițiile de pe tabla din *Figura 2* și completează, oral, textul de mai jos.

Pentru a aduna sau scădea numere raționale scrise ca fracții ordinare trebuie să le aducem .... . Pentru aceasta toți numitorii se descompun în puteri de numere prime. Numitorul comun este produsul factorilor .... și .... luați cu cel mai .... exponent la care apar. După determinarea numitorului comun, fiecare fracție se .... cu numărul potrivit.

2. Calculează: a) $\frac{3}{20}+\frac{2}{30}$; b) $\frac{1}{12}-\frac{3}{16}$.



$$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}={}^{3)}\frac{3}{2^2}+{}^{2)}\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{9+2}{2^2\cdot 3}=\frac{11}{12}$$

$$\frac{2}{15}-\frac{3}{20}={}^{4)}\frac{2}{3\cdot 5}-{}^{3)}\frac{3}{2^2\cdot 5}=\frac{8-9}{2^2\cdot 3\cdot 5}=-\frac{1}{60}$$

Figura 2 – Calcule

Important

• Adunarea (scăderea) a două fracții algebrice care au același numitor se efectuează adunând (scăzând) numărătorii și păstrând numitorul.

Exemple: a) $\frac{x-3}{x+2}+\frac{2x-1}{x+2}=\frac{(x-3)+(2x-1)}{x+2}=\frac{x-3+2x-1}{x+2}=\frac{3x-4}{x+2}$;

b) $\frac{2x-3}{x+2}-\frac{x-1}{x+2}=\frac{(2x-3)-(x-1)}{x+2}=\frac{2x-3-x+1}{x+2}=\frac{x-2}{x+2}$.

• Dacă fracțiile algebrice nu au același numitor, pentru adunare sau scădere, se aduc la același numitor prin amplificare sau simplificare.

Exemple: Calculează a) $\frac{x-1}{3x+3}+\frac{x}{x^2-1}$; *b)* $\frac{x-2}{x^2-9}-\frac{x-3}{x^2+6x+9}$.

Soluție: a) $\frac{x-1}{3x+3}+\frac{x}{x^2-1}$.

Cum gândesc: Pas 1. Pentru a efectua adunarea trebuie să aduc fracțiile la același numitor. Numitorul comun îl determin prin descompunerea în factori a numitorilor. Pentru primul numitor scot factor comun pe 3, iar pentru al doilea folosesc diferența de pătrate.

Cum scriu: $\frac{x-1}{3x+3}+\frac{x}{x^2-1}=\frac{x-1}{3(x+1)}+\frac{x}{(x+1)(x-1)}$

Pas 2. Numitorul comun este produsul factorilor comuni și necomuni luați cu cel mai mare exponent la care apar. În cazul nostru numitorul comun este $3(x+1)(x-1)$. Prima fracție se amplifică cu $x-1$, iar a doua cu 3.

$${}^{x-1)}\frac{x-1}{3(x+1)}+{}^{3)}\frac{x}{(x+1)(x-1)}=\frac{(x-1)^2+3x}{3(x+1)(x-1)}$$

Pas 3. La numărător efectuez calculele. Numitorul îl las sub formă de produs.

$$\frac{(x-1)^2+3x}{3(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-2x+1+3x}{3(x+1)(x-1)}=\frac{x^2+x+1}{3(x+1)(x-1)}$$

b) $\dfrac{x-2}{x^2-9}-\dfrac{x-3}{x^2+6x+9}$.

Cum gândesc: **Pas 1.** Pentru a efectua scăderea trebuie să aduc fracțiile la același numitor. Numitorul comun îl determin prin descompunerea în factori a numitorilor. Pentru primul numitor folosesc diferența de pătrate, iar pentru al doilea numitor folosesc pătratul sumei.

Cum scriu: $\dfrac{x-2}{x^2-9}-\dfrac{x-3}{x^2+6x+9}=\dfrac{x-2}{(x-3)(x+3)}-\dfrac{x-3}{(x+3)^2}$

Pas 2. Numitorul comun este produsul factorilor comuni și necomuni luați cu cel mai mare exponent la care apar. În cazul nostru numitorul comun este $(x-3)(x+3)^2$. Prima fracție se amplifică cu $x+3$, iar a doua cu $x-3$.

$$^{x+3)}\dfrac{x-2}{(x-3)(x+3)}-{}^{x-3)}\dfrac{x-3}{(x+3)^2}=\dfrac{(x-2)(x+3)-(x-3)^2}{(x-3)(x+3)^2}$$

Pas 3. La numărător efectuez calculele. Numitorul îl las sub formă de produs.

$$\dfrac{(x-2)(x+3)-(x-3)^2}{(x-3)(x+3)^2}=\dfrac{x^2+3x-2x-6-(x^2-6x+9)}{(x-3)(x+3)^2}=$$

$$=\dfrac{\cancel{x^2}+3x-2x-6-\cancel{x^2}+6x-9}{(x-3)(x+3)^2}=\dfrac{7x-15}{(x-3)(x+3)^2}$$

Exersează!

3. Pentru x aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții algebrice, efectuează: a) $\dfrac{x}{6}+\dfrac{3x}{6}$; b) $\dfrac{x+1}{7}+\dfrac{x-4}{7}$; c) $\dfrac{x+1}{7}-\dfrac{x-4}{7}$; d) $\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{2x-3}{4}+\dfrac{5x}{8}$; e) $\dfrac{4}{x}+\dfrac{5+x}{x^2}$; f) $\dfrac{-5x}{x+2}+\dfrac{x+1}{5(x+2)}$.

4. Pentru x aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții algebrice, efectuează: a) $\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x}{x+1}$; b) $\dfrac{4x}{x^2-1}+\dfrac{5}{x-1}-\dfrac{7}{x+1}$; c) $\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{4x}{x}-\dfrac{x}{x+1}$; d) $\dfrac{5}{x^2+4x}+\dfrac{7}{x^2-4x}$; e) $\dfrac{x+1}{2x-2}-\dfrac{3}{x^2-1}-\dfrac{x+3}{2x+2}$; f) $\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{8}{1-x}$; g) $1-\dfrac{3x}{x-2}+\dfrac{5x}{x+2}$; h) $\dfrac{2x}{4x^2-1}-\dfrac{5}{1-2x}$.

5. Pentru x aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții algebrice, efectuează:

a) $\dfrac{3x}{2+x}-\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{10}{x^2-4}$; b) $\dfrac{x}{x+3}-\left(\dfrac{x+2}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$; c) $\dfrac{1}{x+1}-\left(\dfrac{x-2}{x^2-x}-\dfrac{x+2}{x}\right)$;

d) $\dfrac{4+x^2}{2x}-\dfrac{x^2}{x^2+2x}-\dfrac{x^2}{2x+4}$; e) $\dfrac{x+3}{x^2-6x+9}-\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

6. Pentru x aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții algebrice, efectuează:

a) $\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{2x^2+x}{x^2+x-6}$; b) $\dfrac{x-2}{x-3}+\dfrac{1-4x}{x^2-5x+6}$; c) $\dfrac{x+1}{x^2-4}-\dfrac{x}{x^2-x-6}$;

d) $\dfrac{1-x}{x^2+5x+6}-\dfrac{x}{x^2+3x+2}$; e) $\dfrac{x+1}{x^2-x-2}-\dfrac{x+2}{x^2-1}$.

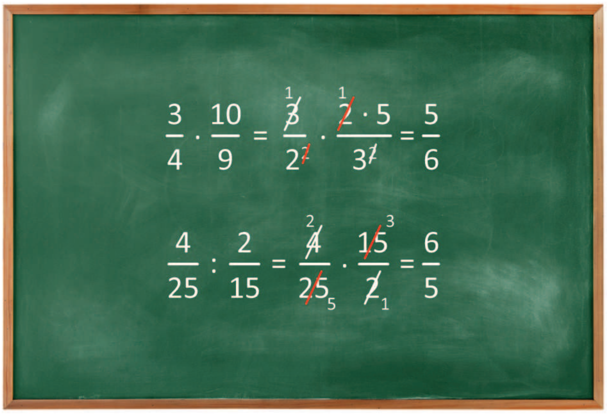
3. Operații cu fracții algebrice (înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere)

Amintește-ți!

1. Urmărește cu atenție exercițiile de pe tabla din *Figura 3* și completează, oral, textul de mai jos.

Pentru a înmulți două numere raționale reprezentate prin fracții ordinare, mai întâi efectuăm eventualele .... . Pentru aceasta este de preferat ca toți numărătorii și numitori să fie .... în puteri de numere prime. Orice simplificare se face între un .... și un .... . Împărțirea numerelor raționale scrise ca fracții ordinare se transformă în .... între prima fracție și .... celei de-a doua.

2. Calculează: a) $\frac{9}{20}\cdot\frac{8}{3}$; b) $\frac{6}{25}:\frac{27}{15}$.



$$\frac{3}{4}\cdot\frac{10}{9}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{2^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{2}}\cdot 5}{3^{\cancel{2}}}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{4}{25}:\frac{2}{15}=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{5}{\cancel{25}}}\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}=\frac{6}{5}$$

Figura 3 – Calcule

Important

- La înmulțirea a două fracții algebrice se înmulțesc numărătorii între ei și numitorii între ei.

- Înainte de înmulțire, se recomandă efectuarea tuturor simplificărilor posibile. Orice simplificare se face între un factor de la numărător și un factor de la numitor.

- Pentru simplificare, toți numărătorii și toți numitorii se descompun în factori.

Exemplu: Calculează: $\frac{2x-4}{x+3}\cdot\frac{x^2-9}{x^2-4x+4}$, *unde* $x\neq -3$ *și* $x\neq 2$.

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Se recomandă, mai întâi, efectuarea tuturor simplificărilor posibile. Pentru aceasta trebuie să descompun toți numărătorii și toți numitorii.

Pentru primul numărător scot factor comun pe 2.

Primul numitor nu se mai descompune. Pentru al doilea numărător folosesc diferența de pătrate, iar pentru al doilea numitor folosesc pătratul diferenței.

Cum scriu: $\frac{2x-4}{x+3}\cdot\frac{x^2-9}{x^2-4x+4}=\frac{2(x-2)}{x+3}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)^2}$

Pas 2. Se simplifică $x-2$ de la primul numărător cu un $x-2$ de la al doilea numitor (fiind la puterea a doua sunt doi factori egali cu $x-2$).

Se simplifică, de asemenea, $x+3$ de la primul numitor cu $x+3$ de la al doilea numărător.

Acum înmulțesc numărătorii rămași între ei și numitorii rămași între ei.

$$\frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x+3}}\cdot\frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{(x-2)^{\cancel{2}}}=\frac{2(x-3)}{x-2}$$

• Împărțirea a două fracții algebrice se transformă în înmulțire între prima fracție și inversa celei de-a doua.

Exemplu: Calculează: $\frac{2x-4}{x+3} : \frac{x^2-4x+4}{x^2-9}$*, unde* $x \neq -3$*,* $x \neq 2$ *și* $x \neq 3$*.*

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Împărțirea se transformă în înmulțire între prima fracție și inversa celei de-a doua fracții.

Cum scriu: $\frac{2x-4}{x+3} : \frac{x^2-4x+4}{x^2-9} = \frac{2x-4}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{x^2-4x+4}$

Pas 2. Acum procedez ca la înmulțire. Descompun în factori toți numărătorii și numitorii în vederea eventualelor simplificări.

$$\frac{2x-4}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{x^2-4x+4} = \frac{2(x-2)}{x+3} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)^2}$$

Pas 3. Efectuez simplificările și apoi înmulțesc numărătorii rămași între ei și numitorii rămași între ei.

$$\frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x+3}} \cdot \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{(x-2)^{\cancel{2}}} = \frac{2(x-3)}{x-2}$$

• O fracție algebrică se ridică la o putere ridicând la acea putere atât numărătorul cât și numitorul.

Exemplu: Calculează $\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2$*, unde* $x \neq -2$*.*

Soluție: $\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2 = \frac{(2x)^2}{(x+2)^2} = \frac{4x^2}{x^2+4x+4}$.

• Respectarea semnificației parantezelor și ordinea efectuării operațiilor de la numere reale se aplică și pentru fracțiile sau expresiile algebrice.

Exemplu: Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x-2} \cdot \frac{2x-4}{x-1}\right) : \frac{x-3}{x^2-1}$*, unde* x *este număr real,* $x \neq -1$*,* $x \neq 1$*,* $x \neq 2$ *și* $x \neq 3$*.*

Arată că $E(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x-3}$*.*

Soluție:

$$E(x) = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x-2} \cdot \frac{2x-4}{x-1}\right) : \frac{x-3}{x^2-1} = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{\cancel{x-2}} \cdot \frac{2\cancel{(x-2)}}{x-1}\right) : \frac{x-3}{x^2-1} =$$

$$= \left({}^{x-1)}\frac{1}{x+1} + {}^{x+1)}\frac{2x}{x-1}\right) : \frac{x-3}{x^2-1} = \frac{x-1+2x(x+1)}{(x-1)(x+1)} : \frac{x-3}{x^2-1} = \frac{x-1+2x^2+2x}{(x-1)(x+1)} : \frac{x-3}{x^2-1} =$$

$$= \frac{2x^2+3x-1}{(x-1)(x+1)} : \frac{x-3}{x^2-1} = \frac{2x^2+3x-1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x^2-1}{x-3} = \frac{2x^2+3x-1}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}} \cdot \frac{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}{x-3} = \frac{2x^2+3x-1}{x-3}.$$

Exersează!

3. Pentru x și y aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții algebrice, efectuează următoarele înmulțiri:

a) $\frac{2x}{3y}\cdot\frac{9}{8x}$; b) $\frac{3xy}{10z}\cdot\frac{6z^2}{15xy^2}$; c) $\frac{a}{7xy}\cdot\frac{14x}{5a}$; d) $-\frac{x^2}{22ax}\cdot\frac{33a^2}{5x}$; e) $\frac{8}{5xy}\cdot\frac{10x^3y^3}{4x}\cdot\frac{6}{2y^2}$.

4. Pentru x, y, a și b aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții algebrice, efectuează următoarele împărțiri:

a) $\frac{1}{4x^2}:\frac{5}{8x}$; b) $\frac{x+1}{x^2}:\frac{2x+2}{3x}$; c) $\frac{15xy^2z^3}{21ab}:\frac{20x^2yz^2}{14a^2b}$; d) $\frac{3}{10}:\frac{6}{5a}:\frac{9}{a^2}$; e) $\frac{xy^2}{xy+x^2}:\frac{xy}{y^2+xy}$.

5. Pentru x și y aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții algebrice, efectuează:

a) $\frac{3x-6y}{(x-2y)^2}\cdot\frac{x^2-4y^2}{9x}$; b) $\frac{2x-6}{x^2-5x+6}\cdot\frac{5x(x-2)}{4x}$; c) $\frac{x^2-2x}{x^2+4x+4}:\frac{8x^2-16x}{5x+10}$;

d) $\frac{3x+2}{x^2}\cdot\frac{5x^4}{9x^2-4}:\frac{15x}{3x-2}$; e) $\frac{4x^2+2x}{4x^2-1}:\frac{4x^2}{7}\cdot\frac{14x-7}{5x}$.

6. Pentru x și y aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții algebrice, efectuează următoarele ridicări la putere:

a) $\left(\frac{1}{3x}\right)^2$; b) $\left(-\frac{3x}{5y}\right)^3$; c) $\left(-\frac{x}{y+1}\right)^2$; d) $\left(\frac{2}{3x}\right)^{-2}$; e) $\left(\frac{x+y}{x-1}\right)^{-2}$.

7. Pentru x, y și z aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții algebrice, efectuează:

a) $\left(\frac{x}{y}\right)^2:\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^2\cdot\frac{y^2}{x}$;

b) $\frac{2x^4}{9y^3}\cdot\left(\frac{3x^2}{2y^2}\right)^3:\left(\frac{x^4}{y^3}\right)^2$;

c) $\left(\frac{x}{yz^2}\right)^3\cdot\left(\frac{x}{y^2z}\right)^2:\left(\frac{x^3}{y^3z}\right)^3$;

d) $\left(\frac{x+1}{y}\right)^2:\frac{x^2-1}{y^3}$.

8. Pentru x aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții algebrice, efectuează, respectând ordinea operațiilor și semnificația parantezelor:

a) $\left(\frac{x^2}{9}-\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{4}\right):\frac{x^2}{72}$;

b) $\left(\frac{x^2-1}{x^2+x}+\frac{x+3}{x}\right)\cdot\frac{x^2}{x^2-1}$;

c) $\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right):\frac{12}{x^2-6x+9}$;

d) $\left(\frac{1}{3-2x}+\frac{2x}{4x^2-9}\right):\left(1-\frac{2x-3}{2x+3}\right)$;

e) $\frac{11x-7}{x-5}:\left(\frac{x}{x-5}-\frac{2}{x^2-25}-\frac{x-1}{x+5}\right)$;

f) $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}\cdot\left(\frac{x-2}{x-3}-\frac{x^2-3}{x^2-9}+\frac{x+2}{x+3}\right)$.

9. Se consideră expresia algebrică $E(x)=\left(\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x}\right)\cdot(x^2-x)$, unde $x\neq 0$ și $x\neq 1$. Arată că $E(a)=E(b)$, pentru orice a și b din mulțimea de definiție a expresiei algebrice.

10. Se consideră expresia algebrică $E(x)=\frac{4x^2-49}{4x^2+28x+49}:\frac{2x^2-7x}{2x+7}$, unde $x\neq-\frac{7}{2}$, $x\neq 0$, $x\neq\frac{7}{2}$.

Arată că $E(x)=\frac{1}{x}$, pentru orice număr real x, $x\neq-\frac{7}{2}$, $x\neq 0$, $x\neq\frac{7}{2}$.

11. Se consideră expresia algebrică $E(x)=\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{1-x}\right):\dfrac{1}{x^2-1}$, unde $x\neq -1$ și $x\neq 1$. Arată că $E\left(x\right)$ este un număr întreg, pentru orice număr real x, $x\neq -1$ și $x\neq 1$.

12. Se consideră expresia algebrică $E(x)=\dfrac{x^3-4x^2-5x+20}{x^3-5x}$.

a) Determină mulțimea de definiție D, a fracției algebrice;

b) Arată că expresia $E\left(x\right)=\dfrac{x-4}{x}$, pentru oricce $x\in D$;

c) Calculează $E\left(\sqrt{3}\right)$;

d) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $E(x)=x-4$.

PROIECT – Modelare matematică în 3D

• Ce veți face?

Realizarea unor obiecte tridimensionale virtuale, prin modelarea unor fracții algebrice.

• De ce veți face?

Cu scopul de a observa cum vă ajută matematica să reprezentați diverse fenomene pe care le întâlniți în realitate.

• Cum veți face?

▷ Intrați pe www.wolframalpha.com. Scrieți în caseta principală o expresie algebrică dependentă de două litere și apoi apăsați Enter.

▷ Studiați reprezentarea 3D pe care ați obținut-o.

▷ Căutați cel puțin trei reprezentări, scrieți expresiile lor algebrice și oferiți o interpretare a acestor reprezentări (ce ar putea fi în realitate).

• Cum veți ști că ați reușit?

Veți prezenta proiectul vostru, iar colegii din celelalte grupe vor face aprecieri și sugestii.

• Ce se evaluează?

▷ utilizarea fracțiilor algebrice pentru a obține o reprezentare 3D;

▷ participarea tuturor membrilor grupului la căutarea informațiilor;

▷ forma atractivă a desenelor / imaginilor utilizate;

▷ prezentarea clară a proiectului.

Sugestii

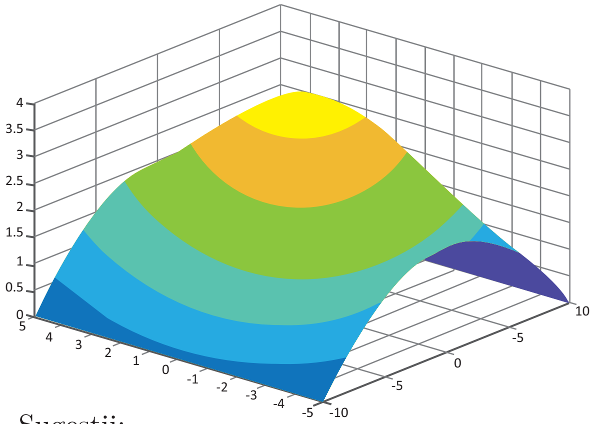
• Organizați-vă în grupuri de 3-4 colegi și stabiliți-vă rolurile.

• Folosiți imagini și informații relevante pentru a prezenta toate obiectivele turistice.

Model: Movila 3D

Movila poate fi reprezentată prin expresia algebrică

$M(x,y)=\dfrac{x^2-100}{y^2+25}$, unde $x\in(-10,10)$ și $y\in(-5,5)$.



Sugestii:

• Prezentați proiectul într-un mod inedit.

• Stabiliți, împreună cu profesorul, un proiect câștigător.

4. Recapitulare

1. Prin amplificare cu $2x$, fracția $\frac{x-1}{x}$ devine:

A. $\frac{x-1}{2x^2}$; B. $\frac{2x^2-1}{2x^2}$; C. $\frac{2x^2-2x}{2x^2}$; D. $\frac{2x^2+2x}{2x^2}$.

Scrie, pe caiet, litera corespunzătoare răspunsului corect.

2. După simplificare, fracția $\frac{5x^2+2x}{5x^3}$, unde $x \neq 0$ devine:

A. $\frac{1+2x}{x}$; B. $\frac{x+2}{x^2}$; C. $\frac{7}{5}$; D. $\frac{5x+2}{5x^2}$.

Scrie, pe caiet, litera corespunzătoare răspunsului corect.

3. Pentru x, t și z aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții algebrice, amplifică cu $x-1$ următoarele fracții:

a) $\frac{1}{x}$; b) $\frac{3}{x+1}$; c) $\frac{x-1}{x+2}$; d) $\frac{x^2+2}{2x-3}$; e) $\frac{x-4}{x+5}$.

4. Pentru x, t și z aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții algebrice, simplifică fracțiile următoare:

a) $\frac{2x+8y}{4t+6z}$; c) $\frac{3x^2-2x}{x^3}$; e) $\frac{x^4+3x^3+2x^2}{x^6+5x^5+4x^4}$; g) $\frac{x+2}{x^2+4x+4}$;

b) $\frac{2x^2+8x}{4x^3+6x}$; d) $\frac{5x^3-x^2}{x^5+4x^3}$; f) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$; h) $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$.

5. Valoarea numerică a fracției $\frac{x+1}{x-2}$ pentru $x=1$ este:

A. 2; B. $\frac{2}{3}$; C. -1; D. -2.

Scrie, pe caiet, litera corespunzătoare răspunsului corect.

6. Determină valoarea numerică a următoarelor fracții algebrice pentru valorile specificate:

a) $\frac{x+1}{x-2}$ pentru $x=0$ și $x=-1$; c) $\frac{z^2-6z-9}{z^2+4z-4}$ pentru $z=1$ și $z=-2$.

b) $\frac{y^2+y+1}{y^3-1}$ pentru $y=2$ și $y=-1$;

7. Dacă un mobil se deplasează cu viteza constantă v, timpul cât durează deplasarea se determină cu formula $t=\frac{d}{v}$, unde d este distanța parcursă. În cât timp parcurge un mobil distanța de 540 km, dacă se deplasează cu 90 km/h?

8. Determină mulțimea de definiție a următoarelor fracții algebrice:

a) $\frac{1}{x-1}$; c) $\frac{x}{x^2+2}$; e) $\frac{y^2-1}{y^2-4}$; g) $\frac{x}{x^2-6x-7}$;

b) $\frac{y+2}{y-3}$; d) $\frac{x^2-1}{x^2+x}$; f) $\frac{a^6+16a^3+64}{4a^2-4a+1}$; h) $\frac{x-3}{x^2+4x-21}$.

9. Pentru x aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții algebrice, efectuează:

a) $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{3x+2}{x+1}$;

b) $\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x-2}{x+1}$;

c) $\dfrac{2x-1}{x+3}-\dfrac{3x-2}{x+3}$;

d) $\dfrac{x-3}{x}-\dfrac{x-1}{x+1}$;

e) $\dfrac{3x}{5x+10}+\dfrac{2x+1}{4x+8}$;

f) $\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{x-1}{x+2}$;

g) $\dfrac{7x}{6x+4}-\dfrac{5x+1}{15x+10}$;

h) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}$;

i) $\dfrac{x-3}{x-2}-\dfrac{x+2}{x-3}$;

j) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}+\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}$;

k) $\dfrac{x^2+5x}{x^2+10x+25}-\dfrac{4x^2-4x+1}{2x^2-x}$;

l) $\dfrac{x}{x^2+8x+7}+\dfrac{x-2}{x^2-1}$;

m) $\dfrac{x+3}{x^2+6x-27}-\dfrac{x}{x^2-81}$.

10. Pentru x aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții algebrice, efectuează:

a) $\dfrac{x+3}{x}\cdot\dfrac{x}{x-2}$;

b) $\dfrac{x+1}{x-1}:\dfrac{x}{x-1}$;

c) $\dfrac{2x+4}{3x-1}\cdot\dfrac{9x^2-6x+1}{x^2+4x+4}$;

d) $\dfrac{4x^2-20x+25}{25x^2-20x+4}\cdot\dfrac{25x^2-4}{4x^2-25}$;

e) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+7x+12}\cdot\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+5x+6}$;

f) $\dfrac{x^2-8x+16}{16x^2-8x+1}:\dfrac{3x-12}{12x-3}$;

g) $\dfrac{2x-10}{3x+6}:\dfrac{2x^2-20x+50}{x^2+2x}$.

11. Pentru x aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții algebrice, efectuează:

a) $\left(\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{2x-1}\right)\cdot\left(x-\dfrac{1}{4x}\right)$;

b) $\left(\dfrac{1}{3x-2}-\dfrac{1}{3x+2}\right):\left(1+\dfrac{4}{9x^2-4}\right)$;

c) $\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)\cdot\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$;

d) $\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}\right):\dfrac{4x^2-25}{x^2+6x+9}$;

e) $\left(\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}+\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}\right)\cdot\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+4x+4}$.

12. Se consideră expresia algebrică $E(x)=\left(\left(\dfrac{1}{x+2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{x+3}\right)^2\right)\cdot\left(\dfrac{x^2+5x+6}{4x+10}\right)^2-\dfrac{1}{8x-20}$, unde x este număr real, $x\neq-3$, $x\neq-\dfrac{5}{2}$, $x\neq-2$ și $x\neq\dfrac{5}{2}$.

a) Arată că $E(x)=\dfrac{5}{50-8x^2}$ pentru orice x număr real, $x\neq-3$, $x\neq-\dfrac{5}{2}$, $x\neq-2$ și $x\neq\dfrac{5}{2}$.

b) Rezolvă în mulțimea $\mathbb{R}\setminus\left\{-3,\,-\dfrac{5}{2},\,-2,\dfrac{5}{2}\right\}$ ecuația $E(x)=\dfrac{1}{5+2x}$.

c) Rezolvă în mulțimea $\mathbb{R}\setminus\left\{-3,\,-\dfrac{5}{2},\,-2,\dfrac{5}{2}\right\}$ inecuația $E(x)\geq 0$.

AUTOEVALUARE – În această unitate de învățare:

Am înțeles foarte bine ....

Îmi este neclar ....

Nu știu să .... / Nu am înțeles ....

Revezi lecțiile și exercițiile noțiunilor notate la culoarea galbenă. Discută cu un coleg/ o colegă sau cu profesorul despre ceea ce nu ai înțeles și ai completat la culoarea roșie.

5. Evaluare

Timp de lucru: 45 de minute
Din oficiu 10p

1. Amplificată cu $x \neq 0$, fracția $\dfrac{x-2}{x^2+1}$ devine: *5p*

A. $\dfrac{x^2-2}{x^2+1}$; B. $\dfrac{x^2-2x}{x^2+1}$; C. $\dfrac{x^2-2x}{x^3+x}$; D. $\dfrac{x^2-2x}{x^3+1}$.

2. După simplificare, fracția $\dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$ devine: *5p*

A. $\dfrac{x}{2}$; B. $-\dfrac{x}{2}$; C. $\dfrac{x}{x^2-4}$; D. $\dfrac{x}{x-2}$.

3. Valoarea numerică a fracției algebrice $F(x) = \dfrac{x-3}{3x+1}$, pentru $x = -1$, este egală cu: *5p*

A. 1; B. $\dfrac{1}{2}$; C. 2; D. -2.

4. Efectuează:

a) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$; *5p*

b) $\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x+3}$; *5p*

c) $\dfrac{x}{x-1} \cdot \dfrac{2x-2}{x^2}$; *5p*

d) $\dfrac{x+2}{x} : \dfrac{4x+8}{x^3}$. *5p*

5. Efectuează $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}\right) \cdot \dfrac{x^2}{2x+1}$, unde x este număr real, $x \neq -1$, $x \neq -\dfrac{1}{2}$ și $x \neq 0$. *10p*

6. Stabilește mulțimea de definiție a fracției algebrice $F(x) = \dfrac{x-3}{x^2-5x-14}$. *15p*

7. Se consideră expresia algebrică $E(x) = \left(\dfrac{x}{x^2+4x+4} + 1\right) : \left(1 - \dfrac{1}{x+2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{-1}$, unde x este număr real, $x \neq -2$, $x \neq -1$.

a) Arată că $E(x) = x + 4$, pentru orice *5p*

b) Rezolvă, în mulțimea numerelor reale, ecuația $E(x) = 2$; *5p*

c) Determină numerele naturale n pentru care $n \cdot E(n) = 12$. *5p*

8. Un teren în formă de dreptunghi are aria egală cu 288 m^2.

Determină lungimea gardului care înconjoară terenul, știind că lungimea terenului este cu 12 m mai mare decât lățimea sa. *15p*

6. Exersezi și progresezi

1. Valoarea numerică a fracției algebrice $\dfrac{x^2-2}{x-4}$ pentru $x=2$ este egală cu:

A. 1; B. 2; C. -1; D. -2.

Scrie pe caiet litera corespunzătoare răspunsului corect.

2. Mulțimea de definiție a expresiei algebrice $E(x)=\dfrac{1}{x-2}:\dfrac{x}{x+2}$ este:

A. $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$; B. $\mathbb{R}\setminus\{-2,0,2\}$; C. $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$; D. $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$.

Scrie pe caiet litera corespunzătoare răspunsului corect.

3. Pentru x aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții algebrice, efectuează:

a) $\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{3x^3}{(x+1)^2}$; b) $\dfrac{x}{x+6}-\dfrac{x^2-1}{x^2-36}$; c) $\dfrac{3x^2}{x+6}\cdot\dfrac{x^2-36}{9x^3}$; d) $\dfrac{x^2}{x+1}:\dfrac{3x^3}{x^2+2x+1}$.

4. Pentru x și y aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții algebrice, efectuează:

a) $\dfrac{5x+10}{x^2-4}\cdot\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+16}$;

b) $\dfrac{x^2-25}{9-y^2}:\dfrac{5-x}{y-3}$;

c) $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{2x+2}\cdot\dfrac{4}{x^2+1}$;

d) $\dfrac{x^2-4}{x^2-7x+10}\cdot\dfrac{x^2-25}{3x+6}:\dfrac{x+5}{9}$;

e) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+7x+12}:\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-9x+14}$.

5. Pentru x aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții algebrice, efectuează:

a) $\left(\dfrac{4}{4-x}-\dfrac{4}{4+x}\right)\cdot\dfrac{x^2+8x+16}{x^2-16}$;

b) $\left(\dfrac{1}{2x-6}+\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{x-3}{x^2-25}$;

c) $\left(\dfrac{1-x}{x^2+x}+\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x-1}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x^2+3x}{2x-4}$;

d) $\left(\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{x+1}{x+3}\right):\dfrac{10x+6}{x^2-4x+3}$.

6. Se consideră expresia algebrică $E(x)=\left(\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{15x}{x^2-9}\right):\left(\dfrac{x^2}{x-3}-x\right)$, unde x este număr real, $x\neq-3$, $x\neq0$, $x\neq3$.

a) Arată că $E(x)=\dfrac{3}{x+3}$ pentru orice număr real x .... .

b) Determină numerele întregi pentru care $E(n)$ este număr întreg.

7. Se consideră expresia algebrică $E(x)=\left(\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{x^2+3}{x^3-x^2+x-1}\right):\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, unde x este număr real, $x\neq-1$, $x\neq1$.

a) Arată că $E(x)=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$, pentru orice număr real, $x\neq-1$, $x\neq1$.

b) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $\dfrac{1}{E(x)}\leq0$.

8. Determină mulțimea de definiție pentru fiecare fracție algebrică și apoi rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația:

a) $\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{x}{x+3}=2$; b) $\dfrac{3x-1}{2x-1}+\dfrac{2x+1}{3x+1}=\dfrac{13}{6}$; c) $\dfrac{x-3}{x+3}+\dfrac{x-2}{x+2}=6$.

Matematică – Manual pentru clasa a VIII-a

VI

Funcții. Organizarea datelor și probabilități

1. Funcții definite pe mulțimi finite, exprimate cu ajutorul unor diagrame, tabele, formule

Observă și descoperă!

1. În *Figura 1* este o parte din tabelul pe care un fost diriginte de clasa a VIII-a trebuie să îl prezinte conducerii școlii. În tabel sunt trecute numele foștilor elevi de clasa a VIII-a și numele liceelor din București la care aceștia au fost admiși în urma repartiției computerizate.

a) Ce conține coloana a doua?

b) Ce conține coloana a treia?

c) Poți explica modul în care s-a realizat asocierea dintre un elev și un liceu?

d) Este posibil ca unui elev să îi asociem două licee diferite?

e) Este posibil ca mai multor elevi să le asociem același liceu?

Tabelul din *Figura 1* reprezintă o funcție.

Nr. crt.	Numele și prenumele	Liceul
1	Andrei Dan	Colegiul Economic „Hermes”
2	Barbu Ana	Colegiul Național „I. L. Caragiale”
3	Călin Andreea	Colegiul Național „Matei Basarab”
4	Constantin Ion	Colegiul Național „Gheorghe Șincai”
5	Enescu Paul	Colegiul Național „Iulia Hașdeu”
6	Gheorghe Radu	Colegiul Național „Gheorghe Șincai”
7	Ionescu Anca	Colegiul Național „Mihai Viteazul”
8	Ionescu Cătălin	Liceul teoretic „Ion Barbu”

Figura 1 – Tabel nominal cu situația absolvenților clasei a VIII-a

Important

- Funcția este un triplet (A, B, f) format din două mulțimi nevide A și B și o lege de corespondență f prin care fiecărui element din mulțimea A i se asociază un element și numai unul din mulțimea B.

- Mulțimea A se numește **domeniul de definiție** al funcției. Elementele mulțimii A se notează, de regulă, cu x.

Exemplu: În exemplul de mai sus, domeniul de definiție este mulțimea elevilor din clasa a VIII-a.

- Mulțimea B se numește **mulțimea în care funcția ia valori**. Elementele mulțimii B se notează, de regulă, cu y.

Exemplu: În exemplul de mai sus mulțimea în care funcția ia valori este mulțimea liceelor din București.

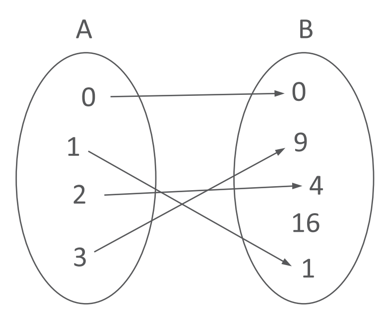
- f se numește **lege de corespondență**. Faptul că, prin legea de corespondență f, unui element $x \in A$ i se asociază elementul $y \in B$ se scrie $f(x) = y$ și se citește f **de** x **este egal cu** y.

Exemplu: În exemplul de mai sus legea de corespondență este repartiția computerizată, pe baza mediilor de admitere. Putem scrie, de exemplu, f (Andrei Dan) = Colegiul Economic „Hermes”.

- Notăm $f: A \rightarrow B$, $f(x)=y$.

Citim: Funcția f definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B, prin f de x este egal cu y.

- O funcție poate fi definită prin:

Diagramă	**Tabel**	**Formulă**
Domeniul de definiție și mulțimea în care funcția ia valori sunt reprezentate prin diagrame, iar cu ajutorul săgeților sunt evidențiate elementele corespunzătoare fiecărui element din domeniul de definiție, prin legea de corespondență f.	Pe prima linie a unui tabel se scriu toate elementele din domeniul de definiție. Pe linia a doua, sub fiecare element din domeniul de definiție se scrie elementul corespunzător, prin legea de corespondență f, din mulțimea în care funcția ia valori.	Printr-o formulă este descrisă legea de corespondență prin care unui element x din domeniul de definiție i se asociază un element din mulțimea în care funcția ia valori. (În acest exemplu, lui x i se asociază pătratul său.)
	$\begin{array}{c\|cccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f(x) & 0 & 1 & 4 & 9 \end{array}$	$f:\{0,1,2,3\} \rightarrow \{0,1,4,9,16\}$ $f(x)=x^2$

- Numim **funcție numerică** o funcție în care domeniul de definiție și mulțimea în care funcția ia valori sunt mulțimi de numere reale.

Exemplu: Funcția $f:\{0,1,2,3\} \rightarrow \{0,1,4,9,16\}$, $f(x)=x^2$ *este o funcție numerică.*

Exersează!

2. Scrie, unul după altul, primele cinci numere naturale care se obțin după regula:
a) locul pe care îl ocupă în scriere înmulțit cu 5;
b) $f(n)=3n-2$, unde n reprezintă locul pe care numărul îl ocupă în scriere;
c) $f(n)=3n+2$, unde n este un număr natural, $n \geq 10$.

3. Descoperă legea de corespondență și scrie, pe caiet, valorile numerelor a și b în fiecare caz:

a)

x	2	4	6	8	10	....	b
$f(x)$	4	6	8	10	a	...	100

b)

x	1	2	3	4	5	....	b
$f(x)$	4	7	10	13	a	....	100

c)

x	1	2	3	4	5	b	....	10
$f(x)$	2	5	10	17	26	37	....	a

d)

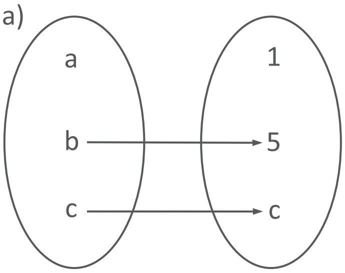
x	1	2	3	4	5	....	b
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	a	....	$\frac{1}{9900}$

4. Dacă n reprezintă locul pe care îl ocupă un număr, într-o înșiruire, scrie numerele de pe locurile 3, 5 și 10 descrise de fiecare dintre următoarele reguli:
a) $f(n)=2n+1$; b) $g(n)=n^2-1$; c) $h(n)=3n+5$.

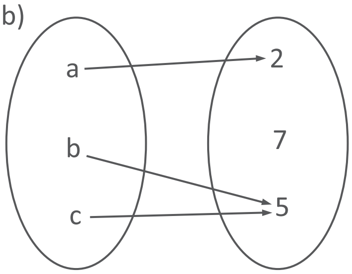
5. Într-un șir de numere, primii doi termeni sunt 1 și 1. Începând cu al treilea termen, fiecare termen este suma dintre cei doi termeni aflați înaintea lui. Scrie următorii patru termeni ai acestui șir de numere. (Șirul lui Fibonacci. Caută pe Internet informații despre Fibonacci și șirul său!)

6. Care dintre următoarele diagrame reprezintă o funcție? Explică de ce celelalte diagrame nu reprezintă o funcție.

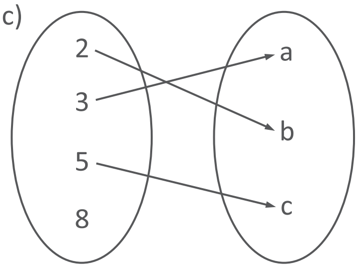
a)



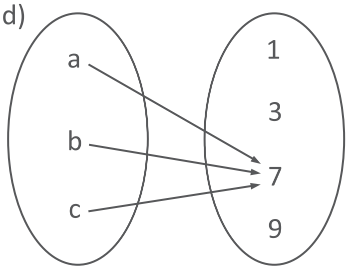
b)



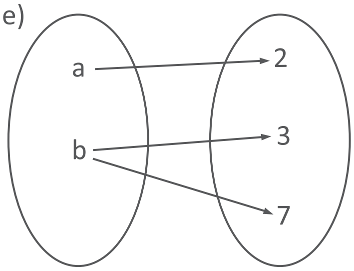
c)



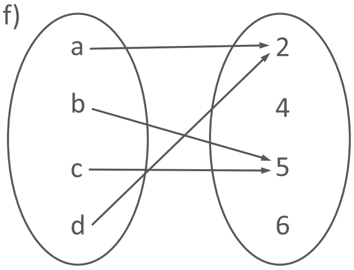
d)



e)



f)



7. Pentru următoarele dependențe funcționale, stabilește domeniul de definiție, mulțimea în care ia valori și legea de corespondență:

a)

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	3	4

b)

x	5	6	7	8
$f(x)$	10	12	14	16

c)

x	4	9	16
$f(x)$	16	81	256

d)

x	36	49	64
$f(x)$	6	7	8

e)

x	Ana	Radu	Ionuț	Bogdan
$f(x)$	3	4	5	6

8. Completează tabelele după regula scrisă în dreptul lor (poți folosi Internetul):

a) Reședința județului

x	Vrancea	Timiș	Dolj	Prahova
$f(x)$				

b) Valența elementului

x	H	Na	Ca	O	Al
$f(x)$					

c) Capitala statului

x	Franța	Germania	Italia	Spania
$f(x)$				

d) Unitatea de măsură în SI

x	Lungime	Masă	Timp	Intensitatea curentului electric	Temperatură
$f(x)$					

9. Realizează corespondențele pentru următoarele diagrame din *Figurile 1 - 4*, unde $f : A \to B$ este dată de formula: a) $f(x) = \frac{x}{2}$; b) $f(x) = 8 - x$.

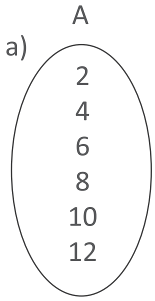


Figura 1

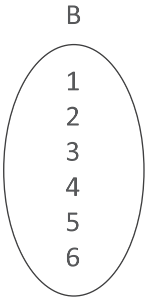


Figura 2

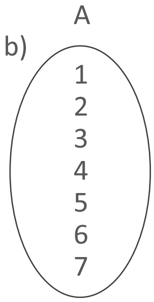


Figura 3

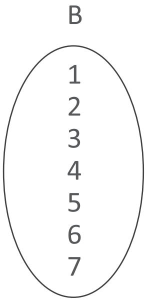


Figura 4

10. Diagrama din *Figura 5* reprezintă o funcție $f : A \to B$? Dacă DA, scrie legea de corespondență pentru această funcție sub formă de formulă.

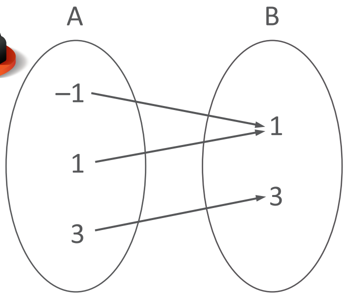


Figura 5

11. Considerăm funcția $P : \{2, 3, 5, 8, 9\} \to \mathbb{R}$ care asociază fiecărui element $x \in \{2, 3, 5, 8, 9\}$ perimetrul triunghiului echilateral de latură x. a) Prezintă această funcție cu ajutorul unei formule. b) Prezintă această funcție sub formă de tabel.

12. Care dintre exemplele următoare reprezintă o funcție? Justifică răspunsul dat.

a) $f : \{-1, 1, 2, 4\} \to \{1, 3, 4, 6\}$, $f(x) = x + 2$; b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{2 - x}$.

13. În programarea pe calculator, în realizarea algoritmilor pentru diferite aplicații, unul dintre cele mai importante aspecte este eficiența algoritmului, adică rapiditatea cu care acesta poate realiza diferite operațiuni. Eficiența depinde și de numărul operațiilor pe care le are de efectuat calculatorul. Pentru a ilustra această idee, ne vom rezuma la cazul simplu în care calculatorul trebuie să afișeze, pentru un anumit număr x citit de la tastatură, valoarea numerică a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 4x + 3$ pentru acel număr.

Exemplu: Calculatorul ar putea proceda astfel: calculează $x \xrightarrow{\hat{}2} x^2$ și memorează x^2, apoi calculează $x \xrightarrow{\cdot 4} 4x$ și memorează $4x$, adună cele două rezultate memorate anterior $x^2 + 4x$, după care efectuează operația $x^2 + 4x \xrightarrow{+3} x^2 + 4x + 3$. În total, calculatorul a efectuat 6 operații elementare (includem și memorarea rezultatelor).

Dacă privim $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$, atunci calculatorul poate proceda și astfel: calculează și memorează $x \xrightarrow{+1} x + 1$, apoi calculează și memorează $x \xrightarrow{+3} x + 3$, după care efectuează produsul rezultatelor memorate și obține $x^2 + 4x + 3$. Avem, în acest caz, doar 5 operații elementare.

a) Determină câte operații elementare va efectua calculatorul dacă vom privi $x^2+4x+3 = (x+2)^2-1$.

b) Găsește cea mai eficientă metodă de a calcula $x^2 + 5x + 6$, $x^2 + 9x + 14$ și $2x^2 + 10x + 8$.

c) Transcrie pe caiet și completează spațiile punctate pentru următoarele scheme (prin „1/”, înțelegem inversul numărului):

i) Pentru orice număr real x, $x \neq -1$: $x \xrightarrow{+1} .... \xrightarrow{\hat{}2} .... \xrightarrow{1/} .... \xrightarrow{-1} ....$.

ii) Pentru orice număr real x, $x \neq -\frac{3}{2}$: $x \xrightarrow{\cdot 2} .... \xrightarrow{+3} .... \xrightarrow{\hat{}2} .... \xrightarrow{1/} .... \xrightarrow{+1} ....$.

iii) Pentru orice număr real x, $x \neq -2$: $.... \xrightarrow{+2} .... \xrightarrow{\hat{}2} .... \xrightarrow{1/} .... \xrightarrow{+2} \frac{2x^2 + 8x + 9}{x^2 + 4x + 4}$.

iv) Pentru orice număr real x, $x \neq -\frac{1}{3}$: $.... \xrightarrow{\cdot 3} .... \xrightarrow{+1} .... \xrightarrow{\hat{}2} 9x^2 + 6x + 1 \xrightarrow{1/} .... \xrightarrow{+2} ....$.

d) Observând că scrierea $\xrightarrow{\cdot 4}$ ilustrează funcția $f(x) = 4x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, scrie funcțiile ilustrate de scrierea $\xrightarrow{\hat{}2}$ și scrierea $\xrightarrow{+3}$.

2. Graficul unei funcții, reprezentarea geometrică a graficului unor funcții numerice

Observă și descoperă!

1. Profesorul de matematică tocmai a adus rezultatele ultimului test. În caietul său de observații apare tabelul următor. Se poate defini o funcție de la mulțimea notelor la mulțimea numerelor naturale?

Nota	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	0	1	2	4	8	9	7	5	2

2. De la mulțimea notelor la mulțimea numerelor naturale, putem definim o funcție prin legea de corespondență: „fiecărei note îi corespunde numărul de elevi care au obținut nota respectivă”.

a) Scrie perechile de forma: (notă, număr de elevi).

b) Formează, cu aceste perechi, o mulțime.

Important

- **Graficul unei funcții** (G_f) este mulțimea tuturor perechilor de forma $(x,f(x))$, unde x este element al domeniului de definiție, iar $f(x)$ este elementul, din mulțimea în care funcția ia valori, corespunzător lui x prin funcția f.

$G_f = \{(x,f(x)) \mid x \in A\}$, unde A este domeniul de definiție al funcției.

Exemple: 1. Pentru funcția de la „Observă și descoperă”, graficul funcției este mulțimea
$G_f = \{(2,0), (3,1), (4,2), (5,4), (6,8), (7,9), (8,7), (9,5), (10,2)\}$.

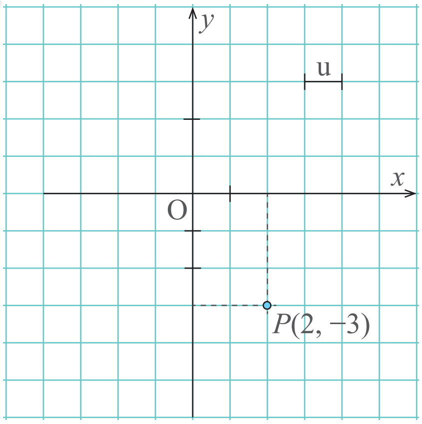
2. Pentru funcția $f : \{0,1,2,3\} \to \{0,1,4,9,16\}$, $f(x) = x^2$ *graficul funcției este mulțimea*
$G_f = \{(0,0), (1,1), (2,4), (3,9)\}$.

- Graficul unei funcții numerice este o mulțime de perechi de numere reale.

- Orice pereche de numere reale se reprezintă într-un sistem de axe ortogonale.

Exemplu: Perechii $(2,-3)$ *îi corespunde punctul* $P(2,-3)$ *reprezentat în figura alăturată.*

Numărul 2 *este abscisa punctului* P, *iar numărul* -3 *este ordonata punctului* P.



- **Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții numerice** înseamnă reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a tuturor perechilor din mulțimea G_f (graficul funcției).

Exemplu: Reprezintă geometric graficul funcției $f : \{-1,0,1,2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Cum gândesc: Pas 1. Determin graficul funcției calculând valorile funcție pentru numerele -1, 0, 1 și 2.

Cum scriu: $f(-1) = (-1)^2 = 1,\ f(0) = 0^2 = 0,\ f(1) = 1^2 = 1,\ f(2) = 2^2 = 4.$

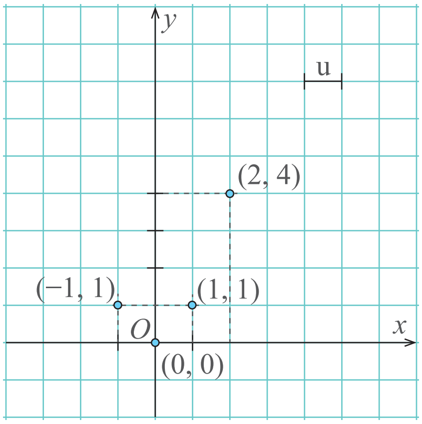
Pas 2. Scriu mulțimea G_f (graficul funcției).

$$G_f = \{(-1{,}1)\,, (0{,}0)\,, (1{,}1)\,, (2{,}4)\}$$

Pas 3. În locul mulțimii G_f puteam construi un tabel. Fiecare pereche se citește pe verticală: „minus unu, unu”; „zero, zero”; „unu, unu” și „doi, patru”.

x	-1	0	1	2
$f(x) = x^2$	1	0	1	4

Pas 4. Reprezint în sistemul de axe ortogonale toate cele 4 perechi de numere din mulțimea G_f sau din tabel și astfel obțin reprezentarea geometrică a graficului funcției.



Exersează!

3. Știind că diagrama din *Figura 6* reprezintă o funcție, scrie mulțimea G_f (graficul funcției).

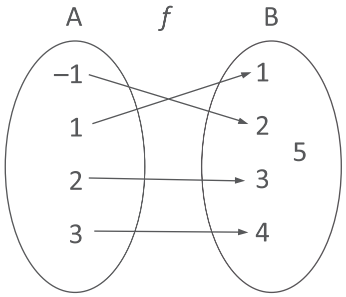


Figura 6

4. Scrie mulțimea G_f pentru următoarele funcții:

a) $f : \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x - 2;$

b) $f : \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 2;$

c) $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 3;$

d) $f : \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = -x{+}1.$

5. Dacă domeniul de definiție al unei funcții are 7 elemente, câte elemente are graficul acestei funcții? Justifică răspunsul dat.

6. Se consideră funcția $f : \{-1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 1$.

a) Prezintă funcția sub formă de tabel.

b) Reprezintă geometric graficul acestei funcții.

7. Se consideră mulțimea $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ și funcția $f : A \to \mathbb{R},\ f(x) = x - 1$.

a) Descrie, printr-un tabel, funcția f.

b) Scrie mulțimea care reprezintă graficul acestei funcții.

c) Reprezintă geometric graficul funcției f.

8. Descrie, prin tabel, funcțiile următoare, apoi reprezintă geometric graficul lor:

a) $f : \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2 - x^2$;

b) $f : \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 2$;

c) $f : \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = -|x|$;

d) $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x| - 2$.

9. Reprezintă geometric graficul următoarelor funcții, definite pe mulțimea $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ cu valori în mulțimea numerelor reale:

a) $f(x) = 1$;

b) $f(x) = x$;

c) $f(x) = -x$;

d) $f(x) = 2x + 1$;

e) $f(x) = -2x + 1$;

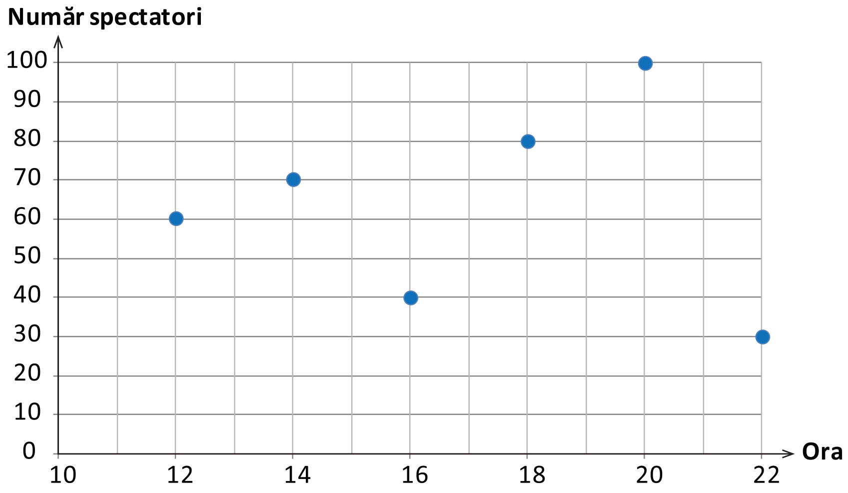
f) $f(x) = |x| + 1$.

10. În graficul de mai jos este prezentat numărul total de spectatori aflați într-un cinematograf, în funcție de anumite ore ale zilei. Cinematograful are o capacitate de 100 de locuri, se deschide la ora 10 și se închide la ora 23 : 30.

a) Când a fost cel mai aglomerat? Dar cel mai puțin aglomerat?

b) Trece informațiile pe care le găsești în grafic sub forma unui tabel în care numărul de spectatori să depindă de ora aleasă.

c) Stabilește domeniul de definiție și mulțimea în care ia valori funcția stabilită la punctul anterior.



3. Funcții de forma $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale și D este o mulțime finită de numere reale sau un interval nedegenerat; interpretare geometrică; lecturi grafice

Observă și descoperă!

1. Urmărește cu atenție imaginea din *Figura 7*, apoi rezolvă cerințele de mai jos.

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$.

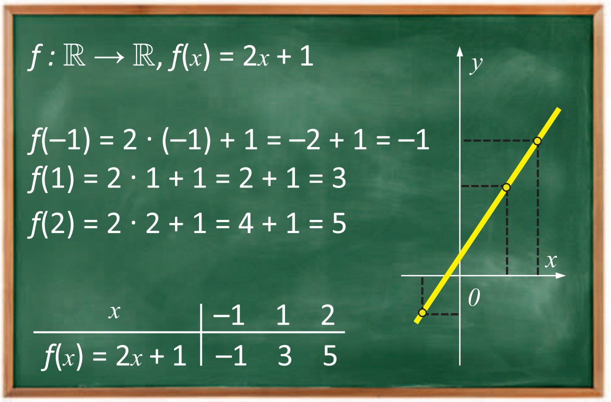
a) Determină valorile funcției pentru $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$.

b) Scrie, într-un tabel, perechile obținute.

c) Reprezintă, într-un sistem de axe ortogonale, aceste perechi.

d) Ce observație poți face în legătură cu punctele astfel obținute?

Verifică această observație reprezentând, în sistemul de axe ortogonale, punctul de abscisă 3 și ordonată $f(3)$.



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$

$f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -2 + 1 = -1$

$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$

$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5$

x	-1	1	2
$f(x) = 2x + 1$	-1	3	5

Figura 7

Important

- Reprezentarea geometrică a graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale este o dreaptă.
- Deoarece o dreaptă este determinată de două puncte distincte, pentru a reprezenta geometric graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale, sunt suficiente două puncte.

Exemplu: Reprezintă geometric graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$.

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Știu că reprezentarea geometrică a unei astfel de funcții este o dreaptă, prin urmare sunt suficiente două puncte.

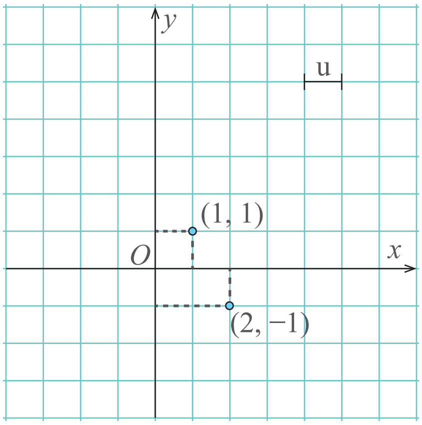
Iau $x = 1$ și $x = 2$ și calculez $f(1)$, respectiv $f(2)$.

Cum scriu: $f(1) = -2 \cdot 1 + 3 = -2 + 3 = 1$

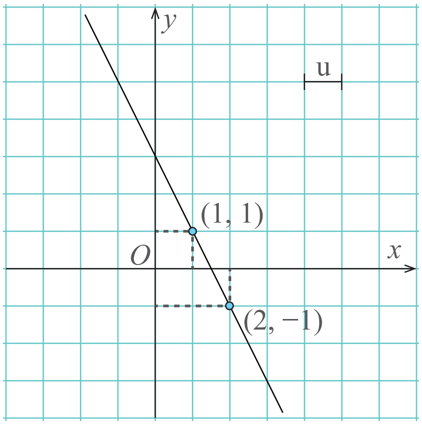
$f(2) = -2 \cdot 2 + 3 = -4 + 3 = -1$

x	1	2
$f(x) = -2x + 3$	1	-1

Pas 2. Reprezint, într-un sistem de axe ortogonale, cele două perechi.



Pas 3. Construiesc dreapta care trece prin cele două puncte.



• Reprezentarea geometrică a graficului funcției $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde A este un interval de numere reale și a, b sunt numere reale, este o parte din reprezentarea geometrică a graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

Exemplu: Reprezintă geometric graficul funcției $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$.

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Reprezentarea geometrică a graficului unei astfel de funcții face parte dintr-o dreaptă, prin urmare am nevoie de două puncte.

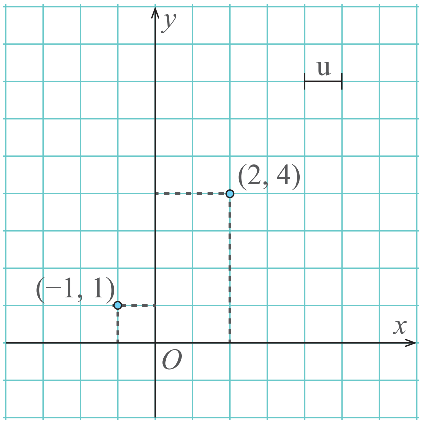
Iau, pentru x, valorile care reprezintă capetele intervalului, adică -1 și 2 și calculez $f(-1)$, respectiv $f(2)$.

Cum scriu: $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 + 2 = 1$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 + 2 = 4$

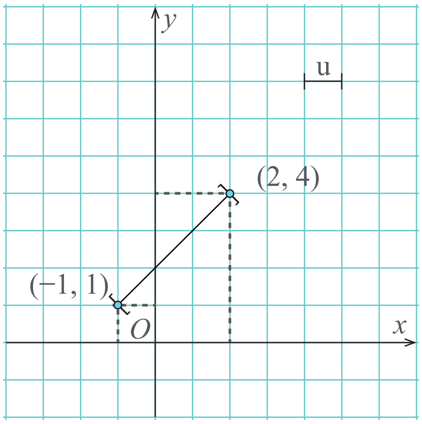
x	-1	2
$f(x) = x + 2$	1	4

Pas 2. Reprezint, într-un sistem de axe ortogonale, punctele astfel obținute.



Pas 3. Construiesc segmentul care unește cele două puncte obținute mai sus și în capetele segmentului desenez semnul pentru interval închis (paranteză pătrată) pentru că domeniul de definiție a fost un interval închis.

Observație: Dacă domeniul de definiție era un interval deschis, în capetele segmentului desenam paranteze rotunde.



Exemplu: Reprezintă geometric graficul funcției $f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 2$.

Soluție:

Cum gândesc: **Pas 1.** Reprezentarea geometrică a graficului unei astfel de funcții face parte dintr-o dreaptă, prin urmare am nevoie de două puncte.

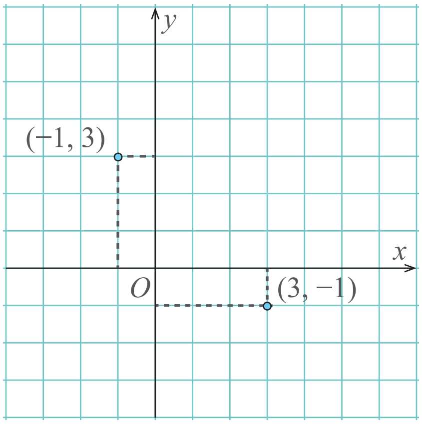
Iau două valori pentru x din intervalul $[-1, +\infty)$. Una dintre valori este -1, capătul intervalului.

Cum scriu: $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -(-1) + 2 = 3$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = -3 + 2 = -1$

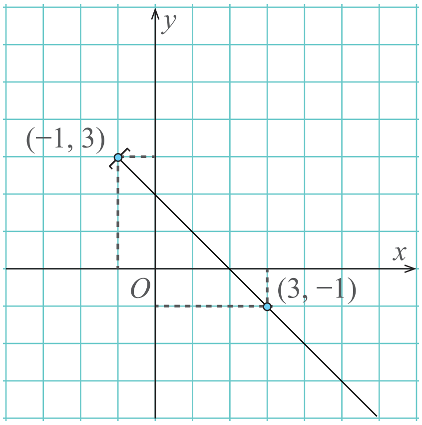
x	-1	3	$+\infty$
$f(x) = -x + 2$	3	-1	

Pas 2. Reprezint, într-un sistem de axe ortogonale, cele două perechi.



Pas 3. Construiesc semidreapta care trece prin cele două puncte. În originea semidreptei desenez o paranteză pătrată pentru că domeniul de definiție al funcției este un interval închis.

Observație: Dacă domeniul de definiție era $(-1, +\infty)$, atunci desenam, în originea semidreptei, o paranteză rotundă.



Observă și descoperă!

2. Observă, cu atenție, imaginea din *Figura 8*, apoi răspunde la următoarele întrebări:

a) Punctul A aparține axei Ox a sistemului de axe ortogonale. Cu cât este egală ordonata punctului A?

b) Punctul A aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f. În aceste condiții, cu cât este egală ordonata punctului A?

c) Punctul B aparține axei Oy a sistemului de axe ortogonale? Cu cât este egală abscisa punctului B?

d) Punctul B aparține reprezentări geometrice a graficului funcției f. În aceste condiții, cu cât este egală ordonata punctului B?

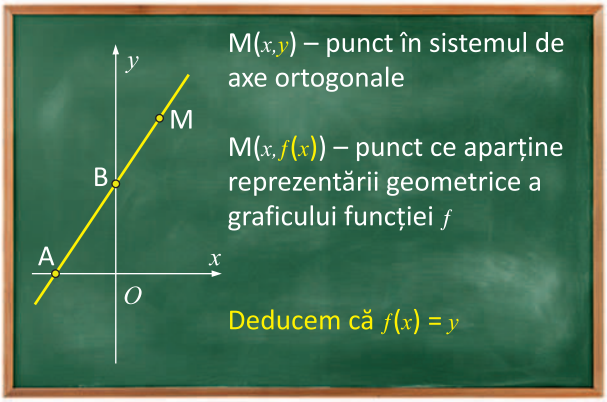


Figura 8

Important

- Un punct $M(x,y)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f dacă și numai dacă $f(x) = y$.

Exemple: 1. Care dintre punctele $A\,(2{,}3)$ și $B\,(1{,}4)$ aparțin reprezentării geometrice a graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$?

Soluție: Pentru punctul $A\,(2{,}3)$ trebuie verificat dacă $f(2) = 3$. Avem $f(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$. Cum $7 \neq 3$ rezultă $A\,(2{,}3) \notin G_f$.

Pentru punctul $B\,(1{,}4)$ trebuie verificat dacă $f(1) = 4$. Avem $f(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4$. Cum $4 = 4$ rezultă $B\,(1{,}4) \in G_f$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + b$. Determină numărul real b, știind că punctul $P(1, -1)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f.

Soluție: Dacă $P(1, -1) \in G_f$, atunci $f(1) = -1$. Dar $f(1) = 2 \cdot 1 + b = 2 + b$. Așadar, $2 + b = -1$, de unde $b = -3$.

- Coordonatele punctului A în care reprezentarea geometrică a graficului funcției f intersectează axa Ox a sistemului de axe ortogonale se obțin rezolvând ecuația $f(x) = 0$. Dacă soluția ecuației este x_0, atunci $A(x_0,0)$.
- Coordonatele punctului B în care reprezentarea geometrică a graficului funcției f intersectează axa Oy a sistemului de axe ortogonale sunt $x = 0$ și $y = f(0)$. Avem $B(0,f(0))$.

Exemplu: Determină coordonatele punctelor în care reprezentarea geometrică a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 4$ *intersectează axele sistemului de axe ortogonale.*

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Notez A punctul de intersecție a axei Ox cu reprezentarea geometrică a graficului funcției f.

Cum scriu: Fie $\{A\} = G_f \cap Ox$

Pas 2. Rezolv ecuația $f(x) = 0$.

$$-2x + 4 = 0 \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow x = 2$$

Pas 3. Scriu coordonatele punctului A.

$$A(2,0)$$

Pas 4. Notez B punctul de intersecție a axei Oy cu reprezentarea geometrică a graficului funcției f.

Fie $\{B\} = G_f \cap Oy$

Pas 5. Iau $x = 0$ și calculez $y = f(0)$.

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = -2 \cdot 0 + 4 = 4$$

Pas 6. Scriu coordonatele punctului B.

$$B(0,4)$$

Exersează!

3. Reprezintă geometric graficul fiecăreia dintre următoarele funcții, alegând convenabil două puncte ale graficului funcției.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 1$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 1$.

4. Reprezintă geometric graficul fiecăreia dintre următoarele funcții, alegând convenabil două puncte ale graficului funcției.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x - 3$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 3$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x + 4$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2}{3}x - 1$;

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 0{,}2x + 2$;

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x - 3$.

5. Reprezintă geometric graficul următoarelor funcții:

a) $f : (-\infty; 3] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$;

b) $f : (-2; 4] \to \mathbb{R}, f(x) = -2x$;

c) $f : [-5,3] \to \mathbb{R}, f(x) = x + 4$;

d) $f : (-3,3) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$;

e) $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = -2x$;

f) $f : [-1,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + 4$.

6. Determină intersecțiile reprezentării geometrice a graficului următoarelor funcții cu axele unui sistem de axe ortogonale și apoi reprezintă geometric graficul acestor funcții:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 4$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x - 2$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4x - 2$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 6$;

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x + 2$;

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 2$.

7. Se consideră punctele $A\,(1{,}3)$, $B\,(0{,}1)$, $C\,(-1{,}3)$, $D\,(-2,-9)$, $E\,(0,-1)$. Care dintre aceste puncte aparțin reprezentării geometrice a graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4x - 1$?

8. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + 2$, unde a este număr real.

a) Determină numărul real a pentru care punctul $A(-2,-2)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f.

b) Pentru $a = -2$, reprezintă geometric graficul funcției f.

9. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = mx + 3$, unde m este număr real. Determină numărul real m pentru care punctul $A(2,-1)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f.

10. Determină numărul real a pentru care punctul $A(2,-3)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + 1$.

11. Problemă rezolvată: Stabilește dacă punctele $A\,(1{,}3)$, $B\,(2{,}4)$ și $C\,(3{,}5)$ sunt coliniare.

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Puncte coliniare înseamnă puncte care sunt pe aceeași dreaptă.

Știu că reprezentarea geometrică a graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$ este o dreaptă. Pot determina funcția, de această formă, care are ca reprezentare grafică dreapta AB.

Cum scriu: Consider funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$.

$A\,(1{,}3) \in G_f$, atunci $f(1) = 3$, adică $a + b = 3$.

$B\,(2{,}4) \in G_f$, atunci $f(2) = 4$, adică $2a + b = 4$.

Pas 2. Cum reprezentarea geometrică a graficului funcției trebuie să treacă prin punctele A și B înseamnă că ambele relații în care apar a și b trebuie să fie adevărate, adică a și b reprezintă soluția sistemului format din cele două ecuații.

$$\begin{cases} a + b = 3 & | \cdot (-1) \\ 2a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} -a - b = -3 \\ 2a + b = 4 \end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 1 + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$a = 1$$

Pas 3. Scriu funcția a cărei reprezentare geometrică a graficului trece prin punctele A și B.

Avem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 2$

Pas 4. Dacă punctul $C\,(3{,}5)$ aparține reprezentării geometrice a graficului acestei funcții, atunci punctele A, B și C sunt coliniare.

Cum $f(3) = 3 + 2 = 5$, obținem $C\,(3{,}5) \in G_f$, adică punctele A, B și C sunt coliniare.

12. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$, unde a, b sunt numere reale. Determină numerele reale a și b pentru care reprezentarea geometrică a graficul funcției f conține punctele: a) $A(1{,}3)$ și $B(-2,-3)$; b) $A(1{,}3)$ și $B(2{,}1)$; c) $A(2{,}6)$ și $B(-1{,}3)$; d) $A(2{,}1)$ și $B(-1{,}0)$; e) $A(2,-1)$ și $B(-2,-5)$.

13. Stabilește care dintre tripletele următoare reprezintă puncte coliniare:

a) $A(1{,}2)$, $B(2{,}3)$, $C(3{,}4)$;

b) $A(-1,-3)$, $B(-2,-4)$, $C(3{,}1)$;

c) $A(1{,}0)$, $B(0{,}1)$, $C(4,-5)$;

d) $A(1{,}1)$, $B(2{,}4)$, $C(3{,}9)$;

e) $A(10{,}3)$, $B(9{,}4)$, $C(6{,}7)$;

f) $A(-2,-3)$, $B(-1{,}1)$, $C(3{,}17)$.

14. a) Reprezintă, în același sistem de axe ortogonale, funcțiile: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-1$; b) Precizează poziția dreptelor obținute la punctul a).

15. a) Reprezintă, în același sistem de axe ortogonale, funcțiile: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+3$; b) Precizează poziția dreptelor obținute la punctul a).

16. Problemă rezolvată: Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x-3$.
a) Reprezentă geometric, în același sistem de axe ortogonale, graficele celor două funcții.
b) Determină coordonatele punctului de intersecție a celor două reprezentări.
Soluție:

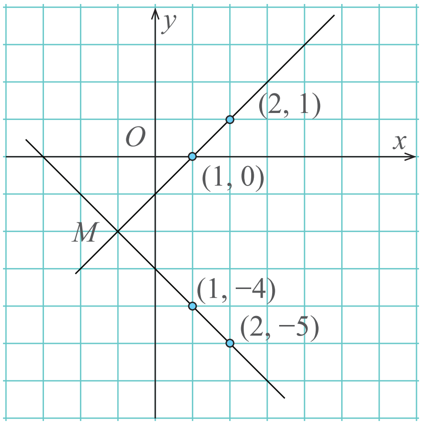
Cum gândesc: Pas 1. Pentru reprezentarea geometrică a graficului funcției f îmi trebuie două puncte, iar pentru reprezentarea geometrică a graficului funcției g alte două puncte.
Mă folosesc de câte un tabel pentru fiecare funcție.

Cum scriu:

x	1	2
$f(x)$	0	1

x	1	2
$g(x)$	-4	-5

Pas 2. Reprezint geometric, în același sistem de axe ortogonale, graficele celor două funcții.



Pas 3. Punctul M, ca punct într-un sistem de axe ortogonale, are coordonatele (x,y).
Ca punct ce aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f are coordonatele $(x,f(x))$.
Ca punct ce aparține reprezentării geometrice a graficului funcției g are coordonatele $(x,g(x))$.
Atunci, pentru aceeași valoare a numărului x trebuie să avem $y=f(x)$ și $y=g(x)$.
Deducem că perechea (x,y) este soluția sistemului $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$.

Consider $\{M\}=G_f\cap G_g$. Pentru coordonatele punctului M rezolv sistemul:

$$\begin{cases} y=x-1 \\ y=-x-3 \end{cases}$$

Avem $x-1=-x-3$, de unde $2x=-2$, adică $x=-1$.
Acum $y=-1-1$, adică $y=-2$.
Obținem $M(-1,-2)$.

17. Reprezintă în același sistem de axe ortogonale reprezentările geometrice ale graficelor celor două funcții și apoi determină, dacă este cazul, coordonatele punctului de intersecție a reprezentărilor geometrice a graficelor celor două funcții:

a) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+1$ și $g(x)=x-3$;
b) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x+1$ și $g(x)=4x-3$;
c) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ și $g(x)=3x+2$;
d) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x-1$ și $g(x)=-3x+2$;
e) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ și $g(x)=-2x-3$.

4. Elemente de statistică: indicatorii tendinței centrale (frecvența, medie, mediană, mod și amplitudine a unui set de date)

Observă și descoperă!

SOCIETATEA DE TRANSPORT
„ANONIMUS”
PREȚURI

Număr călătorii: 1 → 2,50 lei
Număr călătorii: 2 → 5 lei
Număr călătorii: 10 → 20 lei

Abonament: o zi → 10 lei
Abonament: o lună → 80 lei

1. În tabel este reprezentată lista tranzacțiilor companiei între orele 08 : 30 și 08 : 40.

08 : 32 : 15	2,50	08 : 34 : 18	2,50	08 : 36 : 17	2,50	08 : 37 : 24	5	08 : 38 : 23	2,50
08 : 32 : 17	5	08 : 34 : 56	10	08 : 36 : 23	80	08 : 37 : 37	2,50	08 : 38 : 27	2,50
08 : 33 : 04	2,50	08 : 35 : 23	2,50	08 : 36 : 27	2,50	08 : 37 : 51	2,50	08 : 38 : 31	80
08 : 33 : 24	2,50	08 : 36 : 12	5	08 : 36 : 53	20	08 : 37 : 59	20	08 : 38 : 38	5
08 : 34 : 17	20	08 : 36 : 13	2,50	08 : 37 : 12	2,50	08 : 38 : 12	10	08 : 38 : 58	2,50

a) Transcrie, pe caiet, tabelul și completează-l. Prima coloană este completată ca model.

Prețul unui produs	2,5 lei	5 lei	10 lei	20 lei	80 lei
Nr. produselor vândute	14				

b) Care a fost cel mai vândut produs?

c) Câte tranzacții s-au făcut în intervalul de timp 08 : 30 – 08 : 40?

d) Dacă următoarea tranzacție a avut loc la ora 08:40:02, care crezi că e cel mai probabil produs care a fost achiziționat?

Important

- **Statistica** este o știință care se ocupă de culegerea unor date și interpretarea lor, folosind calculul probabilităților.

- Culegerea datelor se face prin observare sau prin chestionar.

Exemplu: Primul tabel de mai sus reprezintă rezultatul unei culegeri de date prin observare. Când se fac sondaje de opinie datele se culeg prin chestionar.

- **Frecvența** este un număr care ne arată de câte ori se repetă o valoare numerică într-un set de date.

Exemplu: În tabelul din caietul tău, valoarea numerică 2,50 *are frecvența* 14. *Valoarea numerică* 10 *are frecvența* 2 *etc.*

- **Modul** unui set de date este valoarea numerică cu frecvența cea mai mare, dacă aceasta există.

Exemplu: În cazul nostru, modul este 2,50*; el are cea mai mare frecvență.*

- Dacă mai multe valori numerice au aceeași frecvență spunem că setul de date are mai multe valori modale.
- Dacă toate valorile numerice au aceeași frecvență spunem că setul de date nu conține valori modale.

- Modul unui set de date ne arată caracteristica cu cea mai mare probabilitate de realizare.

Exemplu: În tabelul din caiet, probabilitatea de a se vinde un bilet de 2,50 *lei este* $\frac{14}{25} = \frac{56}{100} = 56\%$. *Probabilitatea de a se vinde un bilet de 5 lei este* $\frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 16\%$ *etc. Aceasta ne arată că tendința centrală este ca următorul produs vândut să fie un bilet de* 2,50 *lei.*

- Modul este un indicator al tendinței centrale a fenomenului analizat.

Observă și descoperă!

2. În tabel sunt trecute minutele de întârziere a zborurilor pentru două companii de transport aerian, pentru 10 zboruri București – Londra.

Data	11.01	12.01	14.01	15.01	16.01	18.01	19.01	20.01	21.01	23.01
Compania A	16	18	28	15	27	23	19	20	25	30
Compania B	17	43	12	5	23	50	37	24	33	40

a) În ce zi a fost cea mai mare întârziere a companiei A?
b) În ce zi a fost cea mai mică întârziere a companiei A?
c) Care este diferența dintre cea mai mare și cea mai mica întârziere a companiei B?

Important

- **Amplitudinea** unui set de date este un număr care reprezintă diferența dintre cea mai mare și cea mai mică valoare numerică a setului de date.

Exemplu: În cazul zborurilor efectuate de compania B, amplitudinea este 45 $(50 - 5)$, *iar în cazul zborurilor efectuate de compania A, amplitudinea este* 15 $(30 - 15)$.

- Amplitudinea este un alt indicator al tendinței centrale a fenomenului analizat.

O amplitudine mică se asociază cu un comportament stabil sau cu o colectare de date foarte bună.

O amplitudine mare se asociază cu un comportament instabil sau cu o colectare de date nu tocmai bună.

Observă și descoperă!

3. În tabel sunt temperaturile înregistrate la o stație meteorologică în intervalul de o săptămână. Din păcate, o informație a fost eronată.

Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
−23°C	−23°C	−30°C	−24°C	Eroare	−20°C	−21°C

a) Care este media aritmetică a temperaturilor vizibile în tabel?
b) Ce valoare ai pune în locul erorii din ziua de vineri? Argumentează răspunsul dat.

Important

- **Media** unui set de date este raportul dintre valorile numerice ale setului de date și numărul lor (media aritmetică).

Exemplu: În situația de mai sus media este $-23{,}5$. *Pentru ziua de vineri e rezonabil să trecem* $-23°$ *C.*

- Media se poate exprima și cu ajutorul altor medii; exemplu media geometrică.
- Media este un alt indicator al tendinței centrale a unui set de date.

- **Mediana** unui set de date este numărul care împarte șirul valorilor numerice în două părți egale, atunci când acestea sunt ordonate crescător. Mediana este un alt indicator al tendinței centrale a unui set de date.

- Dacă un set de date are un număr impar de valori, mediana este termenul din mijloc, atunci când valorile sunt ordonate crescător.

Exemplu: Se consideră setul de date 1, 2, 2, 6, 7, 3, 4, 5, 6. *Sunt* 9 *valori numerice. Le ordonăm crescător* 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7. *Mediana este* 4.

- Dacă un set de date are un număr par de valori, mediana este media aritmetică a celor doi termeni din mijloc, atunci când valorile sunt ordonate crescător.

Exemplu: În cazul temperaturilor, ordinea crescătoare este -30, -24, -23, -23, -21, -20. *Sunt* 6 *valori, iar media aritmetică a celor doi termeni din mijloc este* -23. *Un argument în plus să presupunem că vineri au fost* $-23°$ *C.*

Exersează!

4. Determină frecvențele fiecărui număr din următoarele seturi de date, apoi calculează amplitudinea, modul, media și mediana setului de date:

a) 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10;

b) 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 6, 6, 6, 6, 6, 6;

c) 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 13;

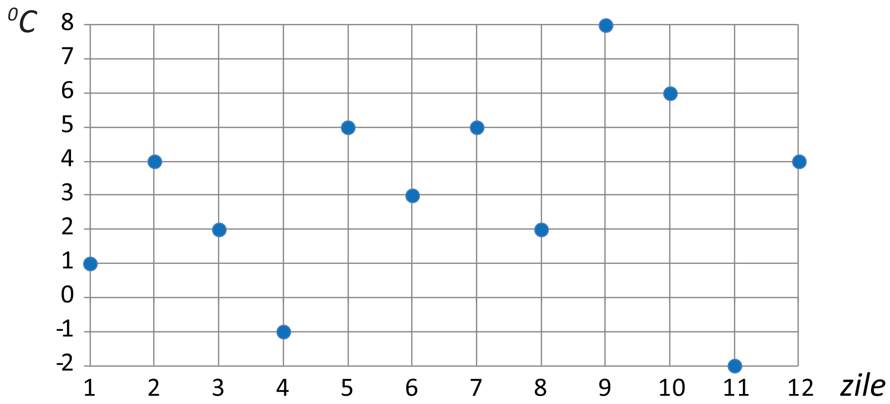
d) -5, -3, -4, -3, $+3$, -2, -2, -5, -7, $+3$;

5. Se consideră funcția $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. a) Reprezintă geometric graficul funcției f. b) Reprezintă tabelul de valori al funcției f. c) Calculează toți indicatorii ai tendinței centrale pentru mulțimea valorilor funcției. d) Ce observi între mediana și media calculată?

6. Se consideră funcția $f : \{1, 2, 3, ..., 10\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - \frac{x}{2}$. a) Reprezintă geometric graficul funcției f. b) Reprezintă tabelul de valori al funcției f. c) Calculează toți indicatorii ai tendinței centrale pentru mulțimea valorilor funcției. d) Ce observi între mediana și media calculată?

7. Să presupunem că termometrul de la tine din casă arată temperatura de 23,5°C. La care dintre temperaturile de afară se va adapta organismul tău mai ușor: a) −10°C sau +2°C? b) +10°C sau +17°C? c) +27°C sau +33°C? d) +22°C sau +25°C? e) +12°C sau +35°C? Ce indicator al tendinței centrale folosești pentru a oferi răspunsurile tale?

8. Se consideră următorul grafic:



a) Descrie domeniul de definiție, mulțimea de valori și tabelul de valori al funcției care are repezentarea geometrică a graficului în figura de mai sus.

b) Calculează frecvența fiecărei valori numerice din tabelul realizat la punctul anterior, cât și amplitudinea, media (m), mediana (M) și modul setului de date.

c) Reprezintă în același sistem de axe ortogonale graficul funcțiilor $f(x) = m$, unde m reprezintă media și $g(x) = M$, unde M reprezintă mediana.

9. O companie vinde huse de telefoane la prețurile de 10 lei, 20 de lei, 30 de lei, 50 de lei și, respectiv, 150 de lei.

a) În tabelul următor sunt înregistrate vânzările de ieri:

Valoarea produsului (lei):	10	20	30	50	150
Numărul de produse vândute:	15	25	30	20	5

i) Calculează încasările totale obținute de companie în ziua de ieri, bazându-te pe informațiile din tabel.

ii) Care a fost cel mai vândut produs?

iii) Ce valoare are mediana acestui set de date?

iv) Dacă toate produsele ar fi fost vândute la același preț, care ar fi fost totalul încasat?

b) În tabelul următor sunt înregistrate vânzările din ultima lună (30 de zile):

Valoarea produsului (lei):	10	20	30	50	150
Numărul de produse vândute:	750	1200	600	900	150

i) Răspunde la întrebările i)-iv) de la punctul a), pentru această situație.

ii) Calculează câte produse de fiecare tip s-au vândut, în medie, în fiecare zi a lunii.

iii) Folosind rezultatele obținute la subpunctul precedent și tabelul de la punctul a), stabilește care dintre produse s-a vândut ieri mai bine decât media lunară.

10. Completează următoarele seturi de date scrise în ordine crescătoare:

a) 2, 3, 3, 4, ..., 6, știind că media aritmetică a șirului este egală cu 4;

b) 2, 3, ..., ..., ..., 7, 8, știind că mediana și modulul sunt egale cu 5;

c) 10, 12, ..., 15, ..., ..., ..., 23, știind că mediana și media aritmetică sunt egale cu 16, iar modulul este egal cu 19.

11. Un barometru a înregistrat următoarele presiuni atmosferice exprimate în hPa (hecto-Pascali = 100 Pa, o unitate de măsură pentru presiune):

Data	15.01	16.01	17.01	18.01	19.01	20.01	21.01	22.01
Valoarea presiunii în hPa	1031	1032	1033	1030	1026	1034	13214	Eroare

a) Determină amplitudinea, modulul, media aritmetică și mediana acestui set de date.

b) Ce valoare ai folosi pentru a înlocui eroarea cu un număr? Justifică răspunsul tău!

12. Problemă rezolvată: Scrie un set de date format din patru numere în ordine crescătoare, știind că media aritmetică a lor este 25, mediana este 26, iar modul este 27.

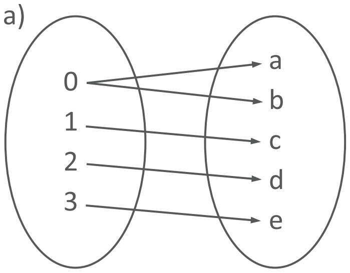
Rezolvare: Considerăm $a \leq b \leq c \leq d$ cele patru numere căutate. Deoarece media lor aritmetică este 25, atunci $a + b + c + d = 100$. Mediana, în acest caz, este $\frac{b+c}{2} = 26$. Deci obținem $a \leq b \leq 26 \leq c \leq d$. Deoarece există un modul, înseamnă că există un număr care apare de mai multe ori decât oricare altul. Cum modul este 27, din ultima inegalitate obținem că $c = d = 27$. De aici, obținem $b = 25$ și $a = 21$.

13. Scrie cinci numere în ordine crescătoare, știind că media lor aritmetică este 7, modulul 4, mediana tot 4, iar amplitudinea egală cu 14.

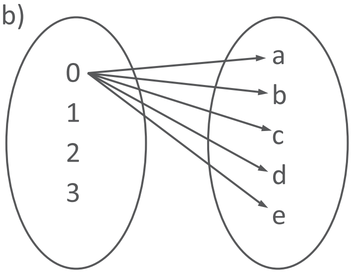
5. Recapitulare

1. Care dintre următoarele diagrame ilustrează funcții?

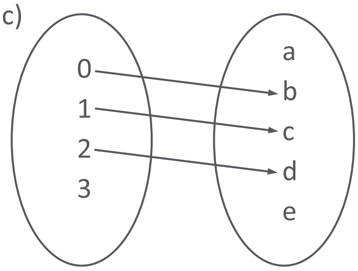
a)



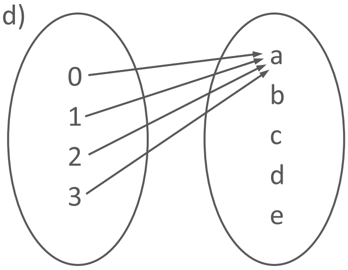
b)



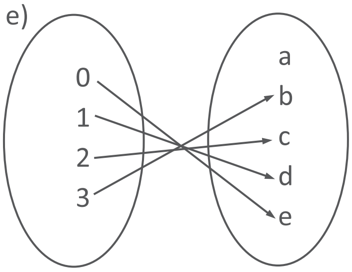
c)



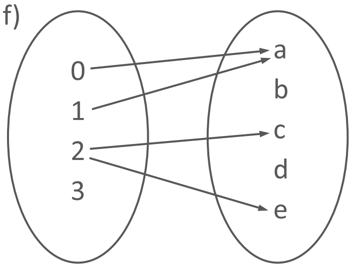
d)



e)

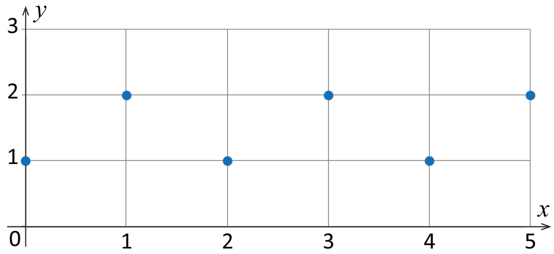


f)

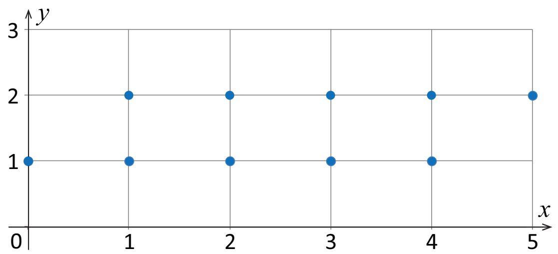


2. Care dintre următoarele imagini poate reprezenta graficul unei funcții $f : \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}$?

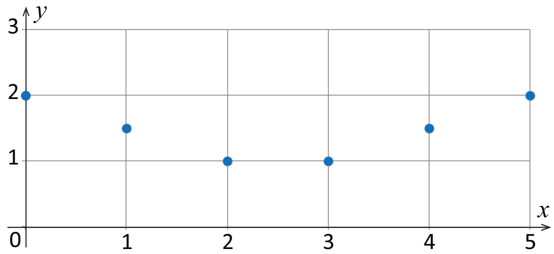
a)



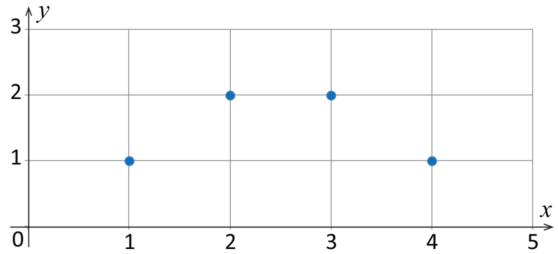
b)



c)



d)



3. Descoperă legea de corespondență și scrie, pe caiet, valorile numerelor a și b în fiecare caz:

a)

x	0	1	2	3	4	....	b
$f(x)$	2	3	4	5	a	....	100

b)

x	0	1	2	3	4	....	b
$f(x)$	0	2	4	6	a	....	100

c)

x	0	1	2	3	4	....	b
$f(x)$	1	4	7	10	a	....	100

d)

x	0	1	2	3	4	....	b
$f(x)$	1	4	9	16	a	....	100

4. Scrie mulțimea care reprezintă graficul funcției în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $f:\{-4,-2,0,2,4\}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-5$;

b) $f:\{-4,-2,0,2,4\}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x-5|$;

c) $f:\{-3,-1,1,3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+4$;

d) $f:\{-3,-2,0,2,3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-5$.

5. Stabilește care dintre următoarele puncte aparțin reprezentării geometrice a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x+5$: a) $A(0{,}5)$; b) $B(5{,}0)$; c) $C(1,-1)$; d) $D(-1{,}1)$; e) $E(-2,-3)$.

6. Pentru fiecare dintre următoarele funcții, determină coordonatele punctelor aflate la intersecția reprezentării geometrice a graficului cu axele sistemului de axe ortogonale și, apoi, reprezintă geometric graficul functiei f: a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+2$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-2$; c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-4x+5$; d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-6$.

7. Într-un sistem de axe ortogonale, reprezintă geometric graficul fiecăreia dintre următoarele funcții: a) $f:[-1{,}\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=-x+1$; b) $f:[-3{,}5]\to\mathbb{R},\ f(x)=x-4$; c) $f:(-\infty{,}2]\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+2$; d) $f:(-3{,}3)\to\mathbb{R},\ f(x)=x+3$; e) $f:(-2{,}2]\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-1$.

8. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx+m-4$, unde m este număr real. Determină numărul real m pentru care punctul $A(2,-1)$ aparține reprezentării geometrice a graficului acestei funcții.

9. Determină numărul real m pentru care punctul $N(-m{,}2m+1)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-5x-m-1$.

10. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(a-2)x+3-a$, unde a este număr real.

a) Determină numărul real a astfel încât $A(-2{,}4)\in G_f$, unde G_f notează graficul funcției f.

b) Pentru $a=1$, reprezintă geometric graficul functiei f.

11. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=2x-2$.

a) Reprezintă geometric graficele celor două funcții f și g, în același sistem de axe ortogonale.

b) Determină coordonatele punctului de intersecție a reprezentărilor geometrice ale graficelor celor două funcții f și g.

c) Calculează aria triunghiului determinat de reprezentările geometrice ale graficelor celor două funcții f și g și axa Oy.

12. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+4$.

a) Reprezintă geometric graficul funcție f, folosind punctele de intersecție ale acestuia cu axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale.

b) Calculează distanța de la originea sistemului de axe ortogonale la reprezentarea geometrică a graficul funcției f.

c) Determină punctul aparținând reprezentării geometrice a graficului funcției f pentru care diferența dintre ordonata și abscisa acestui punct este egală cu 5.

13. Pentru fiecare dintre seturile de date următoare, determină amplitudinea, modul, media și mediana: a) 0, 1, 4, 9; b) 0, 1, 4, 9, 16; c) −4, −3, −2, +2, +3, +4; d) −5, −4, −1, 0, 2, 3, 6, 7; e) 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4.

14. Determină un set de date format din trei numere scrise în ordine crescătoare pentru care mediana setului de date este 10, media 11, iar amplitudinea este egală cu 17.

15. Determină un set de date format din patru numere scrise în ordine crescătoare cu proprietatea că media setului de date este 10, mediana 11, iar modul este egal cu 12.

AUTOEVALUARE – În această unitate de învățare:

🟩 Am înțeles foarte bine ....

🟨 Îmi este neclar ....

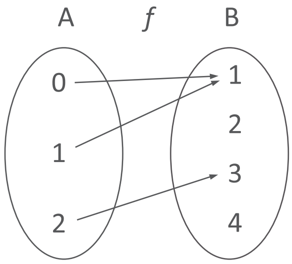
🟥 Nu știu să .... / Nu am înțeles ....

Revezi lecțiile și exercițiile noțiunilor notate la culoarea galbenă. Discută cu un coleg/ o colegă sau cu profesorul despre ceea ce nu ai înțeles și ai completat la culoarea roșie.

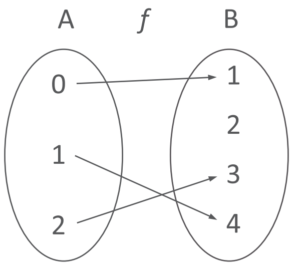
6. Evaluare

Timp de lucru: 45 de minute
Din oficiu 10p

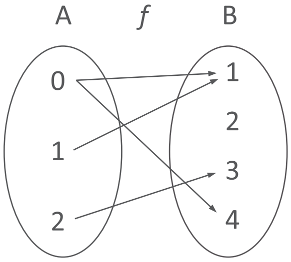
1. Se consideră următoarele diagrame: *5p*



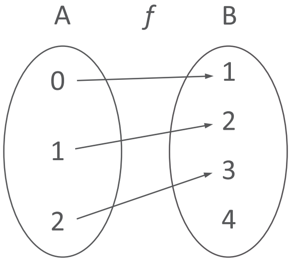
1



2



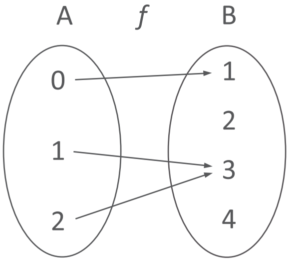
3



4

Dintre acestea, nu reprezintă o funcție diagrama:
A. 1; B. 2; C. 3; D. 4.
Scrie, pe foaie, litera corespunzătoare răspunsului corect.

2. Se consideră funcția descrisă de diagrama: *5p*
Atunci $f(1)$ este egal cu: A. 1; B. 2; C. 3; D. 4.
Scrie, pe foaie, litera corespunzătoare răspunsului corect.



3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, descrisă de tabelul: *10p*

x	3	6	9	12	b
$f(x)$	1	2	3	a	15

Atunci:
A. $a = 4$; $b = 5$; B. $a = 36$; $b = 45$; C. $a = 4$; $b = 45$; D. $a = 36$; $b = 5$.
Scrie, pe foaie, litera corespunzătoare răspunsului corect.

4. Scrie mulțimea care reprezintă graficul funcției $f : \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$. *10p*

5. Într-un sistem de axe ortogonale, reprezintă geometric graficul funcției
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$. *5p*

6. Într-un sistem de axe ortogonale, reprezintă geometric graficul funcției
$f : [-2{,}3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1$. *10p*

7. Determină numărul real a pentru care punctul $P(a, a + 1)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 5$. *5p*

8. Determină coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentările geometrice ale funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\text{g}(x) = x + 4$. *5p*

9. Se consideră punctele $A(-1{,}1)$, $B(1{,}3)$ și $C(-4, -2)$.
Stabilește dacă punctele A, B și C sunt coliniare. *10p*

10. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$.

a) Determină coordonatele punctelor M și N, intersecția reprezentării geometrice a graficului funcției cu axele Ox, respectiv Oy, ale sistemului de axe ortogonale. *10p*

b) Reprezintă geometric graficul funcției f. *5p*

c) Dacă $M(2{,}0)$ și $N(0, -4)$, calculează lungimea segmentului MN. *5p*

11. Determină un set de date format din patru numere naturale scrise în ordine crescătoare cu proprietatea că media lor aritmetică este 50, mediana este 60, iar modul este 70. *5p*

7. Exersezi și progresezi

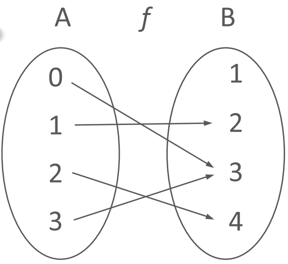
1. Scrie primele patru numere care se obțin după regula:

a) $f(n) = 3n - 1$, unde $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

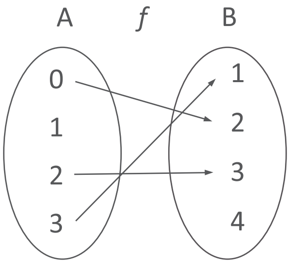
b) cubul locului pe care îl ocupă, în scriere, numărul.

c) $f(n) = 3n - 1$, unde n reprezintă locul pe care îl ocupă, în scriere, numărul.

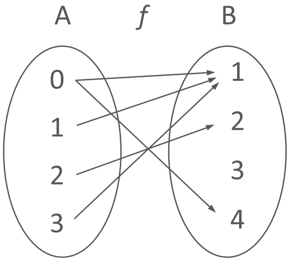
2. Care dintre diagramele următoare **nu** definesc o funcție? Justifică răspunsul dat.



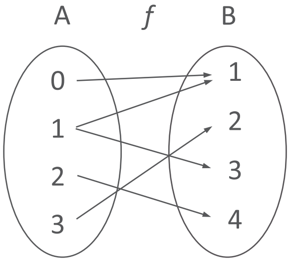
1



2

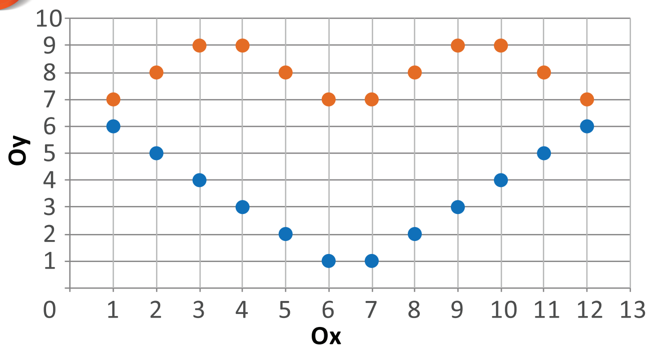


3



4

3. Stabilește de câte funcții definite pe mulțimea 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 cu valori în $\mathbb{R}$ ai nevoie pentru a descrie următoarea imagine:



4. Explică care dintre următoarele asocieri ar putea reprezenta o funcție și care nu.
Justifică răspunsurile date.

a) Persoană → Prenume sau Prenume → Persoană? (Un singur prenume)

b) Persoană → Vârstă sau Vârstă → Persoană?

c) Oraș → Țară sau Țară → Oraș?

d) Tren → Rută sau Rută → Tren?

Exemplu: Persoană → Prenume sau Prenume → Persoană?

În prima variantă asociem fiecărei persoane un prenume. Este posibil; pot avea mai multe persoane cu același prenume.

În a doua variantă asociem fiecărui prenume o persoană. Nu este posibil; fiecare prenume ar trebui să corespundă unei singure persoane, ceea ce este imposibil. Există mai multe persoane cu același prenume.

5. Se consideră funcția $f : \{-2, -1, 2, 3, 5\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$.

a) Precizează care este domeniul de definiție, care este mulțimea în care funcția ia valori și care este legea de corespondență pentru funcția f.

b) Scrie mulțimea care reprezintă graficul funcției f.

c) Într-un sistem de axe ortogonale, reprezintă geometric graficul funcției f.

6. Două companii oferă servicii de telefonie mobilă.

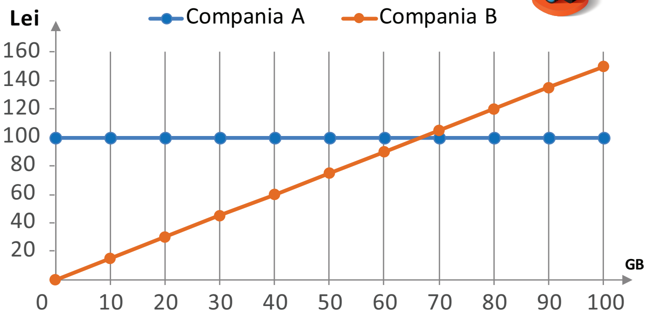
Prima companie oferă la prețul de 100 lei lunar o cantitate nelimitată de informații ce pot fi folosite prin serviciul de date mobile.

Pentru a doua companie, fiecare 10 GB de date mobile consumate costă 15 lei.

a) Ce companie ai alege dacă știi că vei consuma în luna următoare doar 50 GB?

b) Ce companie ai alege dacă știi că vei consuma în luna următoare peste 70 GB?

c) Determină cantitatea de date mobile consumată pe lună astfel încât prețul să fie la fel de avantajos de la ambele companii.



7. Se consideră funcția $f : \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 2$.

a) Prezintă funcția sub formă de tabel.

b) Într-un sistem de axe ortogonale, reprezintă geometric graficul funcției f.

8. Într-un sistem de axe ortogonale, reprezintă geometric graficele funcțiilor:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 5$;

b) $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 5$;

c) $f : [-2,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 5$;

d) $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 5$;

e)$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x + 3$;

f) $f : (-\infty,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = -x + 3$;

g) $f : (-2,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = -x + 3$;

h) $f : \{-2,1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x + 3$.

9. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 3$.

a) Determină punctul aparținând reprezentării geometrice a graficul funcției f care are abscisa egală cu -1.

b) Determină punctul aparținând reprezentării geometrice a graficul funcției f care are ordonata egală cu 1.

10. Determină numerele reale a și b, știind că punctul $A(1,1)$ este punctul de intersecție a reprezentării geometrice a graficelor funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -ax + 3$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 3x - b$.

11. Stabilește dacă următoarele puncte sunt coliniare:

a) $A(1, -1)$, $B(2,2)$ și $C(0, -4)$;

b) $A(-2,5)$, $B(1, -4)$ și $C(-1, -2)$;

c) $A(2,2)$, $B(0,1)$ și $C(-4, -1)$.

Matematică și tehnologie

Un exemplu important unde folosim funcții numerice definite pe mulțimi finite este reprezentat de realizarea diferitelor tipuri de ecrane. În cazul unui calculator sau laptop, puteți modifica din setările grafice ale ecranului rezoluția acestuia.

Acestea sunt de la 640×480 până la 1920×1080, poate chiar și mai mult. Aceleași rezoluții sunt întâlnite și în cazul aparatelor de fotografiat.

Aceste numere reprezintă în câte unități de imagine (numite pixeli) vom împărți imaginea noastră. Astfel rezoluția 1920×1080 înseamnă că pe lungime avem 1920 de unități, iar pe lățime 1080 de unități.

Fiecare pixel va fi reprezentat de o anumită culoare dominantă, așadar, cu cât avem mai mulți pixeli, cu atât imaginea noastră devine mai clară.

În anii 2000, majoritatea ecranelor folosite pentru calculatoare aveau rezoluții cuprinse între 800×600 (480 000 de pixeli) și 1024×768 (786 432 de pixeli). Între timp, tehnologia evoluează și am ajuns ca în cazul aparatelor de fotografiat, să avem denumirea de „24,2 MP”, adică numărul de pixeli este 6026×4017.

Pentru videoclipuri, imagini, televizoare etc. pentru formatul de imagine 16 : 9, cele mai des întâlnite rezoluții sunt de:

360p	**480p**	**HD 720p**	**FHD 1080p**	**QHD 1440p**	**4K 2160p**	**8K 4320p**
480×360	858×480	1280×720	1920×1080	2560×1440	3840×2160	7680×4320

a) Determină de câte ori sunt mai mulți pixeli în rezoluția **8K** față de cea din **HD**.

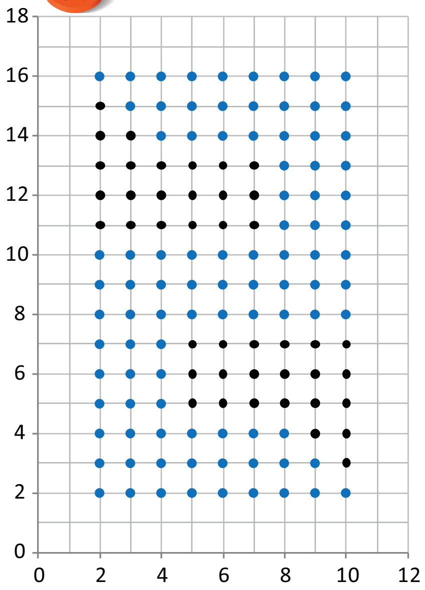
b) Ce rezoluție crezi că va avea tehnologia **16K**?

Cum este totuși transmisă imaginea prin intermediul acelui ecran?

Pentru a localiza fiecare pixel, îi vom asocia două coordonate, la fel ca în cazul unui sistem de axe ortogonale.

Să presupunem că avem rezoluția FHD. Astfel abscisele iau valori de la 1 la 1920, iar ordonatele de la 1 la 1080 (presupunând că am fixat colțul din stânga-jos al ecranului în punctul de coordonate (1,1)). Astfel, procesorul dispozitivului va ști cum să redea fiecare imagine, așezând în fiecare pixel culoarea corespunzătoare. În acest mod, am realizat o dependență funcțională între poziția fiecărui pixel și culoarea pe care i-o atribuim.

Pentru a înțelege mai bine acest fenomen, să presupunem că avem ecranul următor reprezentat deja într-un sistem de axe ortogonale, privit de la o distanță foarte mică (pe care o vom numi d):



c) Ce număr arată ecranul?

d) Câte culori apar în imagine?

e) Care este rezoluția ecranului?

f) Câte puncte sunt albastre?

Cum ar putea procesorul grafic să atribuie mai ușor culoarea albastră unităților de imagine din ecran?

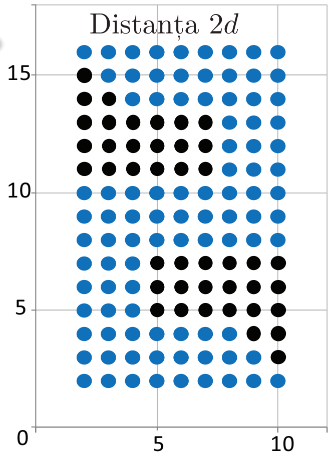
Pentru fiecare rând R de pixeli (unde R poate fi de la 2 la 16), generează o funcție de tipul:
$f_R : \{2, 3, 4, ..., 10\} \to \{0, 1\}$ astfel încât dacă, spre exemplu, $f_R(2) = 1$, atunci înseamnă că pixelul de coordonate $(2,R)$ este albastru, iar dacă $f_R(2) = 0$, atunci este negru.

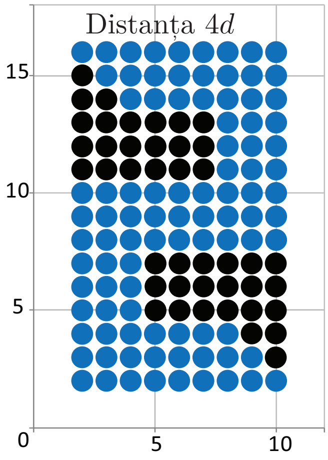
Pentru rândul $R = 2$, funcția este:
$f_2 : \{2, 3, ..., 10\} \to \{0, 1\}$, $f_2(x) = 1$, pentru orice $x \in \{2, 3, ..., 10\}$, deoarece toate unitățile de imagine sunt albastre pe acel rând.

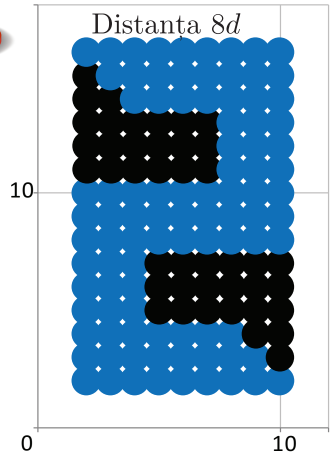
g) Scrie funcțiile generate pentru fiecare dintre rândurile $R = 3$, $R = 4$, $R = 6$, $R = 11$, $R = 14$ și $R = 15$.

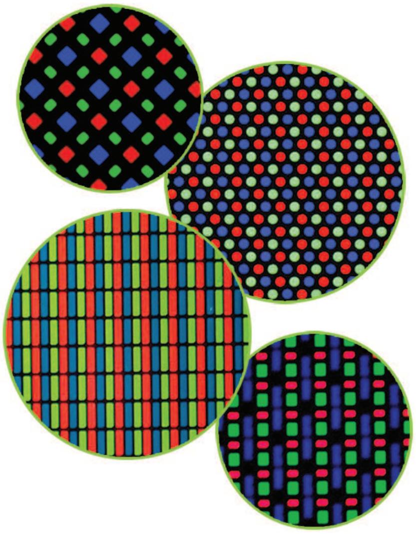
h) Folosește același ecran pentru a figura, pe rând, cifrele 5 și 8. Cum arată în fiecare dintre aceste cazuri funcțiile de atribuire a culorii?

În tabelul următor sunt reprezentate modurile în care imaginea de pe ecran este percepută de ochiul uman, de la distanțele respective:









Din fericire, imaginile observate de noi pe diferite ecrane au mai mult de două culori. Majoritatea tipurilor de ecrane au următorul procedeu pentru a reda diferite culori: se folosesc de paleta de culori RGB (Red – Roșu, Green – Verde, Blue – Albastru) și de proprietățile fizice ale luminii. Astfel, în fiecare pixel este înmagazinată o combinație dintre aceste trei culori, pentru a obține orice altă culoare. În imaginea următoare sunt reprezentate mai multe tipuri de configurații geometrice ale acestor componente pentru mai mulți pixeli.

Pentru fiecare dintre cele trei culori, se păstrează într-un format de 8 biți intensitatea pe care dorim să o folosim a culorii respective. Formatul de 8 biți generează numere naturale cu valori cuprinse între 0 și 255 (spre exemplu, $\overline{10001001}_{(2)} = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0 = 128 + 8 + 1 = \overline{137}_{(10)}$). Se construiește astfel funcția $RGB : \{0, 1, 2, ..., 255\} \times \{0, 1, 2, ..., 255\} \times \{0, 1, 2, ..., 255\} \to$ Mulțimea culorilor, unde prima componentă din domeniu reprezintă intensitatea culorii roșii, a doua a culorii verzi, a treia a culorii albastre, iar în tabel sunt reprezentate câteva valori ale funcției:

		R, G, B.
⬛	Negru	(0, 0, 0)
⬜	Alb	(255, 255, 255)
🟥	Roșu	(255, 0, 0)
🟩	Verde deschis	(0, 255, 0)
🟦	Albastru	(0, 0, 255)
🟨	Galben	(255, 255, 0)
🟦	Cyan	(0, 255, 255)
🟪	Magenta	(255, 0, 255)
⬜	Argintiu	(192, 192, 192)
⬛	Gri	(128, 128, 128)
🟫	Maro	(128, 0, 0)
🟫	Măsliniu	(128, 128, 0)
🟩	Verde	(0, 128, 0)
🟪	Violet	(128, 0, 128)
🟦	Turcoaz	(0, 128, 128)
🟦	Bleumarin	(0, 0, 128)

Observăm din tabelul alăturat că, spre exemplu:

$RGB(0,0,0)$ =negru,

$RGB(255,0,255)$=magenta ș.a.m.d.

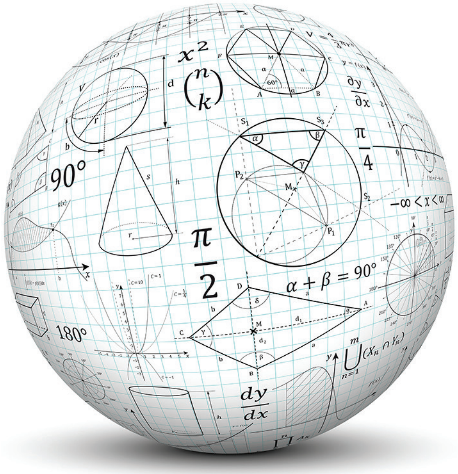
h) Câte culori pot fi generate cu acest procedeu?

i) Caută pe Internet $RGB(60,60,60)$ și observă ce culoare vei obține. Caută și notează alte trei culori găsite de tine care nu apar în tabelul alăturat.

Pentru a reveni acum la modul în care sunt construite imaginile pe un ecran cu rezoluția $m \times n$, se asociază fiecărui pixel o culoare folosind funcția RGB.

Mai exact, dacă pentru pixelul de pe linia i și coloana j, unde $i \in \{1, 2, ..., m\}$ și $j \in \{1, 2, ..., n\}$, asociem culoarea $RGB(a,b,c)$, cu a, b și c numere naturale cuprinse între 0 și 255, avem, asemănător cu situația mai simplă de la subpunctul c):

$f_i(j) = RGB(a,b,c)$.



VII

Elemente ale geometriei în spațiu. Noțiuni introductive. Corpuri geometrice

1. Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei, determinarea planului, relații între puncte, drepte, plane

Amintește-ți!

1. Observă imaginea din *Figura 1* și alege răspunsul corect la fiecare dintre întrebările următoare:

a) Punctul ni-l imaginăm ca:

A. un fir de ață bine întins; B. urma lăsată pe tablă de un marker; C. tabla care se extinde la nesfârșit în toate direcțiile; D. tot ceea ce ne înconjoară.

b) Dreapta ne-o imaginăm ca:

A. un fir de ață bine întins; B. urma lăsată pe tablă de un marker; C. tabla care se extinde la nesfârșit în toate direcțiile; D. tot ceea ce ne înconjoară.

c) Planul ni-l imaginăm ca:

A. un fir de ață bine întins; B. urma lăsată pe tablă de un marker; C. tabla care se extinde la nesfârșit în toate direcțiile; D. tot ceea ce ne înconjoară.

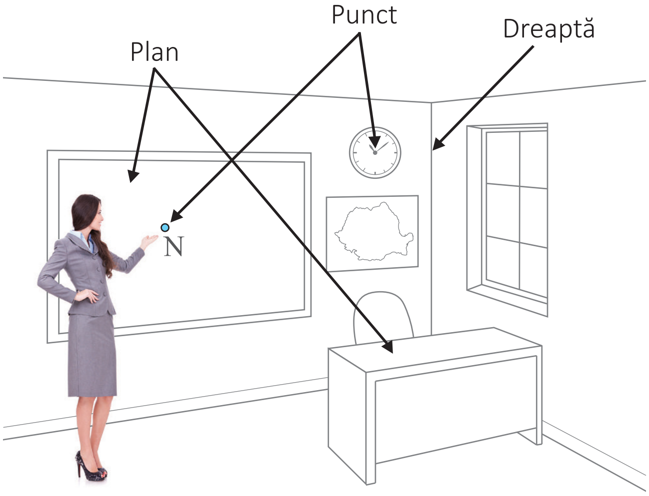


Figura 1

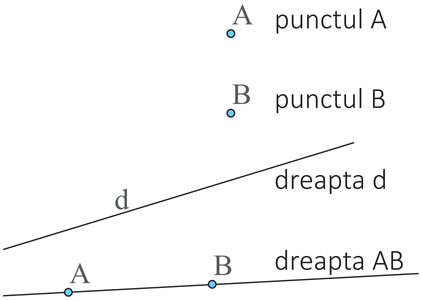
Important

• **Punctul** ni-l imaginăm ca fiind urma lăsată pe tablă de un marker. Punctul nu are dimensiune, are numai poziție.

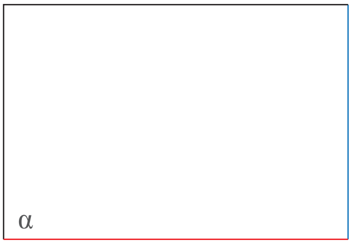
• **Dreapta** ne-o imaginăm ca fiind un fir de ață bine întins, fără capete. Dreapta are o singură dimensiune (1D).

• **Axioma dreptei:** Prin orice două puncte distincte trece o dreaptă și numai una. Pe orice dreaptă există cel puțin două puncte distincte.

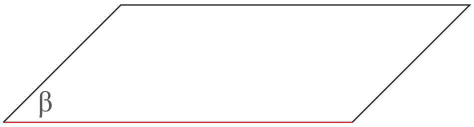
• **Planul** ni-l imaginăm ca fiind tabla care se extinde la nesfârșit în toate direcțiile. Planul are două dimensiuni (2D).



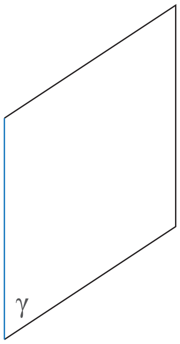
Axiomă: Este o afirmație pe care o considerăm adevărată fără a o justifica.



planul alfa
Așa desenez planul imaginat de tablă.



planul beta
Așa desenez planul imaginat de catedră.

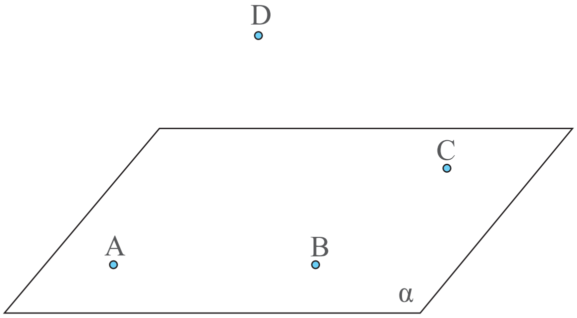


planul gama
Așa desenez planul imaginat de peretele lateral.

- **Axioma planului:** Prin orice trei puncte necoliniare trece un plan și numai unul. În orice plan există cel puțin trei puncte necoliniare.

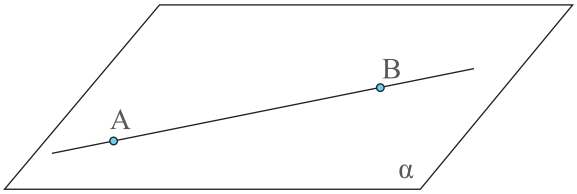
$\alpha = (ABC)$
(ABC) citesc „planul ABC"

- **Spațiul** este tot ce ne înconjoară. Spațiul are trei dimensiuni (3D).
- **Axioma spațiului:** Există patru puncte care nu sunt situate în același plan (puncte necoplanare).



- **Alte axiome ale geometriei în spațiu:**

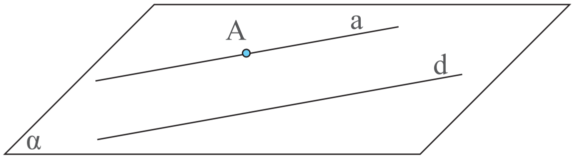
▷ **Axioma includerii:** Dacă două puncte aparțin unui plan, atunci dreapta determinată de ele este inclusă în plan.



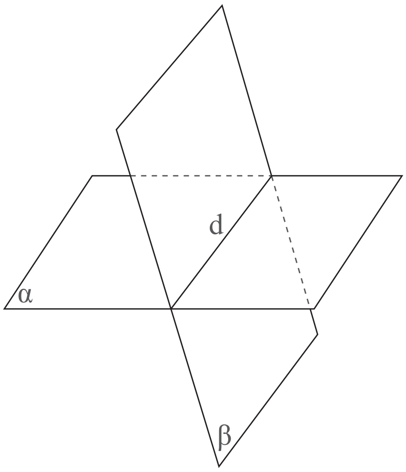
$A, B \in \alpha \Rightarrow AB \subset \alpha$

Planul este o mulțime de puncte, deci punctele aparțin planului.
Dreapta este o mulțime de puncte, deci submulțime a planului; dreapta este inclusă în plan.

▷ **Axioma paralelelor sau Postulatul lui Euclid:** Prin orice punct exterior unei drepte se poate construi o paralelă și numai una la acea dreaptă.



▷ **Axioma intersecției:** Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci planele au în comun o dreaptă. (Dacă două plane distincte se intersectează, atunci intersecția lor este o dreaptă.)



$\alpha \cap \beta = d$

Exemplu: În Figura 1, muchia dintre tavan și peretele cu tabla este dreapta de intersecție a celor două plane.

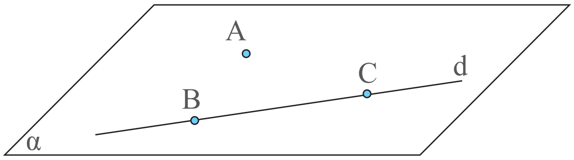
- A determina un plan înseamnă a preciza numărul minim de elemente (puncte, drepte) necesar pentru a ști cu exactitate unde se află un plan într-o configurație.

▷ **Trei puncte necoliniare determină un plan** (conform axiomei planului).

Scriu: $\alpha = (ABC)$. Citesc: planul α este planul determinat de punctele A, B, C.

▷ **O dreaptă și un punct exterior determină un plan.**

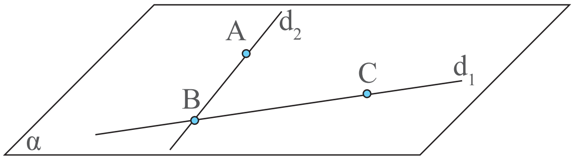
Justificare: Punctele B și C din planul α determină dreapta d (axioma dreptei) care este inclusă în planul α (axioma includerii). Deci putem înlocui punctele B și C cu dreapta d.



Scriu $\alpha = (d,A)$. Citesc: planul α este planul determinat de dreapta d și punctul A.

▷ **Două drepte concurente determină un plan.**

Justificare: Dreapta d_1 este determinată de punctele distincte B și C (axioma dreptei). Punctele B și C aparțin planului α, deci dreapta determinată de ele este inclusă în planul α (axioma includerii). Dreapta d_2 este determinată de punctele distincte A și B (axioma dreptei).

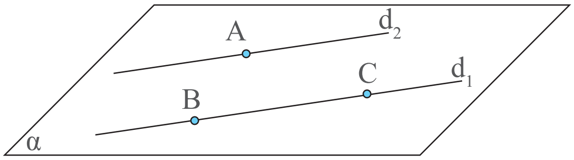


Punctele A și B aparțin planului α, deci dreapta determinată de ele este inclusă în planul α (axioma includerii). Putem, așadar, înlocui punctele A, B și C cu dreptele concurente d_1 și d_2.

Scriu: $\alpha = (d_1,d_2)$. Citesc: planul α este planul determinat de dreptele d unu și d doi.

▷ **Două drepte paralele determină un plan.**

Justificare: Dreapta d_1 este determinată de punctele distincte B și C (axioma dreptei). Punctele B și C aparțin planului α, deci dreapta determinată de ele este inclusă în planul α (axioma includerii).



Conform axiomei paralelelor, prin punctul A pot construi o paralelă și numai una la dreapta d_1. Fie aceasta d_2.

Scriu: $\alpha = (d_1,d_2)$. Citesc: planul α este planul determinat de dreptele d unu și d doi.

Exersează!

2. Folosind *Figura 2* numește trei drepte și trei plane.

3. Identifică, în jurul tău, câte două exemple de drepte și două exemple de plane.

4. Identifică, în jurul tău, patru puncte necoplanare.

5. Scrie toate dreptele determinate de patru puncte A, B, C și D, oricare trei necoliniare.

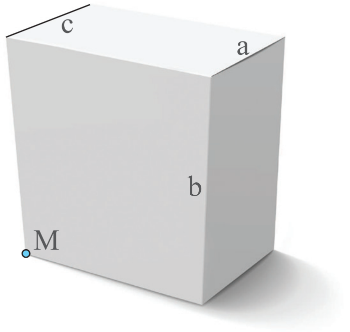


Figura 2

6. Se consideră planul α și dreptele d_1 și d_2, ca în *Figura 3*. Știm că dreptele d_1 și d_2 se intersectează în O, dreapta d_2 este inclusă în planul α, iar punctul A aparține și dreptei d_1 și planului α.

Justifică de ce dreapta d_1 este inclusă în planul α.

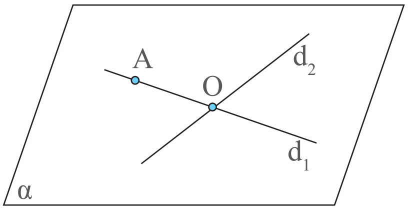


Figura 3

7. Scrie toate planele determinate de patru puncte necoplanare A, B, C și D.

8. Folosind *Figura 4* stabilește care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate și care sunt false.

a) $A \in \alpha$; b) $D \notin \alpha$; c) $C \in \alpha$; d) $(BAC) \neq \alpha$; e) $(ABD) = \alpha$; f) $AD \subset \alpha$; g) $BC \subset \alpha$.

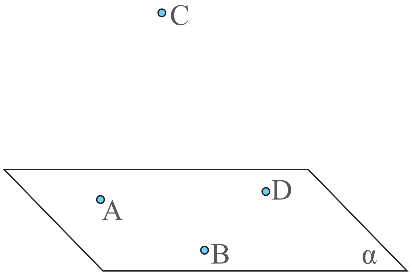


Figura 4

9. În *Figura 5* avem $d, e \subset \alpha$; $f, g \subset \beta$; $d \cap e = \{A\}$; $d \cap g = \{B\}$; $e \cap f = \{C\}$ și $f \cap g = \{D\}$.

a) Determină $\alpha \cap \beta$.

b) Completează cu semnele $\in$, $\notin$, $\subset$ sau $\not\subset$ următoarele enunțuri:
i) D .... α; ii) A .... (d, g); iii) AD .... α; iv) AD .... (e, f).

c) Determină $(d, e) \cap (f, g)$.

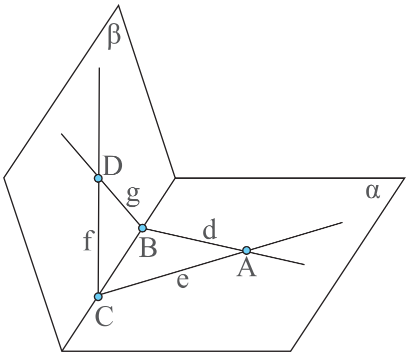


Figura 5

10. Se consideră un dreptunghi $ABCD$ și E un punct exterior planului dreptunghiului.

a) Realizează un desen corespunzător enunțului.

b) Scrie toate planele determinate de aceste puncte.

11. Într-un plan α se consideră punctele A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 și în exteriorul lui se consideră punctul M.

a) Care este cel mai mare număr de drepte determinate de aceste puncte și în ce condiții se obține acest număr de drepte?

b) Care este cel mai mic număr de drepte determinate de aceste puncte și în ce condiții se obține acest număr de drepte?

12. Într-un plan α se consideră punctele A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 și în exteriorul lui se consideră punctul M.

a) Care este cel mai mare număr de plane determinate de aceste puncte și în ce condiții se obține acest număr de plane?

b) Care este cel mai mic număr de plane care conțin și punctul M și în ce condiții se obține acest număr de plane?

13. Dreptunghiurile $ABCD$ și $ABEF$, din *Figura 6*, sunt situate în plane diferite.
a) Determină dreapta de intersecție a planelor (ABC) și (BDE).
b) Determină dreapta de intersecție a planelor (BDF) și (ACE).

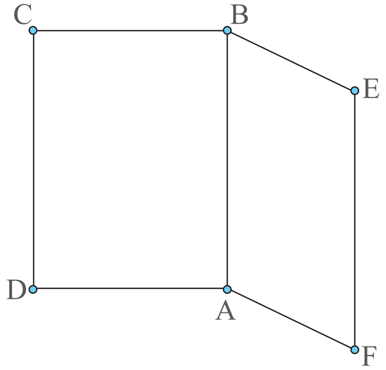


Figura 6

14. Problemă rezolvată: Se consideră dreptele diferite d_1, d_2 și d_3 astfel încât $d_1 \cap d_2 = \{A\}$, $d_1 \cap d_3 = \{B\}$ și $d_2 \cap d_3 = \{C\}$. Demonstrează că dacă punctele A, B și C sunt diferite, atunci dreptele sunt coplanare.

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Punctele A, B, C nu pot fi coliniare.

Cum scriu: Din $d_1 \cap d_2 = \{A\} \Rightarrow A \in d_1$ și $A \in d_2$.
Din $d_1 \cap d_3 = \{B\} \Rightarrow B \in d_1$ și $B \in d_3$.
Din $d_2 \cap d_3 = \{C\} \Rightarrow C \in d_2$ și $C \in d_3$.
De aici $d_1 = AB$, $d_2 = AC$ și $d_3 = BC$.
Dacă punctele A, B, C sunt coliniare, atunci dreptele d_1, d_2 și d_3 coincid.
Dar d_1, d_2 și d_3 sunt drepte diferite.

Pas 2. Oricare trei puncte necoliniare determină un plan.

Se consideră $\alpha = (ABC)$.

Pas 3. Axioma includerii spune că „dacă două puncte aparțin unui plan, atunci dreapta determinată de ele este inclusă în plan”.

$$\left.\begin{array}{l} A \in \alpha \\ B \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow AB \subset \alpha. \text{ Dar } AB = d_1 \Rightarrow d_1 \subset \alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l} A \in \alpha \\ C \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow AC \subset \alpha. \text{ Dar } AC = d_2 \Rightarrow d_2 \subset \alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l} B \in \alpha \\ C \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow BC \subset \alpha. \text{ Dar } BC = d_3 \Rightarrow d_3 \subset \alpha.$$

Pas 4. Toate dreptele sunt în planul α, deci sunt coplanare.

De aici rezultă că d_1, d_2 și d_3 sunt coplanare.

15. Se consideră dreptele diferite d_1, d_2 și d_3 astfel încât $d_1 \cap d_2 = \{A\}$, $d_1 \cap d_3 = \{B\}$ și $d_2 \cap d_3 = \{C\}$. Demonstrează că dacă dreptele d_1, d_2 și d_3 sunt necoplanare, atunci punctele A, B și C coincid.

16. Problemă rezolvată: Se consideră dreptele necoplanare d_1, d_2 și d_3, concurente într-un punct O.

Pe dreapta d_1 se iau punctele A_1 și A_2, pe dreapta d_2 se iau punctele B_1 și B_2, pe dreapta d_3 se iau punctele C_1 și C_2 astfel încât $A_1B_1 \cap A_2B_2 = \{M\}$, $A_1C_1 \cap A_2C_2 = \{N\}$ și $B_1C_1 \cap B_2C_2 = \{P\}$.

Demonstrează că punctele M, N și P sunt coliniare. (**Teorema lui Desargues**)

Gerard Desargues (1591 – 1661) matematician și inginer francez. A fost unul dintre fondatorii geometriei proiective.

Soluție:

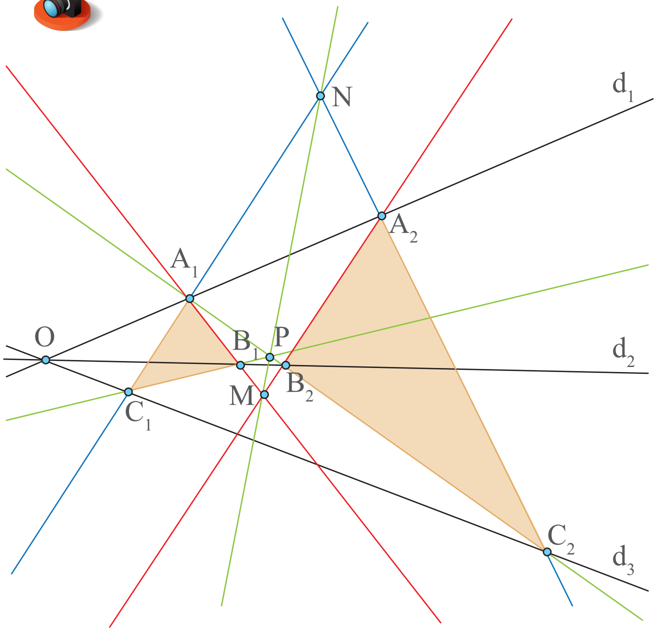


Figura 7

Cum gândesc: Pas 1. Trei puncte necoliniare determină un plan. (**Determinarea planului**)

Cum scriu: Punctele A_1, B_1 și C_1 sunt necoliniare, deci există un plan $\alpha = (A_1B_1C_1)$.
Punctele A_2, B_2 și C_2 sunt necoliniare, deci există un plan $\beta = (A_2B_2C_2)$.

Pas 2. Dacă două puncte sunt situate într-un plan, atunci dreapta determinată de ele este inclusă în acest plan. (**Axioma includerii**)

Cum A_1, $B_1 \in \alpha \Rightarrow A_1B_1 \subset \alpha$ și A_2, $B_2 \in \beta \Rightarrow A_2B_2 \subset \beta$.

Pas 3. Punctul M, fiind intersecția dreptelor A_1B_1 și A_2B_2, aparține ambelor plane, adică aparține dreptei lor de intersecție.

$\{M\} = A_1B_1 \cap A_2B_2 \Rightarrow M \in A_1B_1$ și $M \in A_2B_2$.
Deci $M \in A_1B_1 \subset \alpha \Rightarrow M \in \alpha$ și $M \in A_2B_2 \subset \beta \Rightarrow M \in \beta$.
Din $\left.\begin{array}{c} M \in \alpha \\ M \in \beta \end{array}\right\} \Rightarrow M \in \alpha \cap \beta$ (1).

Pas 4. Punctul N, fiind intersecția dreptelor A_1C_1 și A_2C_2, aparține ambelor plane, adică aparține dreptei lor de intersecție.

Punctul P, fiind intersecția dreptelor B_1C_1 și B_2C_2, aparține ambelor plane, adică aparține dreptei lor de intersecție.

Analog, $N \in \alpha \cap \beta$ (2) și $P \in \alpha \cap \beta$ (3).

Pas 5. Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci au comun o dreaptă. (**Axioma intersecției**)

Considerăm $d = \alpha \cap \beta$.

Pas 6. Cum punctele M, N și P aparțin intersecției celor două plane, ele vor fi situate pe dreapta d, deci sunt coliniare.

Din (1), (2) și (3) rezultă $M, N, P \in d$, adică punctele M, N și P sunt coliniare.

2. Corpuri geometrice: piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări

Amintește-ți!


A


B


C


D

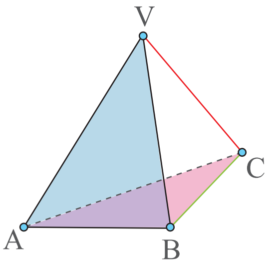

E

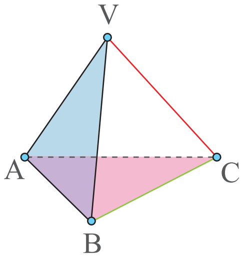
1. În care dintre imaginile de mai sus recunoști o piramidă?

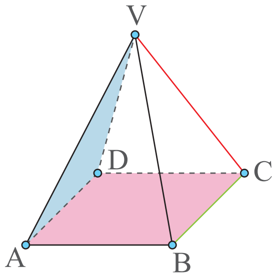
Important

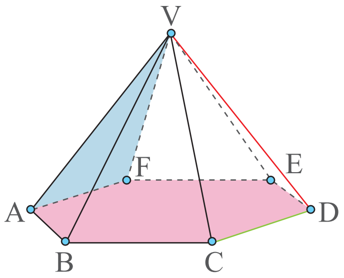
- Obiectele din spațiu se numesc corpuri geometrice.

- Piramida este un corp geometric.









- Elementele unei piramide:

▷ **Baza piramidei.** Este un poligon. În figurile de mai sus, bazele piramidelor sunt: triunghi, patrulater sau hexagon. Forma bazei dă numele piramidei: piramidă triunghiulară, piramidă patrulateră, piramidă hexagonală.

▷ **Fețele laterale.** Sunt totdeauna triunghiuri. Numărul fețelor laterale depinde de forma bazei.

La piramida triunghiulară sunt trei fețe laterale ($\triangle VAB$, $\triangle VBC$ și $\triangle VAC$).

La piramida patrulateră sunt patru fețe laterale ($\triangle VAB$, $\triangle VBC$, $\triangle VCD$ și $\triangle VDA$).

La piramida hexagonală sunt șase fețe laterale ($\triangle VAB$, $\triangle VBC$, $\triangle VCD$, $\triangle VDE$, $\triangle VEF$ și $\triangle VFA$).

▷ **Vârful piramidei.** Este punctul comun tuturor fețelor laterale (V).

▷ **Vârfurile bazei.** Sunt vârfurile poligonului care reprezintă baza piramidei (A, B și C la piramida triunghiulară, A, B, C și D la piramida patrulateră și A, B, C, D, E și F la piramida hexagonală).

▷ **Muchiile bazei.** Sunt laturile poligonului ce reprezintă baza piramidei (de exemplu: AB, BC, CD, DE, EF și FA la piramida hexagonală).

▷ **Muchiile laterale.** Sunt segmentele care unesc vârful piramidei cu vârfurile bazei. Numărul muchiilor laterale este egal cu numărul vârfurilor bazei (de exemplu: AV, BV, CV și DV la piramida patrulateră).

- Piramida triunghiulară se mai numește și **tetraedru**. La un tetraedru oricare față poate fi considerată bază.

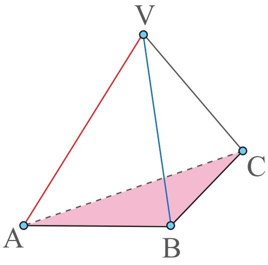
- **Piramida regulată** este piramida cu baza poligon regulat (triunghi echilateral, pătrat, hexagon regulat) și muchiile laterale congruente.

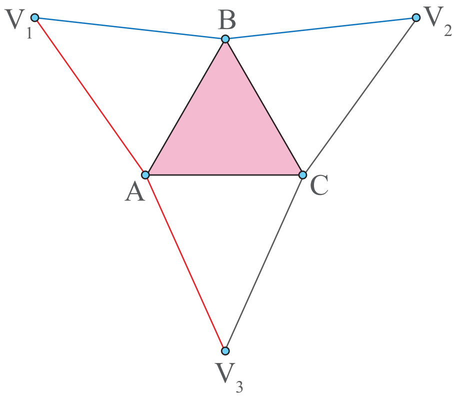
- **Tetraedru regulat** este un tetraedru cu toate muchiile congruente.

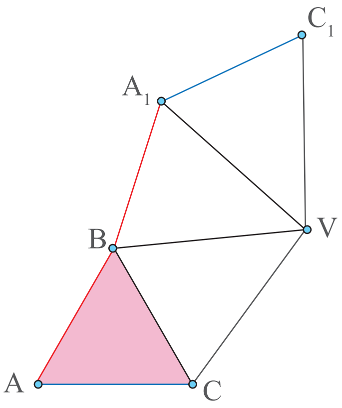
- **A desfășura o piramidă** înseamnă a reprezenta în același plan baza și fețele laterale astfel încât după decupare, prin pliere, să obținem piramida inițială.

- Posibile desfășurări ale unei piramide:

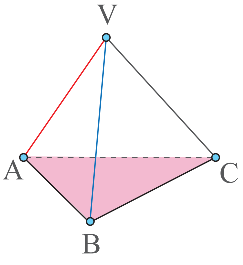
▷ Piramida regulată cu baza triunghi echilateral.

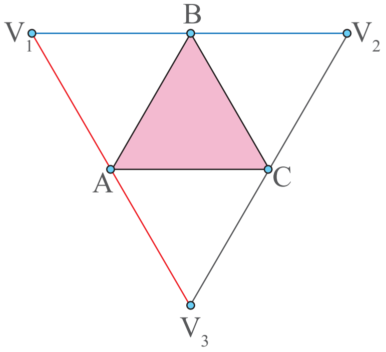


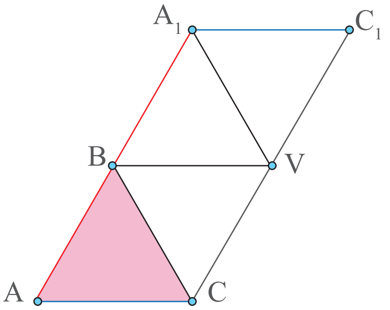




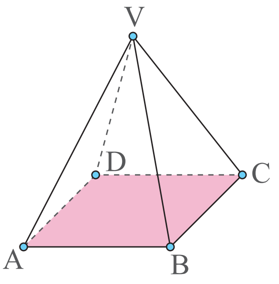
▷ Tetraedru regulat.

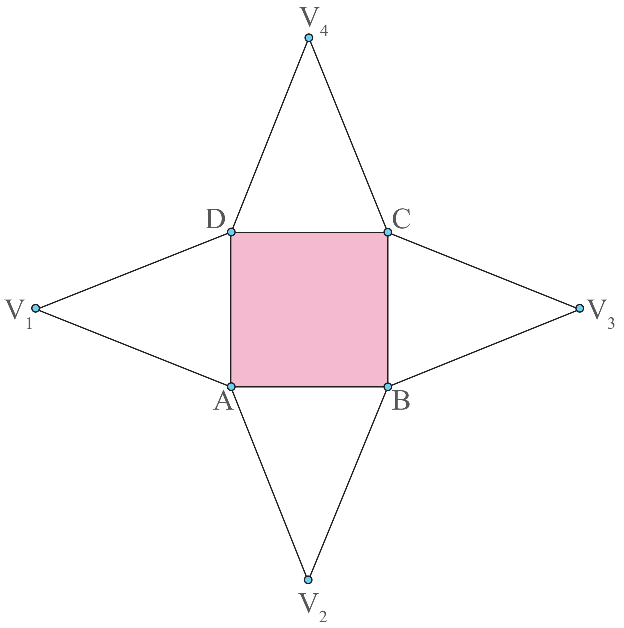


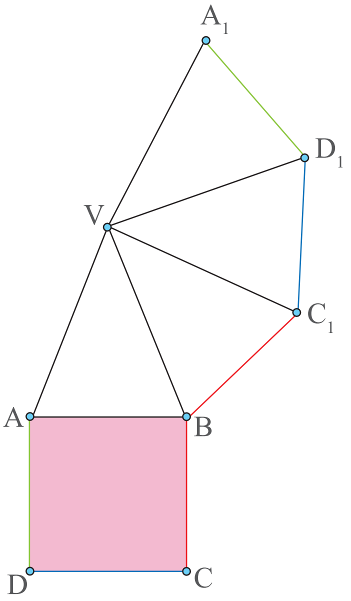




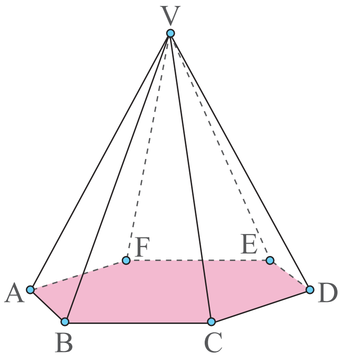
▷ Piramida regulată cu baza pătrat.

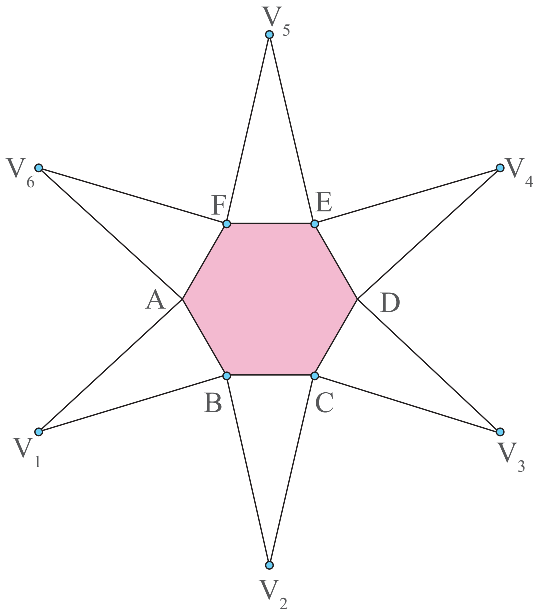


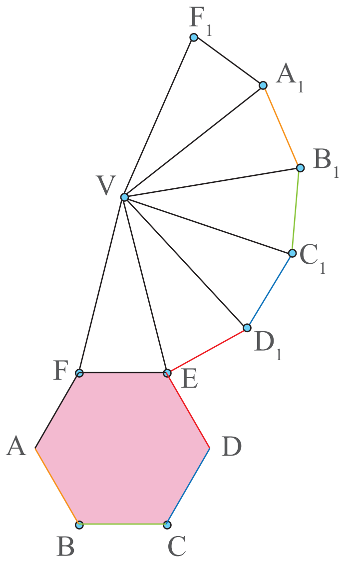




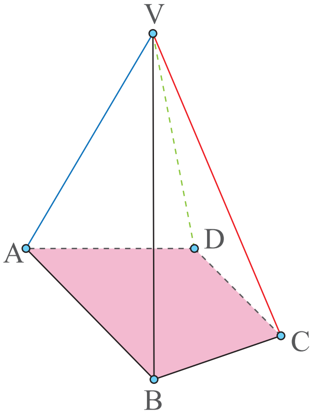
▷ Piramida regulată cu baza hexagon regulat.

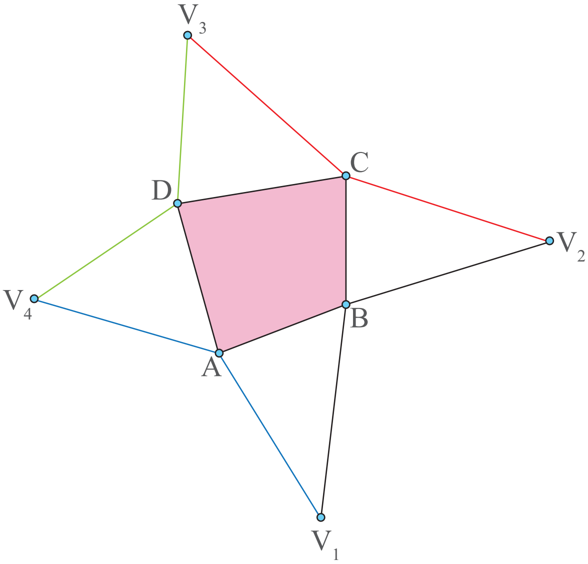






▷ Piramida patrulateră.





Exersează!

2. Completează spațiile punctate astfel încât să obținem afirmații adevărate:

a) Piramida cu baza triunghi se mai numește și .... .

b) O muchie a unui tetraedru regulat are lungimea egală cu 5 cm. Suma lungimilor tuturor muchiilor acestui tetraedru este egală cu .... cm.

c) O piramidă cu baza hexagon are .... fețe laterale.

d) O piramidă cu baza patrulater are cinci .... .

3. Se consideră patru piramide, una cu baza triunghi, una cu baza patrulater, una cu baza pentagon și una cu baza hexagon.

a) Realizează câte un desen pentru fiecare tip de piramidă.

b) Determină numărul de vârfuri v, pentru fiecare piramidă.

c) Determină numărul total de fețe f, pentru fiecare piramidă.

d) Determină numărul de muchii m, pentru fiecare piramidă.

e) Verifică, pentru fiecare piramidă în parte, relația $v - m + f = 2$.

4. O piramidă are 8 muchii. Determină numărul fețelor laterale ale acestei piramide.

5. O piramidă are 6 fețe laterale. Determină numărul muchiilor acestei piramide.

6. În *Figura 8* este reprezentată piramida $VABCDEF$ cu baza hexagon regulat, unde O este centrul hexagonului $ABCDEF$.

Determină următoarele intersecții de plane:

a) $(VAB) \cap (CDE)$; b) $(VAB) \cap (VBC)$; c) $(VOA) \cap (VOE)$; d) $(VOF) \cap (ABC)$; e) $(VCF) \cap (VBC)$; f) $(VCF) \cap (VBE)$; g) $(VAD) \cap (VBE)$; h) $(VCD) \cap (VEF)$ (Indicație: construiește $CD \cap EF = G$); i) $(VAB) \cap (VEF)$; j) $(VAC) \cap (VBF)$ (Indicație: construiește $AC \cap BF = \{H\}$); k) $(VCE) \cap (VDF)$.

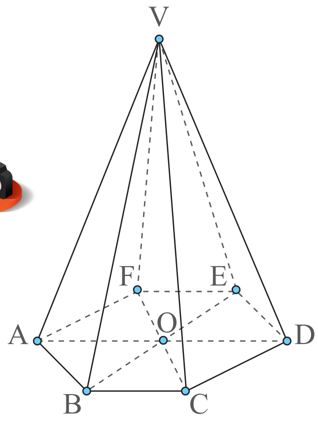


Figura 8

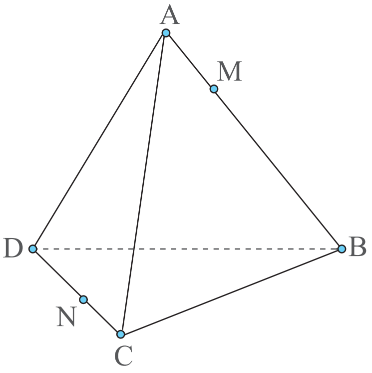


Figura 9

7. În *Figura 9* este desenată o piramidă triunghiulară $ABCD$ și punctele $M \in AB$ și $N \in CD$.

a) Câte plane distincte, din *Figura 9*, conțin punctul N?

b) Precizează dreapta de intersecție în fiecare dintre cazurile următoare: i) (ABN) și (ABC); ii) (AMN) și (BCD); iii) (ABN) și (CDM).

8. Un tetraedru regulat are muchia de lungime 8 cm. Calculează suma lungimilor tuturor muchiilor.

9. Suma lungimilor tuturor muchiilor unui tetraedru regulat este egală cu 72 cm.

a) Determină aria unei fețe a acestui tetraedru.

b) Determină perimetrul unei fețe a acestui tetraedru.

10. O piramidă regulată cu baza pătrat are muchia bazei egală cu 8 cm și muchia laterală egală cu 10 cm. a) Calculează perimetrul bazei. b) Calculează perimetrul unei fețe laterale. c) Calculează suma lungimilor tuturor muchiilor.

11. O piramidă regulată cu baza pătrat are fețele laterale triunghiuri echilaterale. Suma lungimilor tuturor muchiilor piramidei este 48 cm.

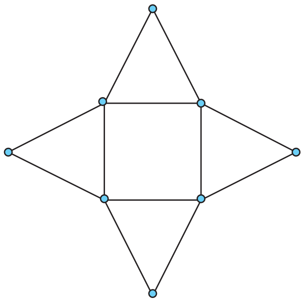
a) Cât este suma lungimilor muchiilor laterale ale acestei piramide?

b) Calculează aria bazei piramidei.

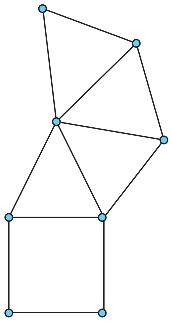
12. Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$, cu $AB = 6$ cm. O furnică pleacă din vârful B și ajunge în vârful D mergând pe fețele ABC și ACD. Determină lungimea celui mai scurt drum pe care furnica ajunge din B în D.

13. Care dintre următoarele imagini pot reprezenta desfășurări ale unei piramide regulate cu baza pătrat?

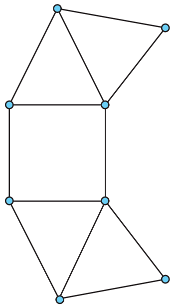
a)



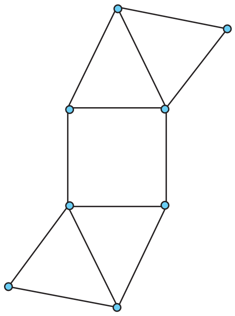
b)



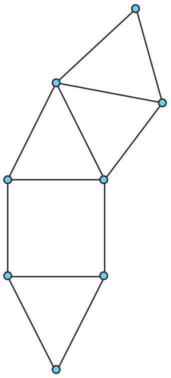
c)



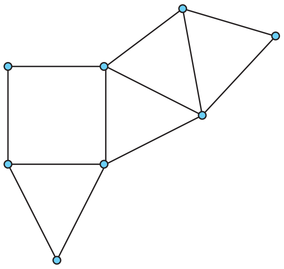
d)



e)



f)



3. Corpuri geometrice: prisma dreaptă, paralelipiped dreptunghic, cub; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări

Amintește-ți!


A


B


C


D


E

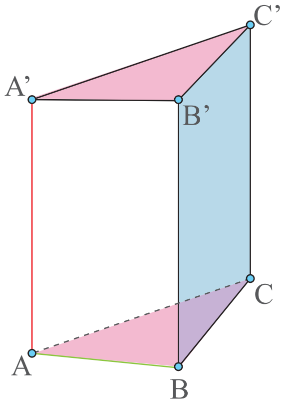
1	2	3
Cub	Paralelipiped dreptunghic	Prismă dreaptă

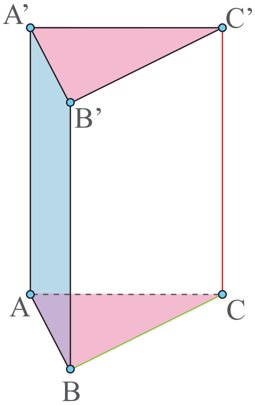
1. Asociază, dacă este posibil, obiectele din primul rând cu denumirea corespunzătoare din tabel, după model.

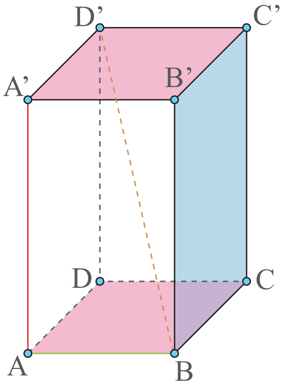
Model: (A,3).

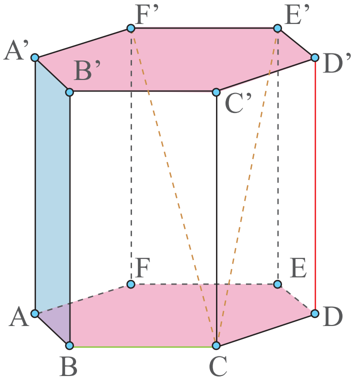
Important

- **Prisma dreaptă** este un corp geometric.









- **Elementele unei prisme drepte:**

▷ **Bazele prismei.** Sunt două poligoane congruente. În figurile de mai sus bazele prismelor sunt: triunghiurile ABC și $A'B'C'$, pătratele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ sau hexagoanele $ABCDEF$ și $A'B'C'D'E'F'$. Forma bazei dă numele prismei: prismă dreaptă cu baza triunghi, prismă dreaptă cu baza patrulater, prismă dreaptă cu baza hexagon.

▷ **Fețe laterale.** Sunt totdeauna dreptunghiuri. Numărul fețelor laterale depinde de forma bazei. La prisma dreaptă cu baza triunghi sunt trei fețe laterale: $ABB'A'$, $BCC'B'$ și $ACC'A'$. La prisma dreaptă cu baza patrulater sunt patru fețe laterale: $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ și $ADD'A'$. La prisma dreaptă cu baza hexagon sunt șase fețe laterale: $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$, $EFF'E'$ și $FAA'F'$.

▷ **Muchiile bazelor.** Sunt laturile poligoanelor ce reprezintă bazele prismei (AB, BC, CD și DA, respectiv $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ și $D'A'$ la o prismă dreaptă cu baza patrulater).

▷ **Vârfurile prismei.** Sunt vârfurile poligoanelor care reprezintă bazele prismei (A, B, C, A', B' și C' la o prismă dreaptă cu baza triunghi).

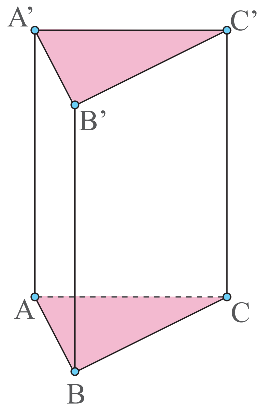
▷ **Muchiile laterale.** Sunt laturile unei fețe laterale care nu sunt muchii ale bazei. Numărul muchiilor laterale depinde de forma bazei. La prisma dreaptă cu baza triunghi sunt trei muchii laterale: AA', BB' și CC'. La prisma dreaptă cu baza patrulater sunt patru muchii laterale: AA', BB', CC' și DD'. La prisma dreaptă cu baza hexagon sunt șase muchii laterale: AA', BB', CC', DD', EE' și FF'.

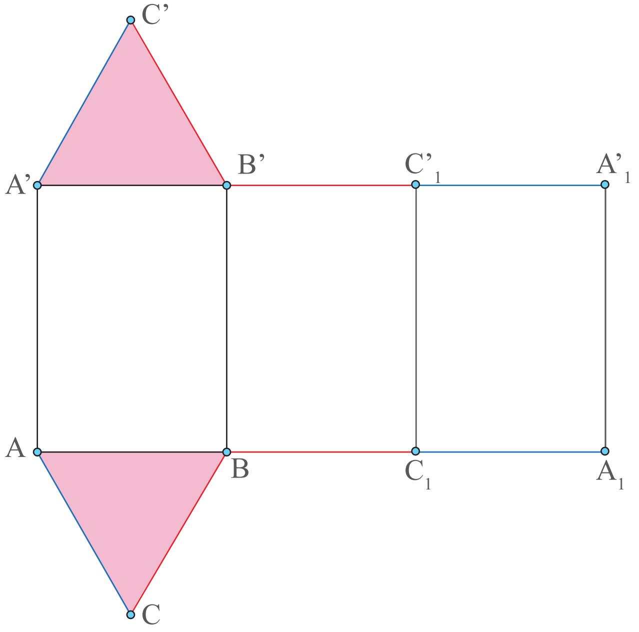
▷ **Diagonalele prismei** sunt segmente care unesc două vârfuri din baze diferite, nesituate pe aceeași față laterală. Prisma dreaptă cu baza triunghi nu are diagonale. În prisma dreaptă cu baza patrulater sunt patru diagonale: AC', BD', CA' și DB'. În prisma dreaptă cu baza hexagon sunt 18 diagonale: AD', BE', CF', DA', EB', FC', AC', AE', BD', BF', CA', CE', DB', DF', EC', EA', FD' și FB'.

- **A desfășura o prismă dreaptă** înseamnă a reprezenta în același plan bazele și fețele laterale astfel încât după decupare, prin pliere, să obținem prisma inițială.

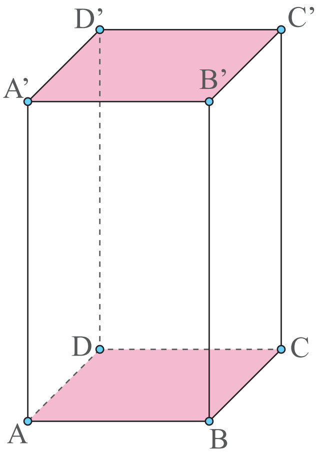
- Posibile desfășurări ale unei prisme:

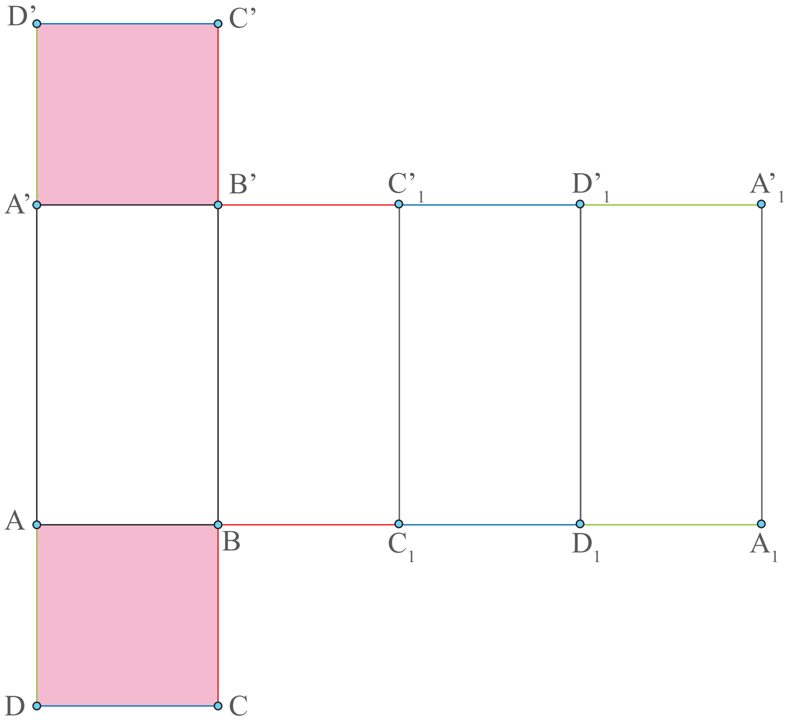
▷ Prisma dreaptă cu baza triunghi echilateral.



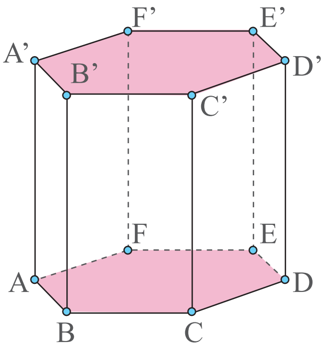


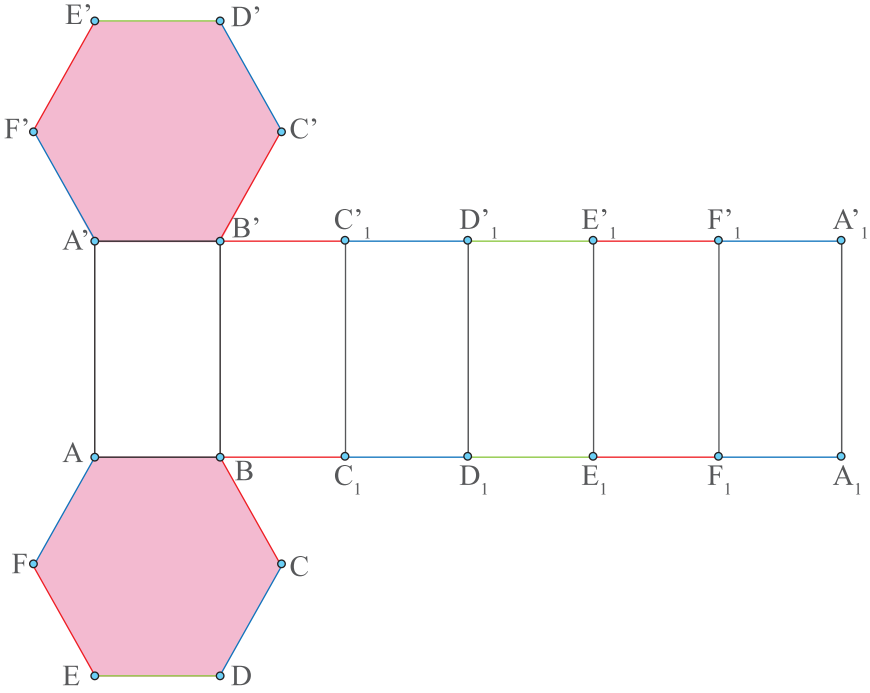
▷ Prisma dreaptă cu baza pătrat.



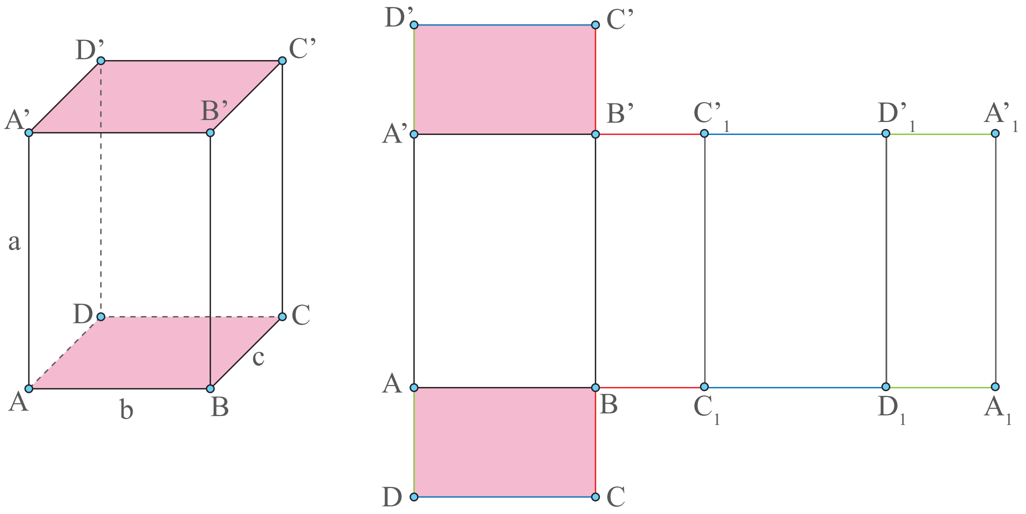


▷ Prisma dreaptă cu baza hexagon regulat.



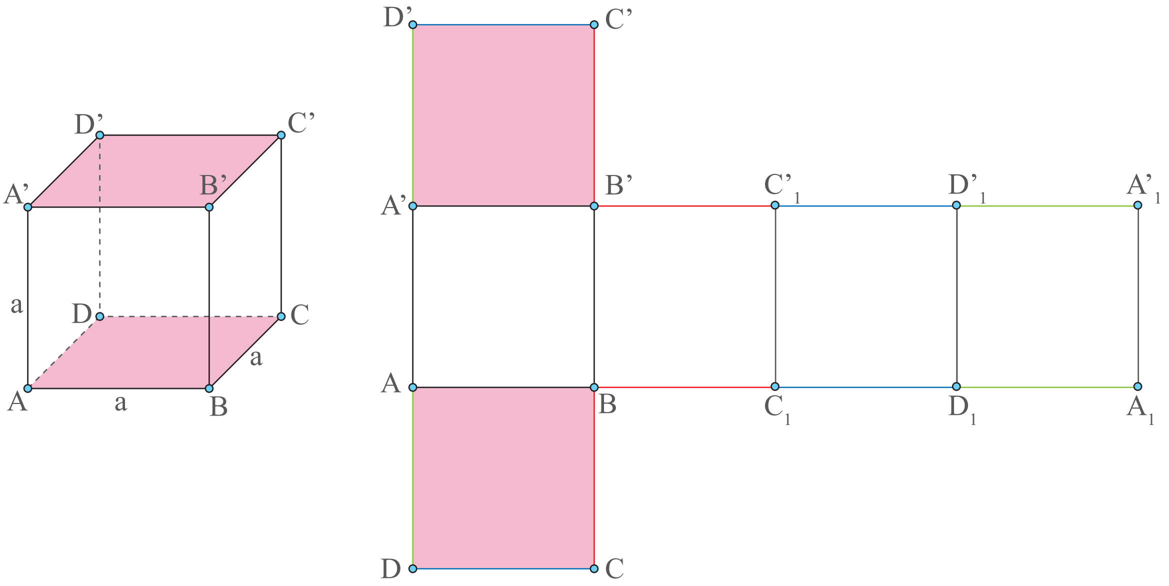


- **Paralelipipedul dreptunghic** este o prismă dreaptă în care bazele sunt dreptunghiuri. La un paralelipiped dreptunghic oricare două fețe opuse pot fi considerate baze.



- La paralelipipedul dreptunghic muchiile sunt patru câte patru congruente:
$AB \equiv CD \equiv C'D' \equiv A'B'$;
$BC \equiv AD \equiv A'D' \equiv B'C'$;
$AA' \equiv BB' \equiv CC' \equiv DD'$.
Din acest motiv spunem paralelipipedul dreptunghic cu dimensiunile a, b, c.

- **Cubul** este un paralelipiped dreptunghic în care toate fețele sunt pătrate.

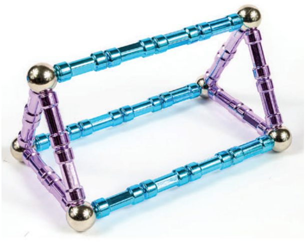


- Cubul are toate muchiile congruente. Din acest motiv spunem cubul de muchie a.

Exersează!

2. Precizează ce corpuri geometrice observi în fiecare dintre imaginile următoare:


Creioane


Magneți


Containere


Zaruri

3. În *Figura 10*, este reprezentată desfășurarea unui paralelipiped dreptunghic, unde pe mai multe laturi este construit câte un trapez.

a) Realizează pe o bucată de carton imaginea din *Figura 10*, decupeaz-o și construiește paralelipipedul dreptunghic. Vei observa astfel că trapezul reprezintă o zonă pe care o poți acoperi cu lipici, astfel încât corpul geometric construit să nu se „dezintegreze” imediat după formare.

b) Realizează, pe o bucată de carton imagini asemănătoare cu cele de la punctul anterior pentru prisma dreaptă cu baza triunghi și pentru cub.

c) Decupează imaginile obținute la punctul anterior și construiește prisma dreaptă cu baza triunghi și cubul.

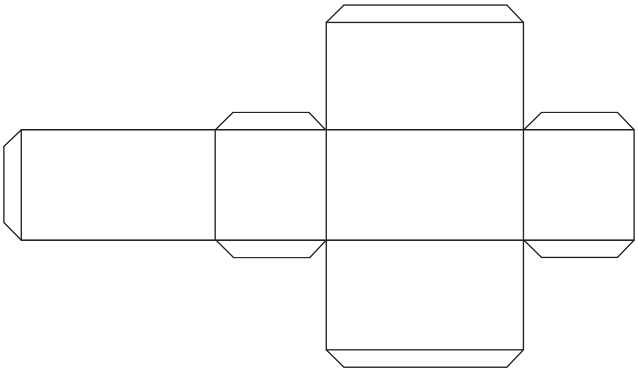


Figura 10

4. În *Figura 11* este reprezentată o prismă dreaptă cu baza triunghi.

a) Enumeră vârfurile, muchiile și fețele prismei.

b) Determină următoarele intersecții:

i) $(BCN) \cap (ACM)$; ii) $(ABN) \cap (CNP)$;
iii) $(CMP) \cap (ANB)$; iv) $(ANB) \cap (MNP)$.

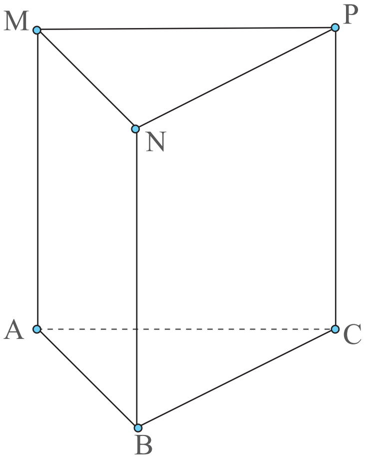


Figura 11

5. În *Figura 12*, este reprezentat un cub Rubik. Un cub Rubik are proprietatea că oricum am alege două fețe distincte, acestea au culori diferite (alb, roșu, galben, verde, albastru, portocaliu). Mai mult, acest cub poate fi interpretat ca alipirea a 27 de cuburi mai mici (3x3x3), pe care le vom denumi cubulețe. Determină câte dintre cubulețele cubului Rubik au:

a) 0 fețe colorate, în culori din enunțul problemei;
b) 1 față colorată, în culori din enunțul problemei;
c) 2 fețe colorate, în culori din enunțul problemei;
d) 3 fețe colorate, în culori din enunțul problemei;
e) 4 fețe colorate, în culori din enunțul problemei.

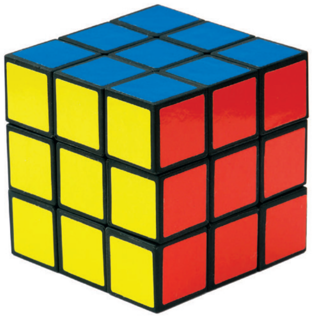


Figura 12

6. Există cuburi Rubik de forma $2 \times 2 \times 2$, care au numai patru culori: alb, albastru, roșu și galben. Determină câte dintre cubulețele unui astfel de cub Rubik au:

a) 0 fețe colorate, în culori din enunțul problemei;
b) 1 față colorată, în culori din enunțul problemei;
c) 2 fețe colorate, în culori din enunțul problemei;
d) 3 fețe colorate, în culori din enunțul problemei;
e) 4 fețe colorate, în culori din enunțul problemei.

7. Se consideră o prismă dreaptă cu baza triunghi.

a) Realizează un desen corespunzător.
b) Enumeră fețele, muchiile și vârfurile corpului desenat.
c) Notează cu f numărul total de fețe al corpului, cu m numărul total de muchii și cu v numărul total de vârfuri și verifică dacă este adevărată relația $v - m + f = 2$.

8. Se consideră o prismă dreaptă cu baza patrulater.

a) Realizează un desen corespunzător.
b) Enumeră fețele, muchiile și vârfurile corpului desenat.
c) Notează cu f numărul total de fețe al corpului, cu m numărul total de muchii și cu v numărul total de vârfuri și verifică dacă este adevărată relația $v - m + f = 2$.

9. Se consideră o prismă dreaptă cu baza hexagon.

a) Realizează un desen corespunzător.
b) Enumeră fețele, muchiile și vârfurile corpului desenat.
c) Notează cu f numărul total de fețe al corpului, cu m numărul total de muchii și cu v numărul total de vârfuri și verifică dacă este adevărată relația $v - m + f = 2$.

10. Se consideră un paralelipiped dreptunghic.

a) Realizează un desen corespunzător.
b) Enumeră fețele, muchiile și vârfurile corpului desenat.
c) Notează cu f numărul total de fețe al corpului, cu m numărul total de muchii și cu v numărul total de vârfuri și verifică dacă este adevărată relația $v - m + f = 2$.

11. Se consideră un cub.

a) Realizează un desen corespunzător.
b) Enumeră fețele, muchiile și vârfurile corpului desenat.
c) Notează cu f numărul total de fețe al corpului, cu m numărul total de muchii și cu v numărul total de vârfuri și verifică dacă este adevărată relația $v - m + f = 2$.

12. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Dacă $AB = 10$ cm, $BC = 15$ cm și $CC' = 20$ cm, calculează suma lungimilor tuturor muchiilor.

13. Dacă suma lungimilor tuturor muchiilor unui cub este egală cu 64 m, calculează lungimea unei muchii a cubului.

14. În *Figura 13* este schița unui bloc având forma unui paralelipiped dreptunghic. Trebuie construită o scară exterioară care să pornească din punctul A și să ajungă în punctul A', urmând traseul din schiță. Se știe că dimensiunile blocului sunt $AA' = 30$ m, $AB = 12$ m și $BC = 24$ m.

a) Determină lungimea minimă a scării.
b) Determină lungimile segmentelor DE, CF și BG pentru care lungimea scării este minimă.

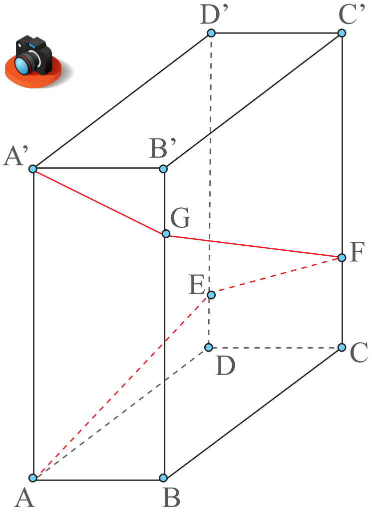


Figura 13

4. Corpuri geometrice: cilindru circular drept; con circular drept; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări

Amintește-ți!


A


B


C


D


E

1	2
Cilindru circular	Con circular

1. Asociază, dacă este posibil, obiectele din primul rând cu denumirea corespunzătoare din tabel, după model.

Model: (A,2).

Important

- **Cilindrul circular drept** este un corp geometric.

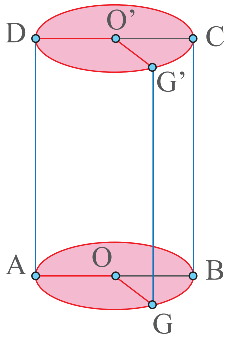
- **Elementele unui cilindru circular drept:**

▷ **Bazele cilindrului.** Sunt două cercuri de raze egale.

▷ **Raza bazei.** Este lungimea razei unei baze a cilindrului. De exemplu, OA sau $O'G'$.

▷ **Suprafața cilindrică.** Un cilindru nu are fețe laterale. Are o singură față numită suprafață cilindrică.

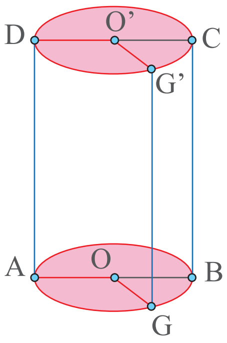
▷ **Generatoarea cilindrului.** Este un segment care aparține suprafeței cilindrice și unește două puncte situate pe cele două baze astfel încât distanța dintre ele să fie minimă. De exemplu, GG' sau AD.

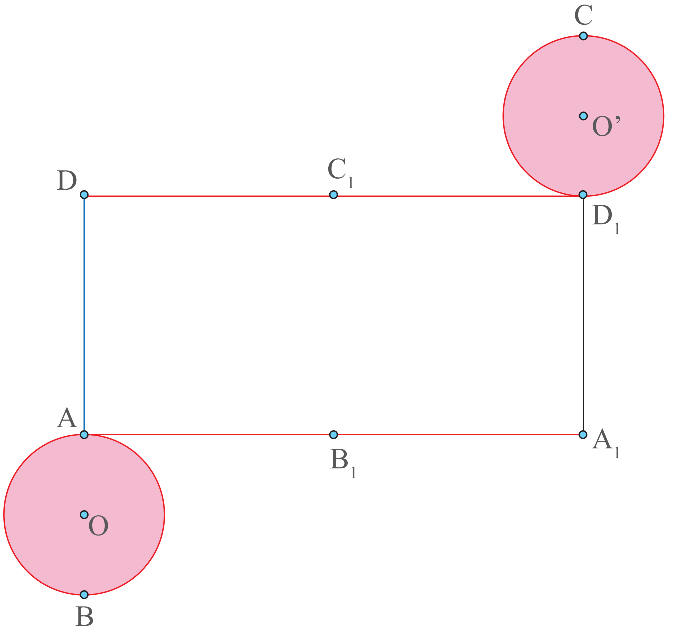


- Toate generatoarele unui cilindru circular drept sunt congruente.

- **A desfășura un cilindru circular drept** înseamnă a reprezenta în același plan bazele și suprafața cilindrică astfel încât dacă decupăm, prin pliere, să obținem cilindrul inițial.

▷ Posibilă desfășurare a unui cilindru circular drept:





- **Conul circular drept** este un corp geometric.

- **Elementele unui con circular drept:**

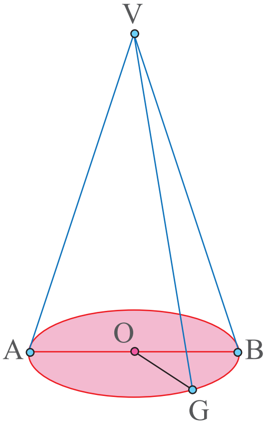
▷ **Baza conului.** Este un cerc.

▷ **Vârful conului.** Este un punct nesituat în planul în care se află baza conului și formează cu orice coardă a bazei un triunghi isoscel (V).

▷ **Raza bazei.** Este lungimea razei bazei conului. De exemplu, OA sau OG.

▷ **Suprafața conică.** Un con nu are fețe laterale. Are o singură față numită suprafață conică.

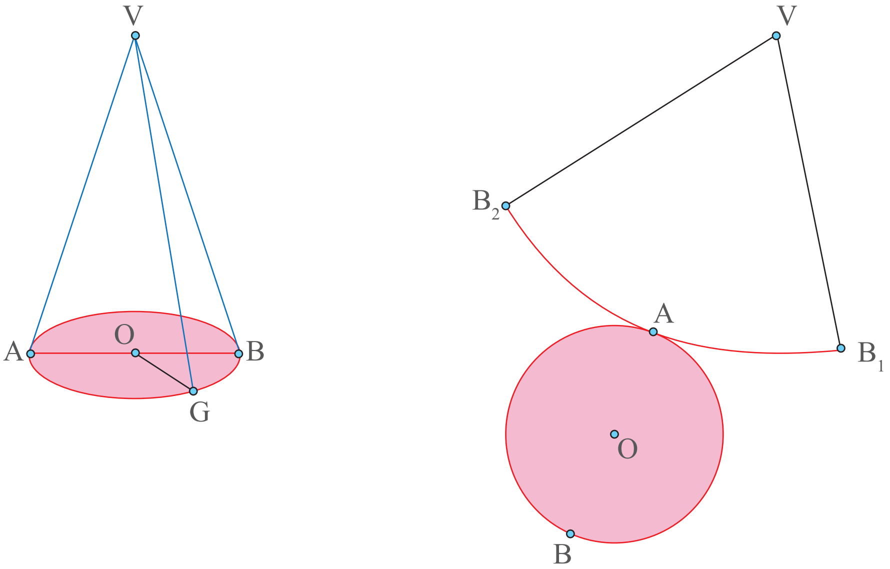
▷ **Generatoarea conului.** Este un segment care unește vârful conului cu un punct situat pe baza conului. De exemplu, VA sau VG.



- Toate generatoarele unui con circular drept sunt congruente.

- **A desfășura un con circular drept** înseamnă a reprezenta în același plan baza și suprafața conică astfel încât după decupare, prin pliere, să obținem conul inițial.

▷ Posibilă desfășurare a unui con circular drept:



Exersează!

2. Precizează ce corpuri geometrice observi în fiecare dintre imaginile următoare:


Pălărie orientală


Trunchiuri de copaci


Far

3. În *Figura 14*, este reprezentată desfășurarea unui cilindru circular drept unde pe o latură este construit un trapez, iar pe cercuri sunt construite alte forme geometrice asemănătoare unui trapez.

Realizează pe o bucată de carton imaginea din *Figura 14*, decupeaz-o și construiește cilindrul circular drept.

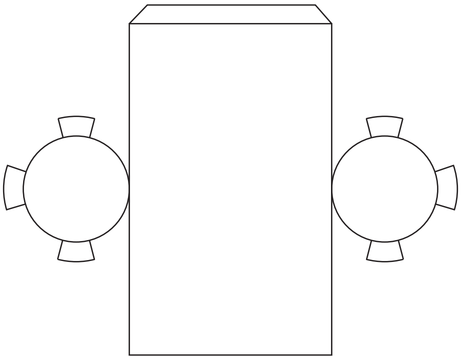


Figura 14

4. Realizează o imagine asemănătoare pentru un con circular drept și construiește apoi conul.

5. a) Desenează un cilindru circular drept.

b) Construiește punctele distincte A, B, C și D pe una dintre bazele cilindrului astfel încât punctele A și C, respectiv B și D să fie puncte diametral opuse.

c) Construiește apoi punctele distincte A', B', C' și D' pe cealaltă bază a cilindrului astfel încât AA', BB', CC' și DD' să fie generatoare ale cilindrului.

d) Stabilește dacă următoarele relații sunt adevărate sau false:

i) $AA' = BB'$; ii) $A'C' = AC$; iii) $AC = BD$.

e) Determină $(ABB') \cap (A'C'D')$.

f) Notează cu O centrul bazei pe care se află punctele A, B, C și D și cu O' centrul bazei pe care se află punctele A', B', C' și D'. Determină $(AA'O') \cap (BOB')$.

6. În *Figura 15* este reprezentată desfășurarea unui cilindru circular drept.

a) Dacă lungimea cercului de la baza cilindrului este 14π cm, ce lungime are segmentul AA_1?

b) Știind că aria dreptunghiului AA_1D_1D este egală cu 70π cm^2, determină lungimea generatoarei cilindrului.

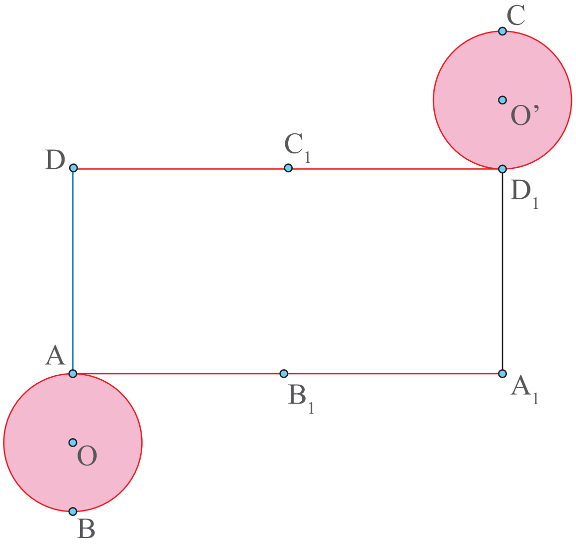


Figura 15

7. a) Desenează un con circular drept și notează vârful conului cu V și centrul bazei cu O.

b) Construiește punctele distincte A, B, C și D pe baza conului astfel încât punctele A și C, respectiv B și D să fie puncte diametral opuse.

c) Stabilește dacă următoarele relații sunt adevărate sau false:

i) $AO = CO$; ii) $VA = VB$; iii) $AC = BD$.

d) Determină $(VAC) \cap (ABC)$.

e) Determină $(VOA) \cap (VOB)$.

8. În *Figura 16* alăturată este reprezentată desfășurarea unui con circular drept, în care lungimea arcului de cerc B_1B_2 este egală cu 12π cm.

a) Ce lungime are cercul de la baza conului?

b) Determină raza conului.

c) Dacă generatoarea conului are lungimea egală cu 36 cm, determină măsura unghiului B_1VB_2.

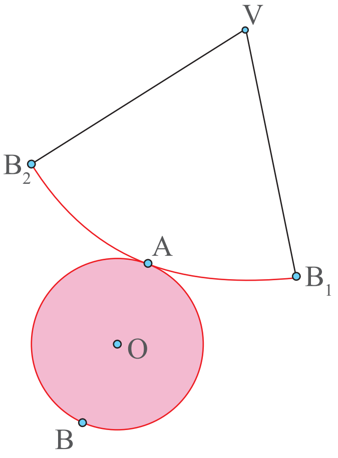


Figura 16

9. În *Figura 17* este reprezentat schematic, un turn dintr-un castel medieval în care $ABCD$ este un cilindru circular drept și VCD este un con circular drept. Pentru a fi inclus în lista obiectivelor turistice, trebuie instalată o scară exterioară, scară ce va fi utilizată în caz de incendiu. Ioana este arhitect și se ocupă de construcția acestei scări. Dimensiunile turnului sunt următoarele: raza cilindrului este de 30 de metri, iar generatoarea cilindrului de 80 de metri. Se va considera valoarea lui π egală cu 3.

a) În primă fază, Ioana realizează scara de incendiu precum linia albastră din *Figura 17* și reprezintă cel mai scurt drum din punctul A în punctul D, parcurgând suprafața cilindrului. Determină lungimea scării în acest caz.

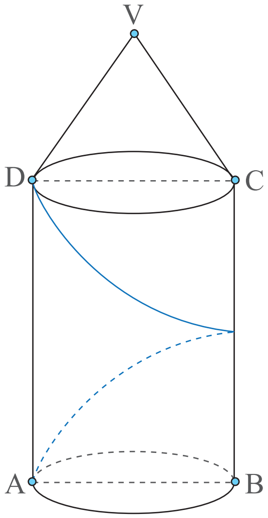


Figura 17

b) Proiectul Ioanei de la punctul a) nu a fost aprobat, deoarece acea scară nu trece prin punctul M, mijlocul segmentului AD, unde se află o fereastră ce ar putea fi transformată în ușă de incendiu. Ioana se adaptează și realizează proiectul precum în *Figura 18*, unde scara este reprezentată de linia verde. Aici, scara a fost construită ca fiind cel mai scurt drum din punctul A în punctul M și apoi din punctul M în punctul D, scara fiind construită pe suprafața cilindrului. Determină lungimea scării în acest caz.

c) În ambele cazuri se evită construcția unei scări pe generatoarea AD. Justifică de ce o astfel de scară nu ar fi potrivită, din punct de vedere practic.

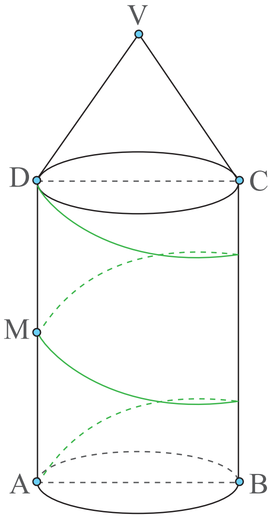


Figura 18

5. Recapitulare

1. Asociază fiecare noțiune de geometrie din coloana **A** cu obiectul pe care îl poate reprezenta din coloana **B**:

A	**B**
i) punct	1) Liniile de tren
ii) dreaptă	2) Ecranul unui telefon
iii) plan	3) Atomul
	4) Un dulap

2. Completează spațiile punctate astfel încât următoarele afirmații să fie adevărate.

a) Un plan este determinat de .... puncte necoliniare.

b) Două puncte distincte determină o .... .

c) O dreaptă și un punct exterior ei determină un .... .

d) Dacă două plane distincte au în comun un punct, atunci ele au în comun o .... .

e) .... nu are dimensiune, are doar poziție.

f) .... are trei dimensiuni.

3. Desenează un paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$ și construiește diagonalele sale.

4. Desenează conul circular drept VMN și construiește generatoarea VA.

5. Desenează o prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral.

6. Se consideră planul α și dreptele d_1 și d_2, ca în *Figura 19*, unde știm că $d_1 \subset \alpha$; $d_1 \parallel d_2$; $A \in d_2$ și $A \in \alpha$.

Justifică de ce $d_2 \subset \alpha$.

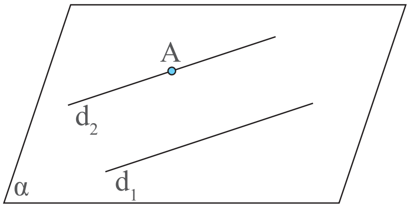


Figura 19

7. Se consideră patru puncte M, N, P și Q, oricare trei necoliniare, astfel încât $MN \parallel PQ$.

a) Justifică de ce punctele M, N, P și Q sunt coplanare.

b) Arată că $MQ \subset (MNP)$.

c) Demonstrează că $MP \subset (MNQ)$.

d) Dacă R este intersecția dreptelor MQ și NP, demonstrează că $R \in (MNP)$.

8. Se consideră M, N, P și Q patru puncte distincte astfel încât $MP \cap NQ = \{A\}$.

a) Justifică de ce punctele M, N, P și Q sunt coplanare.

b) Arată că $MQ \subset (MNP)$.

c) Demonstrează că $MP \subset (MNQ)$.

d) Dacă R este intersecția dreptelor MQ și NP, demonstrează că $R \in (MNP)$.

9. Se consideră α și β două plane, ca în *Figura 20*, astfel încât $\alpha \cap \beta = d$. Se știe că $e \subset \alpha$, $d \cap e = \{A\}$ și $f \subset \beta$, $d \cap f = \{B\}$.

a) Stabilește dacă $A \in \beta$.

b) Stabilește dacă $B \in \alpha$.

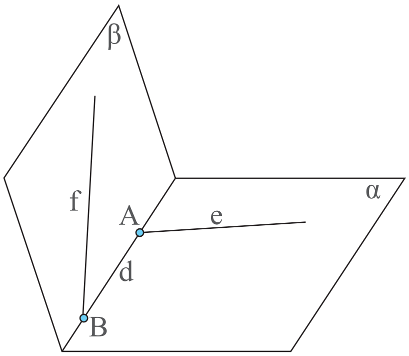


Figura 20

10. În *Figura 21* este reprezentată piramida regulată cu baza pătrat $VABCD$, unde O este centrul bazei.

Determină următoarele intersecții de plane:

i) $(VAB) \cap (ABC)$; ii) $(VBC) \cap (ABD)$;
iii) $(VOA) \cap (ABC)$; iv) $(VOB) \cap (VOC)$;
v) $(VOA) \cap (VOC)$; vi) $(VOA) \cap (VBC)$;
vii) $(VOC) \cap (VBC)$; viii) $(VOB) \cap (VCD)$.

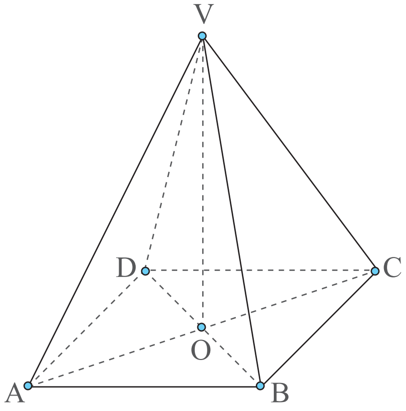


Figura 21

11. Se consideră tetraedrul $VABC$.

a) Desenează tetraedrul $VABC$.

b) Stabilește care dintre următoarele enunțuri sunt adevărate și care sunt false:

i) $V \in (ABC)$; ii) $VC \subset (VAB)$; iii) $VB \subset (ABC)$.

c) Determină $(VAB) \cap (ABC)$ și $(VAB) \cap (VBC)$.

12. O prismă dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ cu baza hexagon regulat are fețele laterale pătrate. Dacă suma lungimilor muchiilor laterale este egală cu 36 cm, determină aria bazei $ABCDEF$.

13. Suma lungimilor tuturor muchiilor unei piramide regulate cu baza hexagon regulat este egală cu 48 cm. Dacă muchia laterală are lungimea de 5 cm, determină:

a) lungimea muchiei bazei;

b) perimetrul bazei;

c) aria unei fețe laterale.

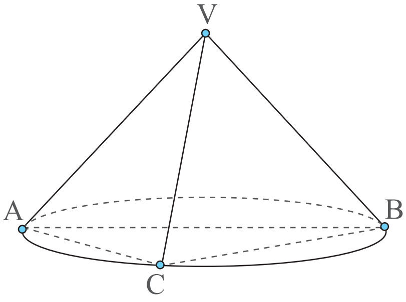


Figura 22

14. În conul circular drept din *Figura 22*, AB este diametru, iar triunghiul VAB este dreptunghic. Generatoarea conului este de $4\sqrt{2}$ cm.

a) Determină lungimea cercului de la baza conului.

b) Determină aria bazei conului.

c) Dacă C este un punct pe baza conului astfel încât $\sphericalangle ABC = 30^\circ$, determină distanța de la punctul V la dreapta AC.

15. În *Figura 23* este schița unei cutii în formă de prismă dreaptă cu baza pătrat. Pe cutie s-a desenat cu markerul o linie roșie, ca în figură. Punctele M și N sunt fixate și reprezintă mijloacele muchiilor CC' și DD'. Latura bazei $AB = 6$ cm, iar muchia laterală $AA' = 10$ cm. Care este lungimea minimă a liniei roșii?

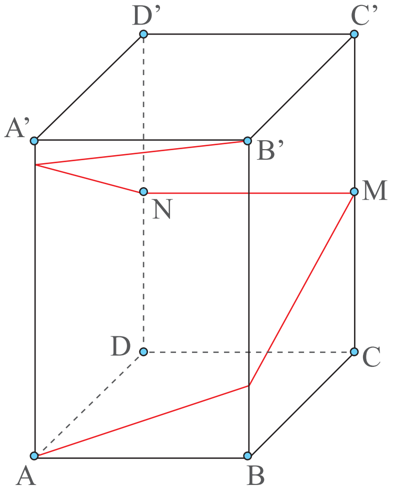


Figura 23

16. În *Figura 24* este reprezentat schematic un rezervor în formă de cilindru circular drept cu raza bazei de 3 m și generatoarea de 4 m. Punctele A și B, respectiv C și D sunt diametral opuse, iar AD și BC sunt generatoare. Se va considera valoarea lui π egală cu 3.

Pentru a ajunge pe acoperiș se merge din punctul A până în punctul E pe o scară lipită de suprafața cilindrică, iar din punctul E până în punctul C pe o scară ce urmează generatoarea cilindrului.

Ce lungime are drumul din punctul A până în punctul C?

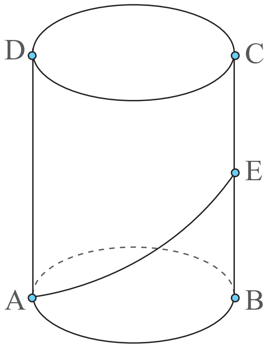


Figura 24

17. Un elicopter al echipei de salvamont trebuie să ajungă din punctul B în punctul F pe drumul cel mai scurt. Elicopterul poate ocoli muntele din imagine doar în plan orizontal (trecând prin oricare dintre punctele $A-B-C-D-E-F$) sau în plan vertical (trecând prin V). Elicopterul nu poate trece prin interiorul piramidei. În zona versanților aflați pe fețele VAB și VAF sunt înregistrate valori foarte mari ale vitezelor curenților de aer și elicopterul trebuie să evite acele zone.

Dacă elicopterul își schimbă altitudinea, atunci zboară cu 10 m/s. Dacă își păstrează altitudinea, zboară cu 25 m/s.

Dacă $VABCDEF$ reprezintă o piramidă regulată cu baza hexagon regulat, cu $AB = 200$ m și $VA = 250$ m, determină care este cea mai rapidă rută de a ajunge din B în F, știind că elicopterul va zbura numai pe muchiile piramidei.

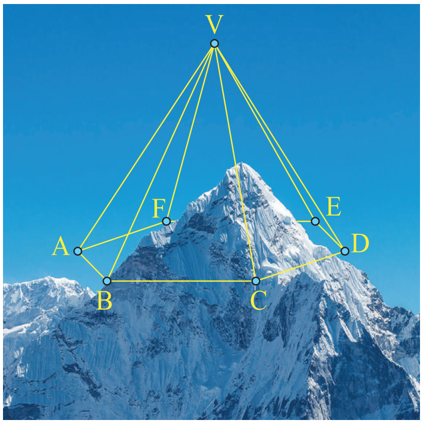


Figura 25

AUTOEVALUARE – În această unitate de învățare:

🟩 Am înțeles foarte bine ....

🟨 Îmi este neclar ....

🟥 Nu știu să .... / Nu am înțeles ....

Revezi lecțiile și exercițiile noțiunilor notate la culoarea galbenă. Discută cu un coleg/ o colegă sau cu profesorul despre ceea ce nu ai înțeles și ai completat la culoarea roșie.

6. Evaluare

Timp de lucru: 45 de minute
Din oficiu 10p

1. Precizează ce corpuri geometrice identifici în fiecare dintre imaginile următoare: *20p*

a)

b)

c)

d)

e)

2. Completează spațiile punctate astfel încât să obții afirmații adevărate:

a) O muchie a unui tetraedru regulat are lungimea egală cu 7 cm. Suma lungimilor tuturor muchiilor tetraedrului este egală cu *5p*

b) Un cub este paralelipipedul dreptunghic în care toate fețele sunt *5p*

3. a) Desenează o prismă dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu baza pătrat. *5p*

b) Construiește, pe desenul tău, diagonalele acestei prisme. *5p*

4. O prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghi echilateral are fețele laterale pătrate. Dacă muchia laterală are lungimea de 6 cm, determină aria uneia dintre baze. *10p*

5. Într-un con circular drept în care AB este diametrul bazei, triunghiul VAB este echilateral. Generatoarea conului are lunungimea de 6 cm.

a) Determină lungimea cercului de la baza conului. *10p*

b) Determină aria bazei conului. *10p*

6. Un cilindru circular drept are generatoarea egală cu 10 cm și raza bazei egală cu 45 cm. Determină perimetrul desfășurării pe un plan a suprafeței cilindrice. *10p*

7. În *Figura 26* este reprezentat schematic un acoperiș în formă de prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral, în care $AB = 12$ m și $BD = 10$ m. O pisică merge pe acoperiș, din punctul B până în punctul E.

Ce lungime are traseul parcurs de pisică, știind că este cel mai scurt traseu posibil? *10p*

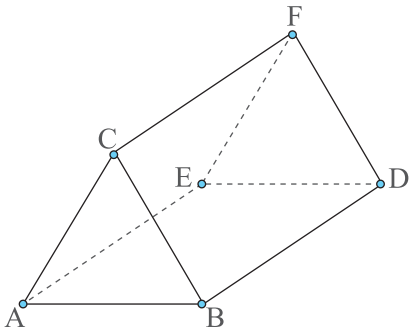


Figura 26

7. Exersezi și progresezi

1. În *Figura 27*, avem dreapta e inclusă în planul α, dreapta d intersectează planul α în punctul O, punctele diferite, O și B, aparțin dreptei e, punctul C aparține planului α, dar nu aparține dreptei e și punctul A aparține dreptei d, dar nu aparține dreptei e.

a) Stabilește care dintre următoarele afirmații sunt adevărate și care sunt false:

i) $C \notin d$; ii) $BC \subset \alpha$; iii) $(d,e) = \alpha$; iv) $(AC,B) = (d,B)$;
v) $(OC,A) = (d,C)$; vi) $(e,A) = (d,B)$.

b) Determină:

i) $(AOB) \cap \alpha$; ii) $(AOC) \cap \alpha$; iii) $(BOC) \cap \alpha$;
iv) $AC \cap \alpha$; v) $BC \cap e$; vi) $(AOB) \cap (AOC)$; vii) $(d,B) \cap \alpha$.

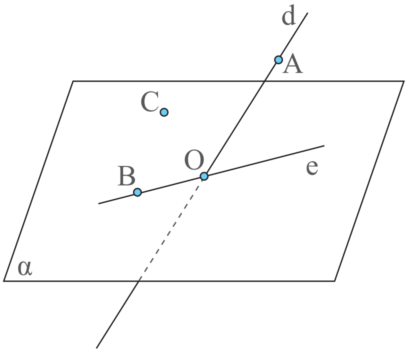


Figura 27

2. a) Desenează un plan α.

b) Desenează două puncte distincte A și B cu proprietatea că $A, B \in \alpha$.

c) Construiește un plan β, diferit de α, astfel încât $\alpha \cap \beta = AB$.

d) Desenează două puncte distincte M și N care se află în planul α, dar nu se află în planul β.

e) Desenează două puncte distincte P și Q care se află în planul β, dar nu și în planul α astfel încât $MP \parallel NQ$.

f) Determină $(MNP) \cap \alpha$ și $(MNP) \cap \beta$.

g) Dacă $MN \cap PQ = \{R\}$, stabilește dacă punctele A, B și R sunt coliniare.

3. Piramida regulată $VABC$ are baza triunghi echilateral cu aria egală cu $4\sqrt{3}$ cm^2. Determină muchia laterală a piramidei, știind că $\sphericalangle AVB = 90°$.

4. Un producător de antene pentru emisie de unde radio sau de televiziune folosește modelul din *Figura 28* pentru a construi antenele, model denumit *unitate de structură*. Fiecare segment, care apare pe model, în realitate este o bară metalică numită grindă. Pentru a realiza o antenă, producătorul construiește o unitate de structură, după care consideră baza superioară a prismei drepte ca fiind baza inferioară a următoarei unități de structură și continuă procedeul până când atinge înălțimea dorită. Una dintre cerințele clienților producătorului este să vopsească în mod diferit fiecare tip de grindă utilizat în construcția antenei. O altă cerință este ca toate antenele produse să aibă înălțimea de 100 de metri. Se știe că lungimea unei grinzi albastre este de 2 metri, iar a unei grinzi verzi este de 1,5 m.

a) Calculează lungimea unei grinzi roșii.

b) Câte grinzi de fiecare culoare s-au folosit pentru a construi antena?

c) Ce lungime au în total toate grinzile folosite pentru a construi antena?

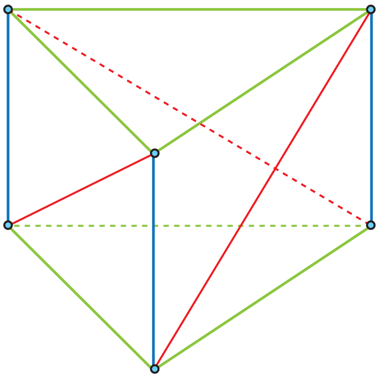
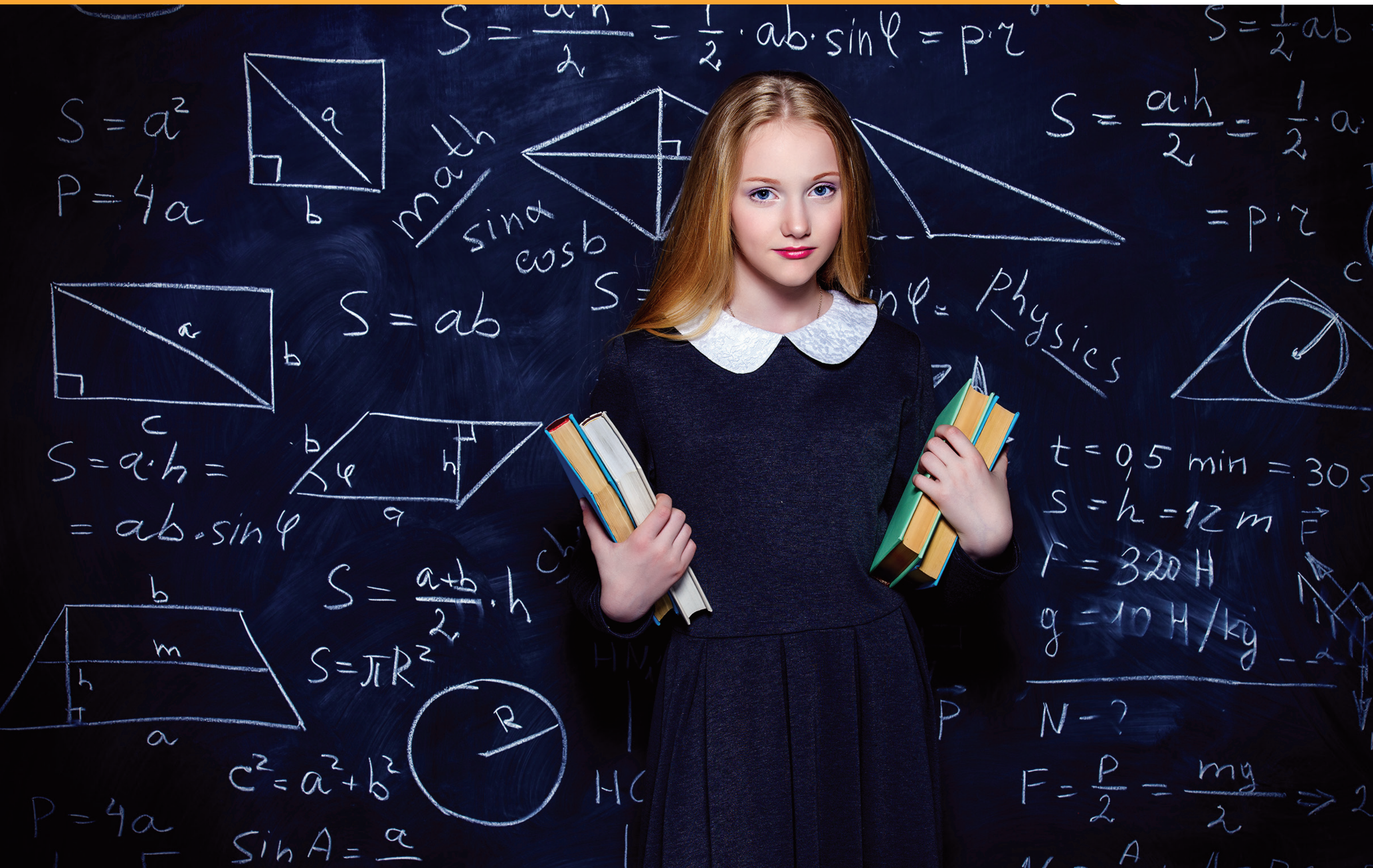


Figura 28

Elemente ale geometriei în spațiu. Paralelism

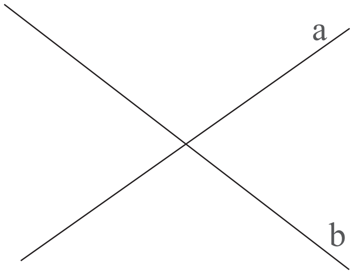


1. Paralelism: drepte paralele; unghiul a două drepte

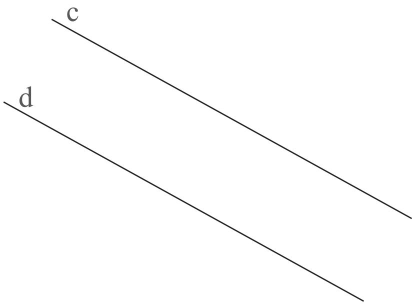
Amintește-ți!

1. Analizează, cu atenție, imaginile din stânga și apoi figurile din dreapta și răspunde la întrebările de mai jos.

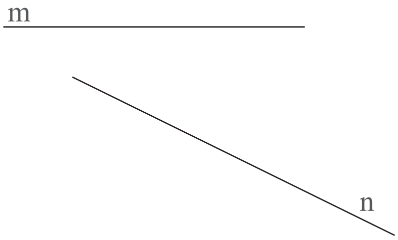
În figura din partea dreaptă este reprezentată schița celor două străzi din imaginea din partea stângă.



În figura din partea dreaptă este reprezentată schița celor două șine de cale ferată din imaginea din partea stângă.



În figura din partea dreaptă este reprezentată schița șoselei și a pasarelei din imaginea din partea stângă.



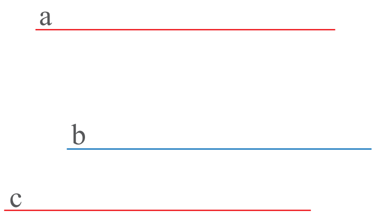
a) Dreptele *a* și *b* au puncte comune?
b) Sunt dreptele *a* și *b* în același plan? Justifică răspunsul.
c) Dreptele *c* și *d* au puncte comune?
d) Sunt dreptele *c* și *d* în același plan? Justifică răspunsul.
e) Dreptele *m* și *n* au puncte comune?
f) Sunt dreptele *m* și *n* în același plan? Justifică răspunsul.

Important

- În spațiu, două drepte pot fi:
  - ▷ **concurente:** sunt două drepte, coplanare care au exact un punct comun;
  - ▷ **paralele:** sunt două drepte, coplanare care nu au niciun punct comun;
  - ▷ **necoplanare:** sunt drepte care nu au niciun punct comun și nu sunt situate în același plan.

- În spațiu, două drepte paralele cu a treia dreaptă sunt paralele între ele.

$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ b \parallel c \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel c$$



Observă și descoperă!

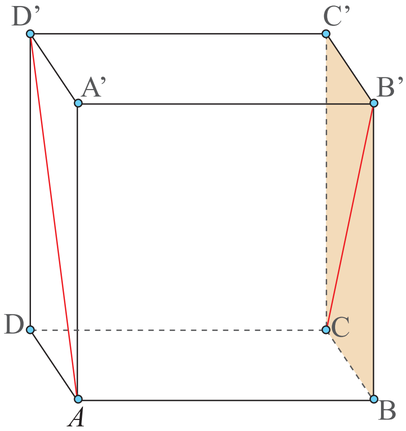


Figura 1

2. În *Figura 1* și *Figura 2* este vorba de același corp reprezentat din perspective diferite.

Privind *Figura 1*, Ana va spune: „Dreptele AD' și $B'C$ sunt drepte necoplanare”.

Privind *Figura 2*, Radu va spune: „Dreptele AD' și $B'C$ sunt drepte concurente”.

a) Care dintre cei doi copii are dreptate?

b) De ce crezi că s-a înșelat unul dintre copii?

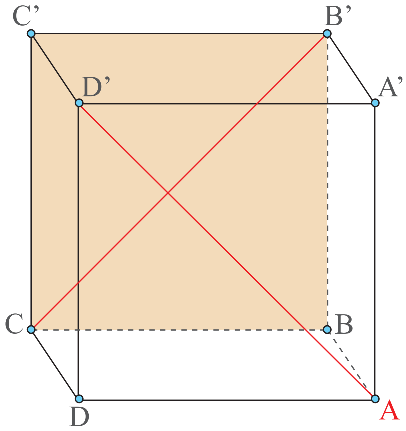


Figura 2

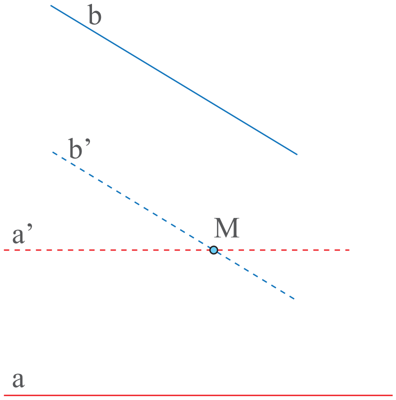
Important

- Dreptele concurente sunt coplanare (situate în același plan) și formează patru unghiuri, două câte două congruente.

- **Măsura unghiului dintre două drepte concurente** este cea mai mică măsură a unghiurilor formate de cele două drepte.

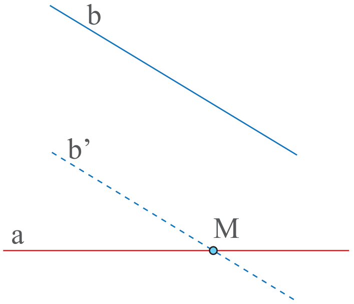
- **Măsura unghiului dintre două drepte paralele este egală cu** $0°$.

- **Măsura unghiului dintre două drepte necoplanare** este măsura unghiului format de paralelele duse printr-un punct oarecare (convenabil ales) la cele două drepte.



$$\left.\begin{array}{l} a' \parallel a \\ b' \parallel b \\ a' \cap b' = \{M\} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle(a,b) = \sphericalangle(a',b')$$

Uneori, punctul M se ia pe una dintre drepte și, prin el, se duce paralela la cealaltă dreaptă (vezi figura din dreapta).



Exersează!

3. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ din *Figura 3*. Scrie în caiet:

a) un exemplu de două drepte paralele;
b) un exemplu de două drepte coplanare;
c) un exemplu de două drepte concurente;
d) un exemplu de două drepte necoplanare.

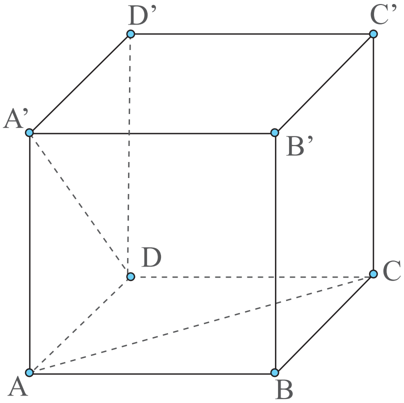


Figura 3

4. Folosind cubul din *Figura 3*, stabilește măsurile următoarelor unghiuri:

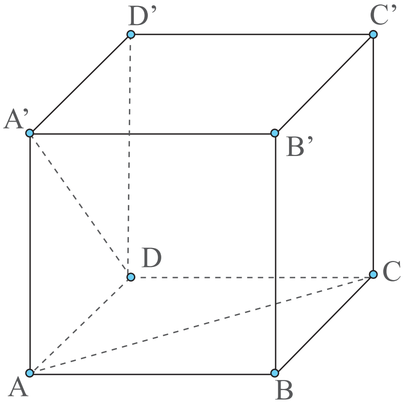
a) unghiul dintre dreptele AA' și AD;
b) unghiul dintre dreptele AA' și BC;
c) unghiul dintre dreptele BB' și CC';
d) unghiul dintre dreptele AB și DD';
e) unghiul dintre dreptele AD și DA';
f) unghiul dintre dreptele CC' și $A'D$;
g) unghiul dintre dreptele $B'C'$ și AC.

5. Problemă rezolvată: Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Determină măsura unghiului dintre dreptele $A'D$ și AC.

Soluție:

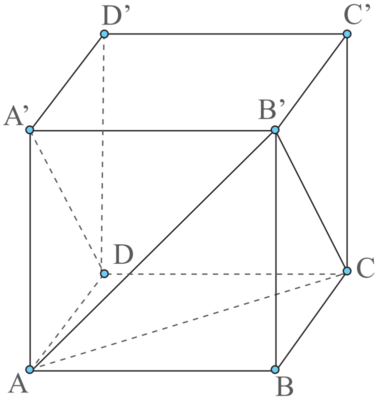
Cum gândesc: Pas 1. Realizez un desen corespunzător enunțului.

Cum scriu:



Pas 2. Trebuie ca, printr-un punct al uneia dintre drepte să construiesc o paralelă la cealaltă dreaptă. Voi arăta că dreptele $A'D$ și $B'C$ sunt paralele.

Construim segmentul $B'C$.
Avem $A'B' \parallel D'C' \parallel DC$.
Avem $A'B' = D'C' = DC$.
Cum $A'B' \parallel DC$ și $A'B' = DC$, obținem că $A'B'CD$ este paralelogram și deci $A'D \parallel B'C$.



Pas 3. Pun în evidență unghiul care dă măsura unghiului căutat.

Deoarece $A'D \parallel B'C$ rezultă $\sphericalangle(A'D,AC) = \sphericalangle(B'C,AC)$.

Pas 4. Pentru determinarea măsurii unghiului dintre dreptele $B'C$ și AC folosesc triunghiul $B'CA$. Observ că toate laturile acestui triunghi sunt diagonale ale fețelor cubului, deci triunghiul $B'CA$ este echilateral.

În $\triangle B'CA$ avem $AB' = B'C = AC$ (diagonale ale fețelor cubului) $\Rightarrow \triangle B'CA$ este echilateral, deci $\sphericalangle B'CA = 60°$.

Avem $\sphericalangle(A'D,AC) = \sphericalangle(B'C,AC) = \sphericalangle B'CA$.

În concluzie $\sphericalangle(A'D,AC) = 60°$.

6. Se consideră $ABCA'B'C'$ o prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral, M mijlocul muchiei AB și M' mijlocul muchiei $A'B'$ (*Figura 4*).

a) Demonstrează că $AA' \parallel MM'$.
b) Demonstrează că $CM \parallel C'M'$.
c) Determină măsura unghiului dintre dreptele AB și CC'.
d) Determină măsura unghiului dintre dreptele AB și $B'C'$.

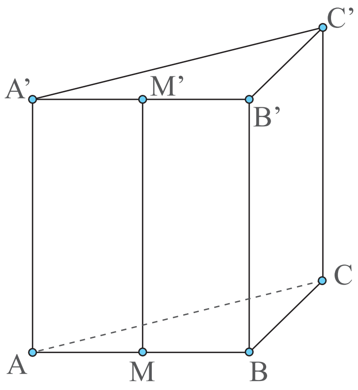


Figura 4

7. Se consideră prisma dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ cu baza hexagon regulat.

a) Realizează un desen corespunzător.
b) Precizează două perechi de drepte paralele.
c) Precizează două perechi de drepte concurente.
d) Precizează două perechi de drepte coplanare.
e) Precizează două perechi de drepte necoplanare.

8. Se consideră prisma dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ cu baza hexagon regulat. Demonstrează că:

a) $AA' \parallel CC'$;
b) $BB' \parallel EE'$;
c) $AB \parallel E'D'$;
d) $BC \parallel E'F'$;
e)$AC \parallel A'C'$;
f) $BE \parallel B'E'$;
g) $AC \parallel D'F'$;
h) $AE \parallel B'D'$.

9. Se consideră prisma dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ cu baza hexagon regulat. Determină măsurile unghiurilor dintre dreptele:

a) AB și BB';
b) BC și EE';
c) AB și $E'F'$;
d) AC și $C'E'$;
e) AD și $B'E'$;
f) AF și $D'F'$.

2. Dreapta paralelă cu planul

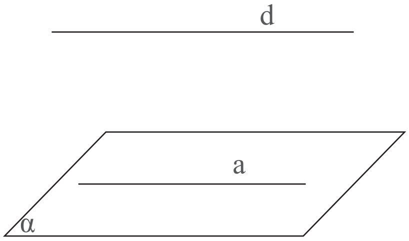
Observă și descoperă!

1. În figura din dreapta sunt reprezentate schițat șoseaua sub forma planului, pasarela sub forma dreptei și umbra pasarelei pe șosea sub forma dreptei a.

a) Cum sunt dreptele d și a?

b) Dacă β este planul determinat de dreptele d și a, care este dreapta de intersecție a planelor α și β?

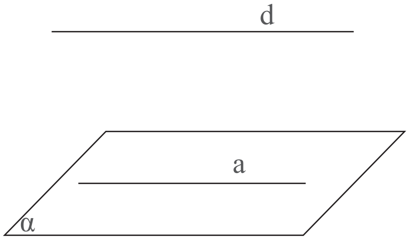
c) Dreapta d și planul α au puncte comune?



Important

- O dreaptă este **paralelă** cu un un plan dacă nu are niciun punct comun cu planul.

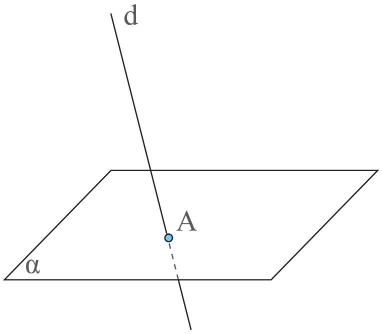
Scriu: $d \parallel \alpha$. Citesc: dreapta d este paralelă cu planul α.



- O dreaptă este **concurentă** cu un plan (înțeapă planul) dacă are exact un punct comun cu planul.

Scriu: $d \cap \alpha = \{A\}$. Citesc: dreapta d intersectează planul (înțeapă planul) α în punctul A.

- Dacă o dreaptă are două puncte comune cu un plan, atunci ea este conținută în plan. (Axioma includerii)

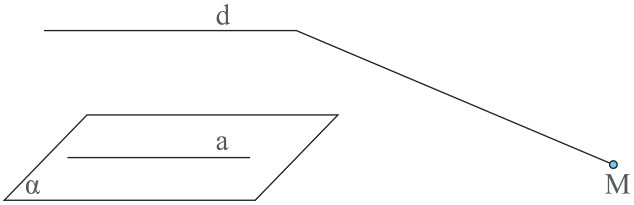


- **Cum dovedesc că o dreaptă este paralelă cu un plan? Dacă o dreaptă este paralelă cu o dreaptă dintr-un plan, atunci ea este paralelă cu planul.**

$$\left.\begin{array}{l} d \parallel a \\ a \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow d \parallel \alpha$$

Justificare: Presupunem că $d \nparallel \alpha$. Atunci d și α au puncte comune. Considerăm M un punct comun.

Pe de altă parte, $d \parallel a$ implică faptul că există un plan $\beta = (d,a)$.



Deoarece $M \in d \cap \alpha$ obținem $M \in d \subset \beta$ și $M \in \alpha$, adică $M \in \alpha \cap \beta$. Cum $\alpha \cap \beta = a$ rezultă $M \in a$.

Dar $M \in d$, deci dreptele a și d sunt concurente. Contradicție cu $d \parallel a$, prin urmare presupunerea făcută ($d \nparallel \alpha$) este falsă. Obținem că $d \parallel \alpha$.

Observație: Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, atunci este paralelă cu o infinitate de drepte din plan, dar nu cu oricare dreaptă din plan.

Exemplu: muchia notată cu a este paralelă cu fiecare dreaptă determinată de codul de bare, dar nu este paralelă cu dreapta de sub textul scris pe cutie.

Exersează!

2. Prezintă două exemple din sala de clasă în care o dreaptă este paralelă cu un plan.

3. a) Pe un cub, alege o muchie și o față laterală astfel încât dreapta pe care se află muchia să fie paralelă cu planul feței. Justifică paralelismul.

b) Mai există vreo față paralelă cu muchia aleasă?

4. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Demonstrează că:

a) $AB \parallel (CDD')$; b) $BB' \parallel (ADD')$; c) $CD' \parallel (ABB')$; d) $AD' \parallel (BCC')$; e) $AC \parallel (A'C'B)$;

f) $AD' \parallel (A'BC')$; g) $BC' \parallel (AD'C)$.

5. Dreptunghiurile $ABCD$ și $ABEF$ sunt situate în plane diferite. Demonstrează că $FD \parallel (BEC)$.

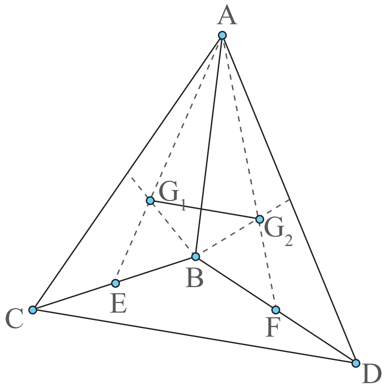
6. Dreptunghiurile $ABCD$ și $ABEF$ sunt situate în plane diferite. Dacă M este punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$ și N este punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului $ABEF$, demonstrează că $MN \parallel (FAD)$.

7. Problemă rezolvată: Triunghiurile ABC și ABD sunt situate în plane diferite. Dacă G_1 și G_2 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, respectiv ABD, demonstrează că: $G_1G_2 \parallel (BCD)$.

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Realizez un desen corespunzător enunțului. Punctele E și F sunt mijloacele laturilor BC, respectiv BD.

Cum scriu:



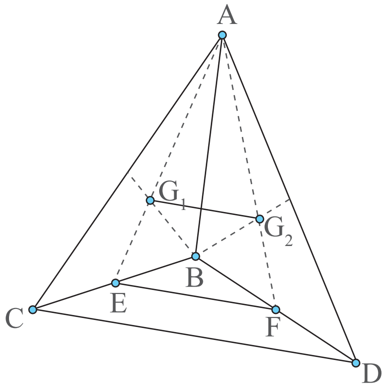
Pas 2. Trebuie identificată o dreaptă în planul (BCD) despre care să demonstrez că este paralelă cu G_1G_2.

Îmi amintesc că, în plan, paralelismul a două drepte se poate demonstra prin:

1. drepte tăiate de o secantă
2. reciproca teoremei lui Thales
3. linia mijlocie în triunghi
4. laturi opuse în paralelogram
5. tranzitivitatea relației de paralelism.

În problema dată, dacă vorbim de centrul de greutate, știu că el se află, pe o mediană, la $\frac{2}{3}$ de vârf și $\frac{1}{3}$ de bază. Acest lucru mă determină să folosesc reciproca teoremei lui Thales în triunghiul AEF.

Din AE este mediană și G_1 este centrul de greutate, rezultă $\frac{AG_1}{AE} = \frac{2}{3}$. Analog obțin $\frac{AG_2}{AF} = \frac{2}{3}$. În triunghiul AEF avem $\frac{AG_1}{AE} = \frac{AG_2}{AF} \left(= \frac{2}{3}\right)$ și, din reciproca teoremei lui Thales, rezultă $G_1G_2 \parallel EF$. Acum $G_1G_2 \parallel EF$ și $EF \subset (BCD)$ implică $G_1G_2 \parallel (BCD)$.



8. Triunghiurile ABC și ABD sunt situate în plane diferite. Dacă G_1 și G_2 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, respectiv ABD, demonstrează că $CD \parallel (BG_1G_2)$.

9. Se consideră piramida regulată $VABC$, punctul E pe muchia VB și punctul F pe muchia CV astfel încât AE este bisectoarea unghiului VAB și AF este bisectoarea unghiului VAC. Demonstrează că $EF \parallel (ABC)$.

Indicație:
Dacă AM este bisectoarea unghiului A, din triunghiul ABC, atunci $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$ (vezi *Figura 5*).

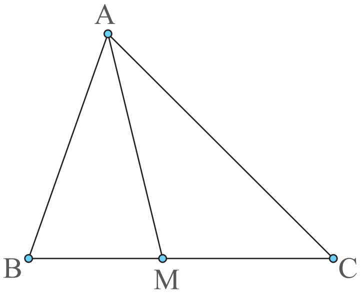


Figura 5

10. Se consideră un plan α, o dreaptă a paralelă cu planul α și un plan β care conține dreapta a, ca în *Figura 6*. Dacă $\alpha \cap \beta = d$, arată că $a \parallel d$.

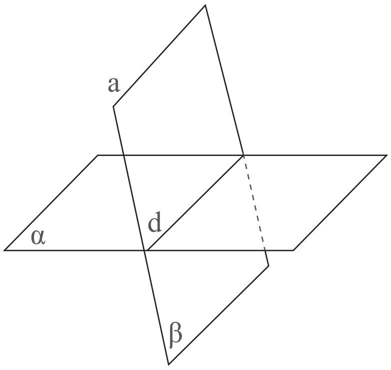
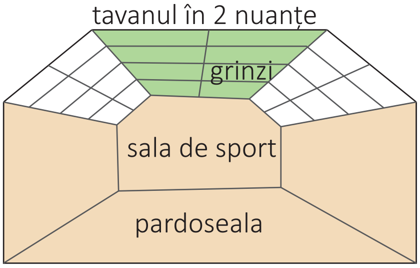
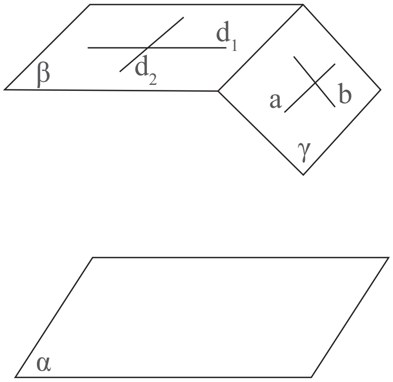


Figura 6

3. Plane paralele

Observă și descoperă!





1. În figura din dreapta sunt reprezentate schițat pardoseala sălii de sport sub forma planului α, porțiunea din tavan de culoare vernil sub forma planului β, o parte laterală a tavanului sub forma planului γ și sub forma dreptelor d_1, d_2, a și b o parte din grinzile din imaginea din stânga.

Privește cu atenție imaginea și figura și stabilește care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate și care sunt false:

a) Planele α și β nu au puncte comune.
b) Planele β și γ nu au puncte comune.
c) Planele α și γ nu au puncte comune.
d) Dreptele d_1 și d_2 sunt concurente.
e) Dreptele d_1 și d_2 sunt paralele cu planul α.
f) Dreapta b este paralelă cu planul α.

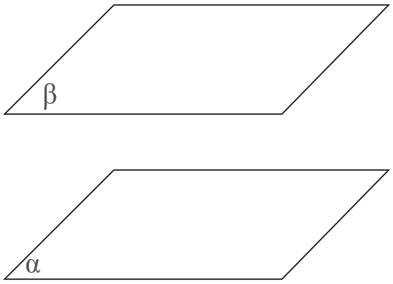
Important

- Două plane sunt **paralele** dacă nu au niciun punct comun.

Scriu: $\alpha \parallel \beta$. Citesc: planul alfa este paralel cu planul beta.

- Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci au comun o dreaptă. Planele sunt concurente.

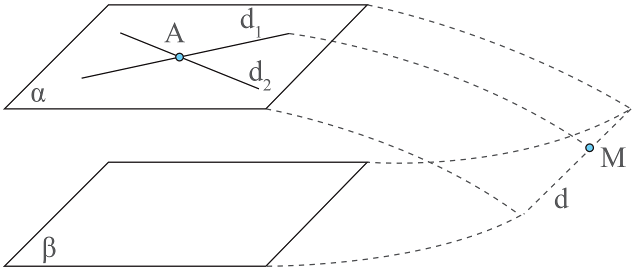
- Cum dovedesc că două plane sunt paralele?



Dacă două drepte concurente dintr-un plan sunt paralele cu alt plan, atunci planul determinat de cele două drepte este paralel cu planul inițial.

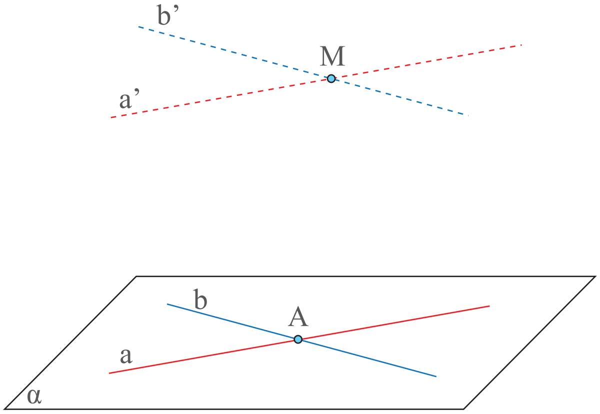
$$\left.\begin{array}{l} d_1 \cap d_2 = \{A\} \\ d_1, d_2 \subset \alpha \\ d_1 \parallel \beta \\ d_2 \parallel \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$

Justificare: Presupunem că planele nu sunt paralele. Atunci există o dreaptă $d = \alpha \cap \beta$. Dreapta d și dreptele d_1 și d_2 sunt din planul α. Deoarece d_1 și d_2 sunt drepte concurente, rezultă că dreapta d se intersectează cu dreapta d_1 sau cu dreapta d_2. (Dacă d nu se intersectează nici cu d_1, nici cu d_2, atunci $d \parallel d_1$ și $d \parallel d_2$, de unde rezultă $d_1 \parallel d_2$. Dar $d_1 \cap d_2 = \{A\}$.) Considerând $\{M\} = d \cap d_1$, atunci $M \in d \subset \beta$ și $M \in d_1$, adică $d_1 \cap \beta \neq \emptyset$. Contradicție cu afirmația din ipoteză care spune că $d_1 \parallel \beta$. Presupunerea făcută este falsă, prin urmare $\alpha \parallel \beta$.



- **Printr-un punct exterior unui plan α se poate construi un singur plan paralel cu planul α.**

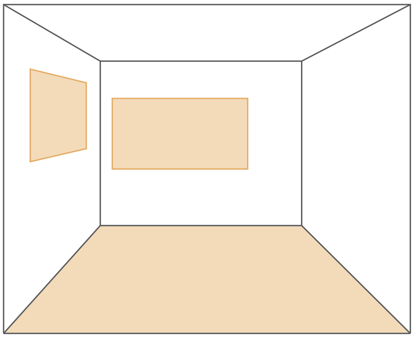
Justificare: Considerăm M punctul exterior planului α și dreptele concurente a și b incluse în planul α. Prin punctul M trece o unică dreaptă paralelă cu dreapta a; $a' \parallel a$ (Axioma paralelelor). Prin punctul M trece o unică dreaptă paralelă cu dreapta b; $b' \parallel b$ (Axioma paralelelor). Dreptele a' și b' sunt drepte concurente, deci există un plan $\beta = (a',b')$. Din $a \parallel a'$, $a' \subset \beta$ și $b \parallel b'$, $b' \subset \beta$ deducem că $\beta \parallel \alpha$ și unicitatea construcțiilor a' și b' implică unicitatea planului β.



- **Două plane α și β, care sunt paralele cu al treilea plan γ, sunt paralele între ele.**

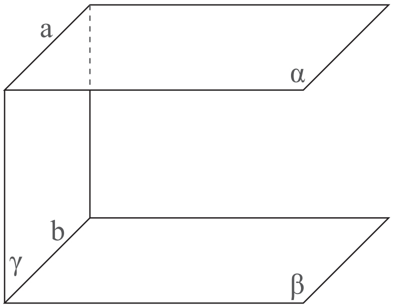
Justificare: Presupunem că $\alpha \nparallel \beta$. Atunci $\alpha \cap \beta = d$. Dacă vom considera un punct A pe dreapta d, atunci prin punctul A trec două plane paralele cu planul γ. Contradicție. Rezultă $\alpha \parallel \beta$.

Observă și descoperă!



2. În figura din dreapta sunt reprezentate schițat pardoseala sălii de clasă sub forma planului β, tavanul sub forma planului α și un perete lateral sub forma planului γ din imaginea din stânga.

Privește cu atenție imaginea și figura și stabilește care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate și care sunt false.



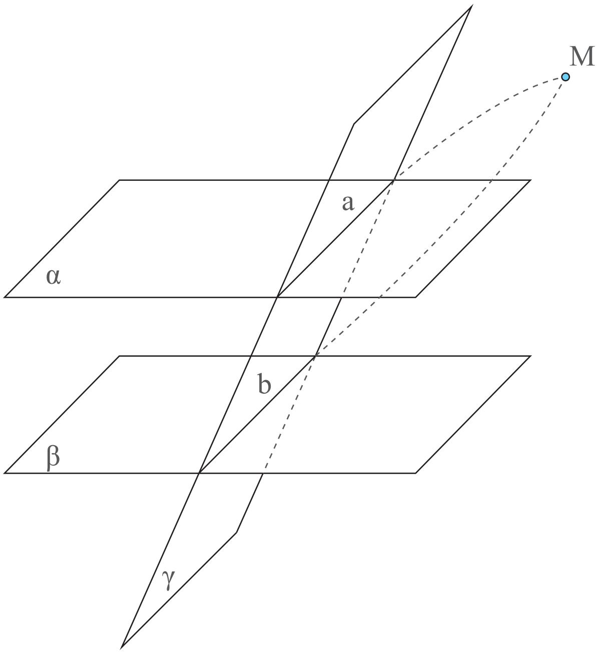
a) Planele α și β sunt paralele.
b) Planele β și γ sunt paralele.
c) Planele γ și α nu sunt paralele.
d) $\alpha \cap \gamma = a$.
e) $\beta \cap \gamma = b$.
f) Dreptele a și b nu sunt paralele.

Important

- **Dacă** un plan intersectează unul din două plane paralele, **atunci** îl intersectează și pe celălalt și dreptele de intersecție sunt paralele.

$$\left.\begin{array}{l}\gamma \cap \alpha = a\\ \alpha \parallel \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \gamma \cap \beta = b \text{ și } a \parallel b$$

Justificare: Presupunem că planele γ și β nu se intersectează. Atunci $\gamma \parallel \beta$. Dar $\alpha \parallel \beta$ și atunci $\alpha \parallel \gamma$. Dar $\alpha \cap \gamma = a$. Contradicție. Prin urmare planele γ și β se intersectează. Consider $b = \gamma \cap \beta$. Presupunem că dreptele a și b nu sunt paralele. Atunci, ele fiind coplanare (sunt în planul γ), sunt concurente. Considerăm M punctul de intersecție a dreptelor a și b. Avem $M \in a \subset \alpha$ și $M \in b \subset \beta$, implică $M \in \alpha \cap \beta$, adică $\alpha \nparallel \beta$. Dar $\alpha \parallel \beta$, contradicție. Presupunerea făcută este falsă, prin urmare dreptele a și b sunt paralele.



Exersează!

3. Identifică, în sala de clasă, perechi de plane paralele.

4. Identifică, pe fețele unui paralelipiped dreptunghic, perechi de plane paralele.

5. Demonstrează că în orice prismă dreaptă bazele sunt incluse în plane paralele.

6. Se consideră prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghi echilateral și punctele M, N și P astfel încât $AB' \cap A'B = \{M\}$, $BC' \cap B'C = \{N\}$ și $AC' \cap A'C = \{P\}$. Demonstrează că planul (MNP) este paralel cu planul (ABC).

7. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$.
a) Demonstrează că $AD' \parallel BC'$.
b) Demonstrează că planele $AB'D'$ și $BC'D$ sunt paralele.

8. Se consideră planele $\alpha \parallel \beta$ și dreptele $d_1 \parallel d_2$ astfel încât $d_1 \cap \alpha = A_1$, $d_1 \cap \beta = B_1$; $d_2 \cap \alpha = A_2$, $d_2 \cap \beta = B_2$.
a) Desenează o figură corespunzătoare enunțului.
b) Demonstrează că $A_1B_1 = A_2B_2$ și $A_1A_2 = B_1B_2$.

9. Se consideră tetraedrul $ABCD$ și punctele G_1, G_2 și G_3 centrele de greutate ale fețelor BCD, ACD, respectiv ABD.
a) Realizează o figură corespunzătoare enunțului.
b) Demonstrează că $(G_1G_2G_3) \parallel (ABC)$.

4. Aplicații: secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate; trunchiul de piramidă și trunchiul de con circular drept (descriere și reprezentare)

Observă și descoperă!

1. Ajută-l pe Radu să rezolve următoarea problemă.

Se consideră o piramidă triunghiulară $VABC$ (*Figura 7*). Un plan paralel cu planul bazei intersectează muchiile laterale AV, VB și CV în punctele A', B', respectiv C'. Demonstrează că triunghiul $A'B'C'$ este asemenea cu triunghiul ABC.

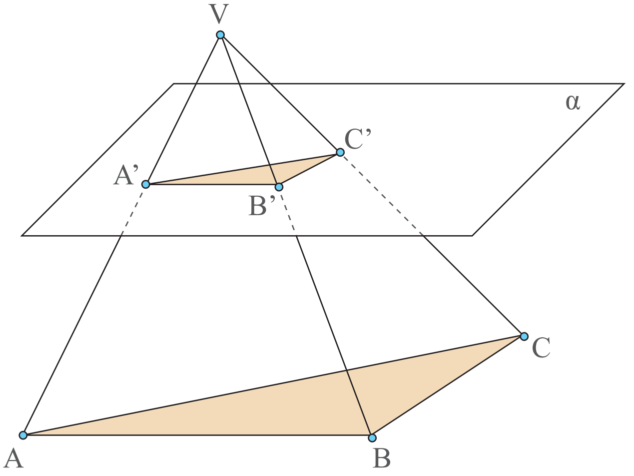


Figura 7

Radu te întreabă:

a) Care este dreapta de intersecție a planelor α și (VAB)?

b) Care este dreapta de intersecție a planelor (VAB) și (ABC)?

c) Sunt paralele planele α și (ABC)?

d) Sunt paralele dreptele AB și $A'B'$?

e) Justifică de ce $BC \parallel B'C'$ și $A'C' \parallel AC$.

De aici Radu se descurcă singur. Urmărește raționamentul lui Radu.

În triunghiul VAB, $A'B' \parallel AB$ implică, din teorema fundamentală a asemănării, $\triangle VA'B' \sim \triangle VAB$, de unde $\frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{A'B'}{AB}$. (1)

Analog, din $\triangle VB'C' \sim \triangle VBC$ rezultă $\frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC} = \frac{B'C'}{BC}$ (2) și din $\triangle VA'C' \sim \triangle VAC$ rezultă $\frac{VA'}{VA} = \frac{VC'}{VC} = \frac{A'C'}{AC}$. (3)

Din (1), (2) și (3) deducem că $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$, adică $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

Important

• Dacă secționăm o piramidă cu un plan paralel cu planul bazei, atunci în plan obținem un poligon cu laturile respectiv paralele cu laturile poligonului bazei piramidei, iar în piramidă două corpuri: o piramidă mică având același vârf cu piramida inițială și elementele proporționale cu cele ale piramidei inițiale și un corp nou numit **trunchi de piramidă.**

• **Trunchiul de piramidă** este corpul rămas în urma intersecției unei piramide cu un plan paralel cu planul bazei și îndepărtarea piramidei mici, din vârf.

• Pentru a desena un trunchi de piramidă se desenează mai întâi piramida!

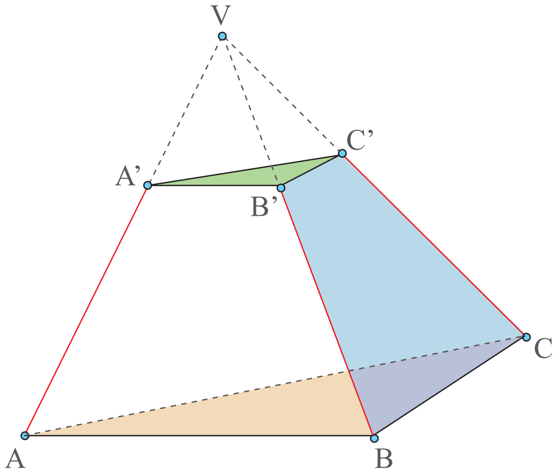
• **Elementele unui trunchi de piramidă sunt:**

▷ **Bazele trunchiului de piramidă.** Baza mare și baza mică. Sunt două poligoane cu laturile respectiv paralele. În figura alăturată baza mare este $\triangle ABC$, iar baza mică este $\triangle A'B'C'$.

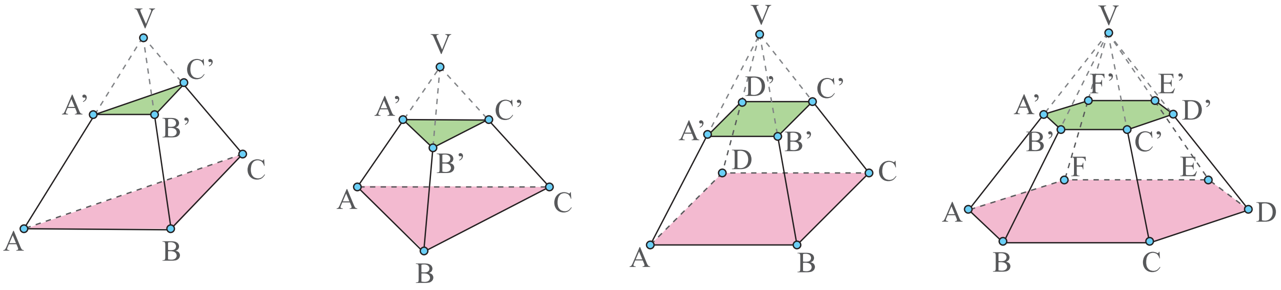
▷ **Fețele laterale.** Sunt totdeauna trapeze. Dacă trunchiul de piramidă provine dintr-o piramidă regulată, atunci fețele laterale sunt trapeze isoscele. În figura alăturată fețele laterale sunt trapezele $ABB'A'$, $BCC'B'$ și $ACC'A'$.

▷ **Muchiile laterale.** Sunt segmentele care rămân din muchiile laterale ale piramidei după ce se înlătură piramida mică. Dacă trunchiul de piramidă provine dintr-o piramidă regulată, atunci muchiile laterale sunt congruente. În figura alăturată muchiile laterale sunt AA', BB' și CC'.

▷ **Muchiile bazelor.** Sunt laturile celor două poligoane care reprezintă bazele trunchiului de piramidă. În figura alăturată muchiile bazelor sunt AB, BC, CA, $A'B'$, $B'C'$ și $C'A'$.

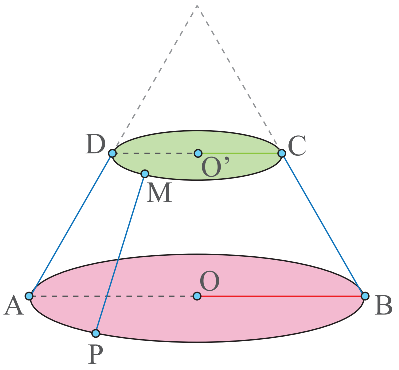


Exemple de trunchiuri de piramidă:



• **Trunchiul de con circular drept** este corpul rămas în urma intersecției unui con circular drept cu un plan paralel cu planul bazei și îndepărtarea conului mic, din vârf.

- **Elementele unui trunchi de con circular drept sunt:**
  - ▷ **Bazele trunchiului de con:** baza mare și baza mică. Sunt două cercuri de raze diferite.
  - ▷ **Suprafața laterală**. Trunchiul de con nu are fețe laterale; are o suprafață laterală.
  - ▷ **Razele bazelor:** raza bazei mari, respectiv raza bazei mici.
  - ▷ **Generatoarea:** este segmentul care rămâne din generatoarea conului după îndepărtarea conului mic.



Exersează!

2. Se consideră un trunchi de piramidă regulată $ABCA'B'C'$ (*Figura 8*), cu baza triunghi echilateral. Dacă muchia bazei mari este egală cu 8 cm, muchia bazei mici este egală cu 4 cm și muchia laterală a piramidei din care provine trunchiul are lungimea egală cu 10 cm, determină lungimea muchiei laterale a trunchiului de piramidă.

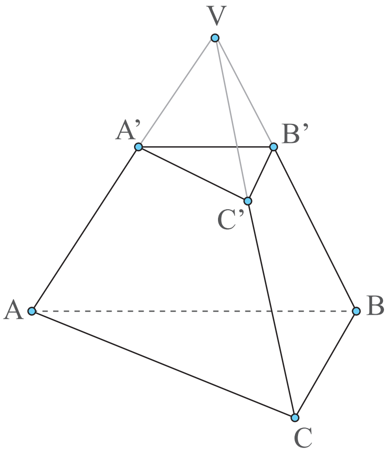


Figura 8

3. Se consideră un trunchi de con circular drept în care raza bazei mari este de 10 cm, raza bazei mici este de 5 cm și generatoarea trunchiului de con este de 6 cm. Determină lungimea generatoarei conului circular drept din care provine trunchiul de con.

4. Se consideră un con circular drept cu raza bazei egală cu 12 cm. Se secționează conul cu un plan paralel cu planul bazei care intersectează o generatoare a conului la $\frac{2}{3}$ din generatoare, față de vârful conului. Determină lungimea razei cercului de secțiune.

5. Aria unei fețe laterale a unei piramide drepte cu baza pătrat este egală cu 48 cm^2. Se secționează piramida cu un plan care trece prin mijlocul unei muchii laterale. Determină aria unei fețe laterale a trunchiului de piramidă obținut.

5. Recapitulare

1. Transcrie, pe caiet, tabelul de mai jos și apoi, folosindu-te de *Figura 9*, completează fiecare spațiu punctat din coloana **A** cu litera din coloana **B** pentru care se obține un enunț adevărat.

A	**B**
$\ldots. \in \alpha$	d
$\ldots. \subset \alpha$	e
$\ldots. \cap \alpha \neq \emptyset$	f
$\ldots. \cap \alpha = \emptyset$	P
	O

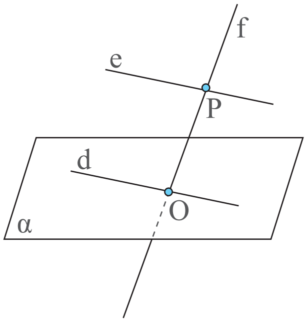


Figura 9

2. Se consideră prisma dreaptă $MNPM'N'P'$ cu baza triunghi echilateral.

a) Realizează un desen corespunzător enunțului.

b) Precizează care dintre următoarele afirmații sunt adevărate și care sunt false:
i) $MN \parallel M'N'$; ii) $NP \parallel (M'N'P')$; iii) $MM' \parallel (MPP')$; iv) $(MNP) \parallel (M'N'P')$.
Justifică răspunsurile date.

3. În *Figura 10* $ABCDA'B'C'D'$ este un cub, iar punctele M, N și P sunt mijloacele muchiilor AD, $B'C'$, respectiv BC.

a) Demonstrează că $NP \parallel CC'$.

b) Determină măsura unghiului dintre dreptele MN și CC'.

c) Determină măsura unghiului dintre dreptele MN și $C'D'$.

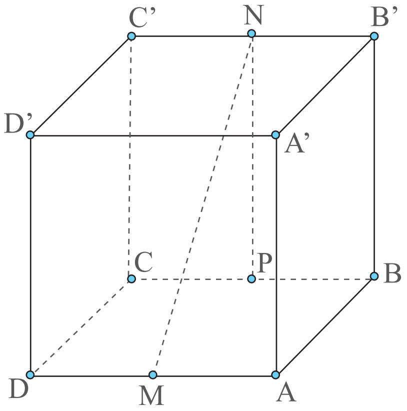


Figura 10

4. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și paralelogramul $ABEF$ situate în plane diferite. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AD, respectiv AF.

a) Realizează un desen corespunzător enunțului.

b) Demonstrează că $CE \parallel DF$.

c) Demonstrează că $MN \parallel (BEC)$.

5. Se consideră punctele necoplanare A, B, C și D și punctele M, N, P și Q mijloacele segmentelor AB, AC, DC, respectiv DB.

a) Realizează un desen corespunzător enunțului.

b) Demonstrează că $MNPQ$ este paralelogram.

c) Știind că măsura unghiului dintre dreptele AD și BC este egală cu 90°, demonstrează că $MNPQ$ este dreptunghi.

6. Se consideră un pătrat $ABCD$ și M un punct exterior planului pătratului. Se construiesc punctele N, P și Q astfel încât $MN \parallel AB$, $NP \parallel BC$ și $PQ \parallel CD$. Demonstrează că punctele M, N, P și Q sunt coplanare.

7. Se consideră $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic astfel încât $AB = 10\sqrt{3}$ cm şi $BC = BB' = 10$ cm.

a) Determină lungimile segmentelor AB' și AC.

b) Determină măsura unghiului dintre dreptele AB și CC'.

c) Determină măsura unghiului dintre dreptele AB' și DD'.

d) Determină măsura unghiului dintre dreptele BC' și AD.

e) Determină măsura unghiului dintre dreptele CD' și AB.

8. Problemă rezolvată: Se consideră piramida regulată $VABCD$, cu vârful V și punctele M și N, mijloacele muchiilor CV, respectiv DV.

a) Demonstrează că punctele A, B, M și N sunt coplanare.

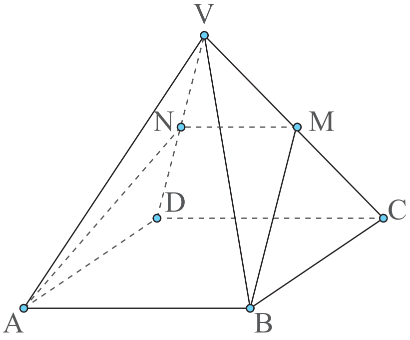
b) Dacă P este punctul de intersecție a dreptelor AN și BM, demonstrează că $VP \parallel BC$.

c) Justifică afirmația: „Într-o piramidă regulată cu baza pătrat, dreapta de intersecție a două fețe laterale opuse este paralelă cu muchiile bazei corespunzătoare acelor fețe și trece prin vârful piramidei”.

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Realizez un desen corespunzător enunțului.

Cum scriu:



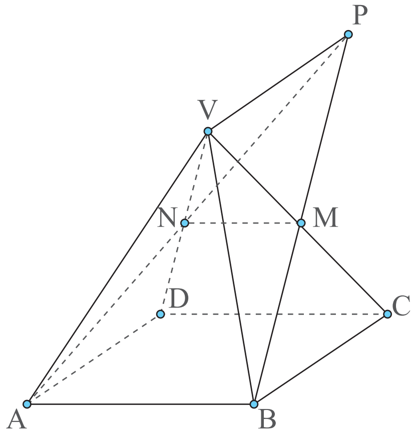
Pas 2. a) Pentru a demonstra că patru puncte sunt coplanare trebuie să arătăm că cele patru puncte determină două drepte concurente sau două drepte paralele. Deoarece în problemă se vorbește despre „mijloacele muchiilor” mă pot gândi la linia mijlocie, deci la paralelism.

În $\triangle VDC$, MN este linie mijlocie și atunci $MN \parallel DC$. Dar $ABCD$ este pătrat, deci $DC \parallel AB$. Rezultă $MN \parallel AB$, prin urmare punctele A, B, M și N sunt coplanare.

Pas 3. b) Voi demonstra că patrulaterul $BCPV$ este paralelogram. Punctul M este mijlocul diagonalei CV. Voi arăta că punctul M este și mijlocul diagonalei BP.

Știind că MN este linie mijlocie în triunghiul VDC, avem $MN = \dfrac{DC}{2}$ și, cum $DC = AB$ ($ABCD$ este pătrat), obținem $MN = \dfrac{AB}{2}$.

De aici și din $MN \parallel AB$ rezultă că MN este linie mijlocie în triunghiul PAB, deci punctul M este și mijlocul segmentului BP.



Pas 4. Știu că patrulaterul în care diagonalele au același mijloc este paralelogram și de aici obținem paralelismul celor două drepte care ne interesează.

Din afirmaţiile M este și mijlocul segmentului BP și M este și mijlocul segmentului CV, rezultă că patrulaterul $BCPV$ este paralelogram. Atunci $VP \parallel BC$.

Pas 5. c) Pentru a determina dreapta de intersecție a două plane sunt necesare două puncte comune celor două plane. Planele VBC și VAD au comun punctul V. Trebuie identificată această dreaptă de intersecție care trece prin V.

Avem $P \in BM \subset (VBC)$, deci $P \in (VBC)$ și $P \in AN \subset (VAD)$, deci $P \in (VAD)$. Prin urmare, punctul P aparține celor două plane. Rezultă $(VBC) \cap (VAD) = VP$.

Pas 6. La punctul b) am demonstrat că VP este paralelă cu BC.

Din punctul b) avem $VP \parallel BC$, iar din ipoteză ($ABCD$ pătrat) avem $AD \parallel BC$. Atunci $VP \parallel BC \parallel AD$ și afirmația este justificată.

9. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, și dreptunghiul $ABEF$ situate în plane diferite.
a) Realizează un desen corespunzător enunțului.
b) Demonstrează că dreptele CE și DF sunt coplanare.
c) Dacă P este punctul de intersecție a dreptelor AD și BC, arată că $\dfrac{PC}{PB} = \dfrac{DC}{AB}$.
d) Dacă Q este punctul de intersecție a dreptelor FD și EC, arată că $\dfrac{PC}{PB} = \dfrac{QC}{QE}$.
e) Demonstrează că $PQ \parallel BE \parallel AF$.

10. Se consideră trunchiul de piramidă regulată $ABCA'B'C'$. Dacă latura bazei mici este o treime din latura bazei mari și muchia laterală a trunchiului de piramidă este egală cu 6 cm, determină lungimea muchiei laterale a piramidei din care provine trunchiul.

11. Se consideră un con circular drept VAB cu raza bazei egală cu 18 cm și M un punct de pe generatoarea VA astfel încât $\dfrac{VM}{MA} = \dfrac{2}{7}$. Conul se secționează cu un plan paralel cu planul bazei, care trece prin punctul M. Determină raza bazei mici a trunchiului de con obținut prin secționare.

AUTOEVALUARE – În această unitate de învățare:

🟩 Am înțeles foarte bine ....
🟨 Îmi este neclar ....
🟥 Nu știu să .... / Nu am înțeles ....

Revezi lecțiile și exercițiile noțiunilor notate la culoarea galbenă. Discută cu un coleg/ o colegă sau cu profesorul despre ceea ce nu ai înțeles și ai completat la culoarea roșie.

6. Evaluare

Timp de lucru: 45 de minute

Din oficiu 10p

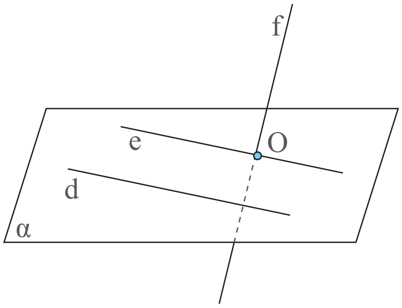


Figura 11

1. Asociază fiecărei perechi de drepte din coloana A descrierea corespunzătoare din coloana B, folosindu-te de *Figura 11.* *10p*

A	B
1. e și f	a) concurente
2. f și d	b) necoplanare
	c) paralele

La exerițiile 2 – 5, alege răspunsul pe care-l consideri corect.

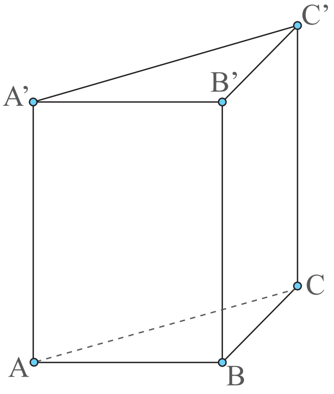


Figura 12

2. În prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghi echilateral (*Figura 12*), dreapta BC este paralelă cu: *10p*

A. AB; B. BB'; C. AB'; D. $B'C'$.

3. a) Desenează un cub $ABCDA'B'C'D'$. *5p*

b) În cubul $ABCDA'B'C'D'$, măsura unghiului dintre dreptele BB' și CD' este: *5p*

A. 30°; B. 45°; C. 60°; D. 90°.

4. a) Desenează paralelipipedul dreptunghic $MNPQM'N'P'Q'$. *5p*

b) În paralelipipedul dreptunghic $MNPQM'N'P'Q'$, dreapta MN' este paralelă cu planul: *5p*

A. (MNP); B. (NPP'); C. $(M'N'P')$; D. (PQQ').

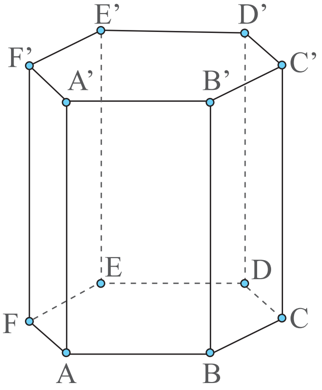


Figura 13

5. În prisma dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ cu baza hexagon regulat (*Figura 13*), planul $(AB'A')$ este paralel cu planul: *10p*

A. (ABC); B. $(C'D'E')$; C. (DEE'); D. (DFF').

6. a) Desenează o piramidă regulată $VABCD$, cu vârful V. *5p*

b) În piramida regulată $VABCD$, cu vârful V, demonstrează că $AD \parallel (VBC)$. *5p*

c) Dacă $AV = AB$, determină măsura unghiului dintre dreptele VD și AB. *5p*

d) Dacă M este mijlocul segmentului BC, determină măsura unghiului dintre dreptele AD și VM. *5p*

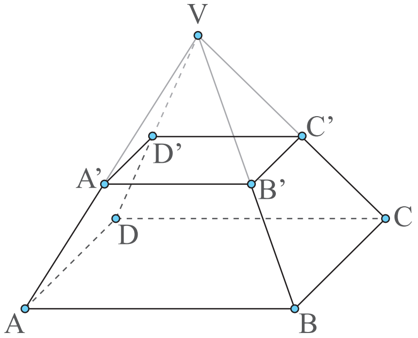


Figura 14

7. În *Figura 14* $ABCDA'B'C'D'$ este un trunchi de piramidă regulată. Dacă muchia laterală a piramidei din care provine trunchiul are aceeași lungime cu muchia bazei mari a trunchiului de piramidă, determină măsura unghiului dintre dreptele AA' și CC'. *10p*

8. Se consideră conul circular drept VAB. Conul se secționează cu un plan paralel cu planul bazei astfel încât aria secțiunii este egală cu 9π cm^2. Știind că raportul dintre generatoarea trunchiului de con și generatoarea conului este $\frac{2}{5}$, determină raza cercului de la baza conului. *10p*

7. Exersezi și progresezi

1. Folosindu-te de *Figura 15*, precizează care dintre următoarele afirmații sunt adevărate și care sunt false:

a) dreptele d și e sunt coplanare;
b) dreptele d și e sunt paralele;
c) dreptele e și f sunt coplanare;
d) dreptele g și e sunt coplanare;
e) dreptele f și g sunt necoplanare;
f) dreptele d și f sunt paralele;
g) dreptele d și g sunt coplanare;
h) $AB \cap d = \emptyset$;
i) $AB \subset \alpha$;
j) $AB \parallel d$.

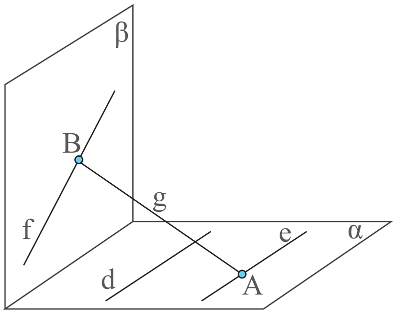


Figura 15

2. În *Figura 16* este ilustrată schița unui acoperiș reprezentat printr-o prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghi isoscel ($AB = BC$). Acoperișul trebuie construit astfel încât măsura unghiului ACB să fie de 10°. Se consideră punctele M și M' mijloacele segmentelor AC și $A'C'$.

a) Dacă $AC = 10$ m, iar $\text{tg}\, 10° = 0{,}17$ determină lungimea segmentelor BM și $B'M'$ care reprezintă înălțimea acoperișului.

b) Demonstrează că $AMM'A'$ este dreptunghi.

c) Demonstrează că $MM' \parallel BB'$.

d) Determină măsura unghiului dintre dreptele BC și $A'B'$.

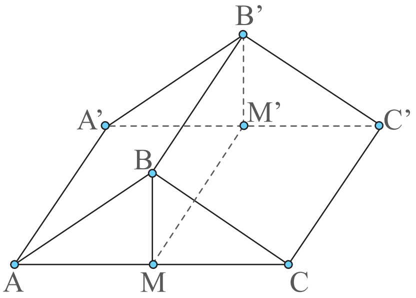


Figura 16

3. Știind că în *Figura 17* $ABCDEF$ reprezintă o prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral, identifică câte două perechi de: i) drepte paralele; ii) drepte concurente; iii) drepte necoplanare; iv) o dreaptă și un plan astfel încât dreapta este conținută în planul respectiv; v) o dreaptă și un plan astfel încât dreapta „înțeapă” planul respectiv; vi) o dreaptă și un plan astfel încât dreapta este paralelă cu planul respectiv.

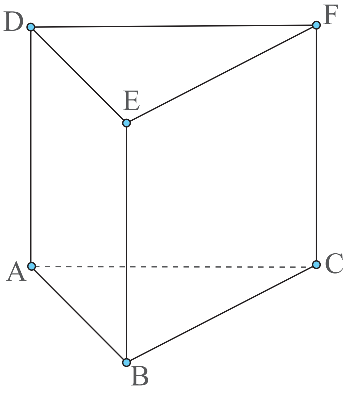


Figura 17

4. Se consideră piramida regulată $VABCD$ de vârf V cu baza pătratul $ABCD$ (*Figura 18*), M și N mijloacele muchiilor VB și VC, O centrul bazei $ABCD$, P mijlocul segmentului VO, Q mijlocul segmentului MN și R mijlocul muchiei BC. Demonstrează că:
a) $AB \parallel (VCD)$; b) $BC \parallel (VAD)$; c) $MN \parallel (ABC)$; d) $MN \parallel (VAD)$;
e) punctele V, Q și R sunt coliniare; f) $(PMQ) \parallel (ABC)$.

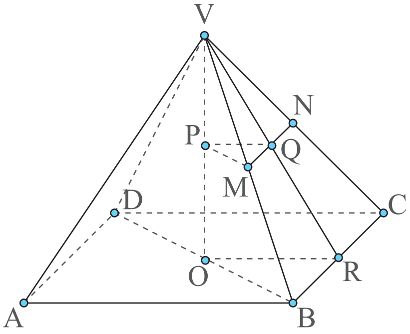


Figura 18

5. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Demonstrează următoarele relații de paralelism: a) $(ABC) \parallel (A'B'C')$; b) $(BCC') \parallel (ADD')$; c) $(ABB') \parallel (D'C'C)$.

6. Se consideră tetraedrul regulat $VABC$ și punctele $M \in VA$, $N \in VB$ și $P \in VC$ astfel încât $AM = BN = CP$. a) Demonstrează că $(MNP) \parallel (ABC)$. b) Demonstrează că triunghiul MNP este echilateral.

7. Oferă un contraexemplu pentru enunțul următor: „dacă $d \parallel \alpha$, $e \parallel \alpha$ și $d \parallel e$, atunci $(d,e) \parallel \alpha$."

8. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $MNPQM'N'P'Q'$ și punctele A pe muchia MM', B pe muchia NN', C pe muchia PP' și D pe muchia QQ' astfel încât $AM = BN' = CP' = DQ$. Demonstrează că $(AND) \parallel (BCQ')$.

9. Se consideră trunchiul de piramidă regulată $ABCA'B'C'$ cu baza triunghi și M, N și P puncte pe muchiile laterale AA', BB', respectiv CC' astfel încât $AM = BN = CP$.
Demonstrează că $(MNP) \parallel (ABC)$.

10. Se consideră trunchiul de piramidă regulată $MNPM'N'P'$ cu baza triunghi, iar punctele O_1, O_2 și O_3 sunt pe fețele laterale ale trunchiului de piramidă astfel încât $MN' \cap M'N = \{O_1\}$, $NP' \cap N'P = \{O_2\}$ și $MP' \cap M'P = \{O_3\}$. a) Demonstrează că $(O_1O_2O_3) \parallel (MNP)$. b) Arată că triunghiul $O_1O_2O_3$ este echilateral.

11. Se consideră prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu baza pătrat, iar punctele O_1, O_2, O_3 și O_4 sunt centrele fețelor laterale ale prismei. Demonstrează că:
a) punctele O_1, O_2, O_3 și O_4 sunt coplanare;
b) planul determinat de punctele O_1, O_2, O_3 și O_4 este paralel cu planul bazei prismei;
c) poligonul determinat de punctele O_1, O_2, O_3 și O_4 este un pătrat.

12. Se consideră piramida regulată $VABC$ cu vârful V și cu baza triunghi (*Figura 19*), $(A'B'C') \parallel (ABC)$ o secțiune paralelă cu planul bazei astfel încât $AB = 2A'B'$, M mijlocul muchiei AB, N mijlocul segmentului CC', P mijlocul segmentului CM, Q mijlocul segmentului $A'B'$ și R mijlocul lui $A'C'$.
a) Dacă $VA = 12$ cm, determină lungimea segmentului AA'.
b) Demonstrează că $NP \parallel (ABC')$.
c) Demonstrează că $PQ \parallel (VBC)$.
d) Demonstrează că $(RQP) \parallel (VBC)$.

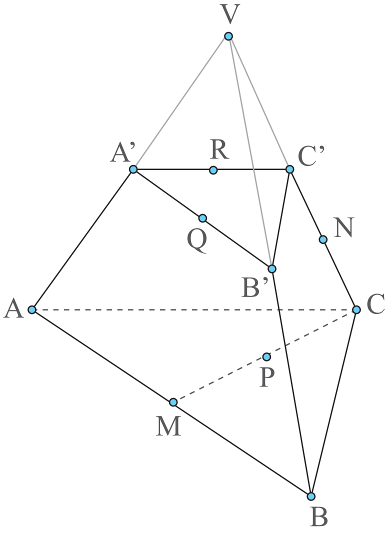


Figura 19

13. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ și punctele M, N, P și Q pe muchiile AA', BB', CC', respectiv DD', astfel încât $A'M = BN = CP = D'Q$. Demonstrează că dreptele MP și NQ sunt concurente.

14. Se consideră o piramidă regulată $VABCD$, punctul O mijlocul segmentului AC, punctul M mijlocul muchiei VA și punctul N mijlocul muchiei VB. Demonstrează că $(OMN) \parallel (VDC)$.

Matematică – Manual pentru clasa a VIII-a

IX

Elemente ale geometriei în spațiu. Perpendicularitate

1. Drepte perpendiculare, dreapta perpendiculară pe un plan

Observă și descoperă!

1. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ din *Figura 1* au fost marcate o parte dintre elemente.

a) Care este unghiul dintre dreptele AA' și AB?

b) Ce măsură are unghiul dintre muchia AA' și muchia AB? Justifică răspunsul dat.

c) Care este unghiul dintre dreptele AA' și AD?

d) Ce măsură are unghiul dintre muchia AA' și muchia AD? Justifică răspunsul dat.

e) Cum se numesc dreptele care formează un unghi cu măsura de 90°?

f) Știind că $DBB'D'$ este dreptunghi, ce măsură are unghiul dintre muchia AA' și diagonala BD? Justifică răspunsul dat.

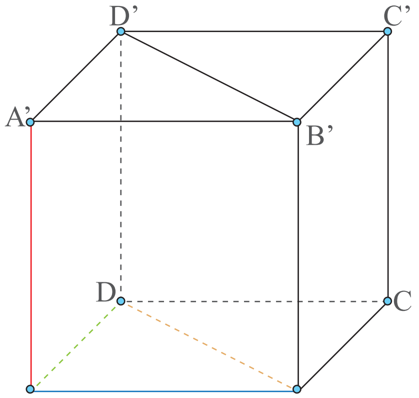
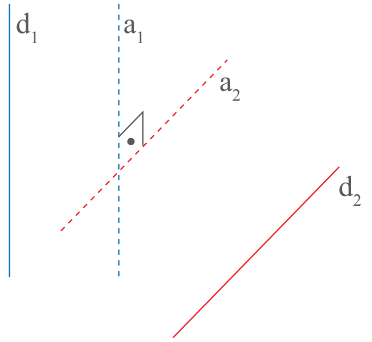


Figura 1 - Cub

Important

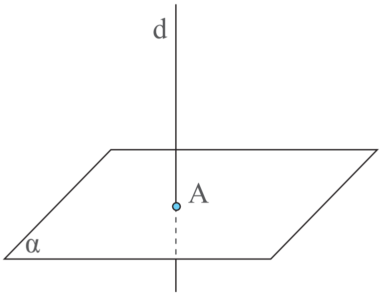
- Două **drepte necoplanare** se numesc **perpendiculare** dacă paralelele duse prin același punct la ele sunt perpendiculare. De exemplu, dreptele d_1 și d_2 se numesc perpendiculare pentru că dreapta a_1, care este paralelă cu d_1 și dreapta a_2, care este paralelă cu d_2 sunt perpendiculare.

  Scriu: $d_1 \perp d_2$. Citesc: „Dreapta d_1 este perpendiculară pe dreapta d_2”.



- O **dreaptă** este **perpendiculară pe** un **plan** dacă este perpendiculară pe orice dreaptă din plan.

  Scriu: $d \perp \alpha$. Citesc: „Dreapta d este perpendiculară pe planul α.

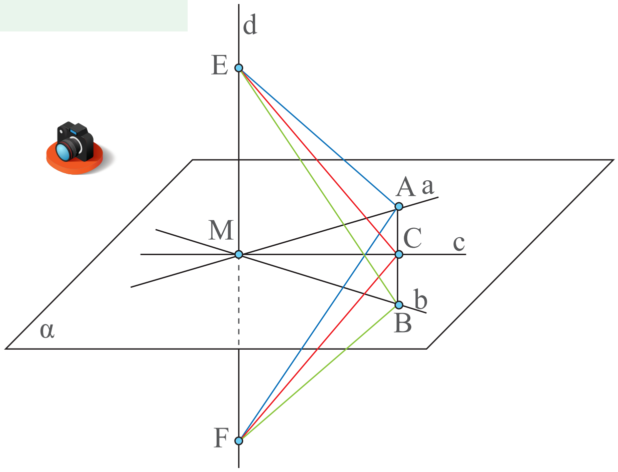


- Cum dovedesc că o dreaptă este perpendiculară pe un plan?

  Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente dintr-un plan, atunci ea este perpendiculară pe plan.

$$\left.\begin{array}{l} d \perp a \\ d \perp b \\ a \cap b = \{M\} \\ a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp \alpha$$

Justificare: Deoarece unghiul a două drepte necoplanare se definește cu ajutorul unghiului format de paralelele prin același punct la ele, putem considera că dreptele a și b din planul α trec prin punctul M de intersecție a dreptei d cu planul α. Conform definiției, dreapta d trebuie să fie perpendiculară pe toate dreptele din plan.



Folosind ceea ce am spus mai sus, este suficient să luăm în plan, o dreaptă c, diferită de a și b, care să treacă prin M. Vom arăta că $d \perp c$. Avem nevoie de o construcție ajutătoare.

Considerăm punctele E și F pe dreapta d, de o parte și de alta a planului α, astfel încât $EM = FM$, și punctele A și B situate pe dreapta a, respectiv pe dreapta b.

Triunghiul AEF este isoscel, deoarece AM este înălțime ($d \perp a$) și mediană ($EM = FM$). Rezultă $EA = FA$.

Triunghiul BEF este isoscel, deoarece BM este înălțime ($d \perp b$) și mediană ($EM = FM$). Rezultă $EB = FB$.

Din $EA = FA$, $EB = FB$ și AB este latură comună, rezultă că $\triangle EAB \equiv \triangle FAB$, de unde rezultă că $\sphericalangle EAB = \sphericalangle FAB$.

Dacă punctul C este intersecția dreptelor AB și c, atunci $\triangle EAC \equiv \triangle FAC$, deoarece AC este latură comună, $EA = FA$ (am demonstrat) și $\sphericalangle EAC = \sphericalangle FAC$ (am demonstrat).

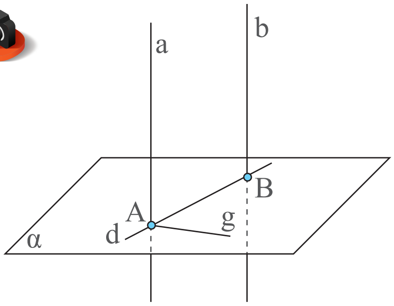
Din congruența acestor triunghiuri rezultă că $EC = FC$, adică triunghiul ECF este isoscel. Cum CM este mediană în acest triunghi rezultă CM este și înălțime, adică $CM \perp EF$.

Deci $d \perp c$ și atunci dreapta d este perpendiculară pe toate dreptele din plan (dreapta c a fost luată arbitrar), adică pe plan.

• Perpendiculara dintr-un punct pe un plan este unică.

• Dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, atunci orice paralelă la acea dreaptă este perpendiculară pe plan.

$$\left.\begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \parallel a \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp \alpha$$



Justificare: Dreptele a și b fiind paralele determină un plan și $\alpha \cap (a,b) = d$. Din $a \perp \alpha$ și $d \subset \alpha$ deducem că $a \perp d$.

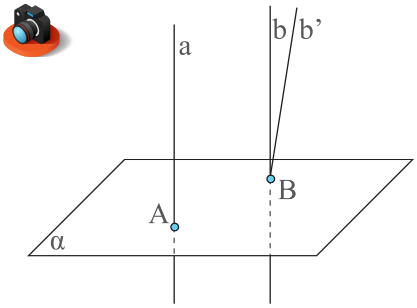
Dreptele a, b și d se găsesc în planul (a,b). În acest plan, din $a \perp d$ și $a \parallel b$ rezultă $b \perp d$.

Acum, în planul α consider dreapta $g \perp d$. De aici și din $g \perp a$ (pentru că $a \perp \alpha$) rezultă $g \perp (a,b)$, de unde $g \perp b$.

Avem, așadar, $b \perp d$ și $b \perp g$, deci $b \perp \alpha$.

• Două drepte perpendiculare pe același plan sunt paralele.

$$\left.\begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b$$



Justificare: Presupunem că cele două drepte nu sunt paralele. Dacă B este punctul în care dreapta b intersectează planul, atunci construim, prin B o dreaptă $b' \parallel a$. Cum $a \perp \alpha$ rezultă că $b' \perp \alpha$.

Dar $b \perp \alpha$, adică prin punctul B trec două drepte perpendiculare pe planul α ceea ce este imposibil.

Presupunerea făcută este falsă, deci $a \parallel b$.

Exersează!

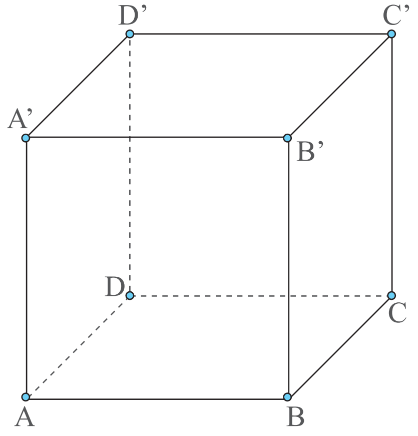


Figura 2 - Cub

2. Portofoliu. În *Figura 2*, $ABCDA'B'C'D'$ este un cub. Scrie:
a) trei drepte perpendiculare pe BC, dar necoplanare cu BC;
b) trei drepte perpendiculare pe BB', dar necoplanare cu BB';
c) trei drepte perpendiculare pe $A'B'$, dar necoplanare cu $A'B'$.
Așază în portofoliul **Perpendicularitate în spațiu** răspunsurile tale.

3. Folosind *Figura 2*, demonstrează următoarele afirmații:
a) $AB \perp A'D$; b) $AB \perp B'C$; c) $BC' \perp A'D$; d) $AC \perp B'D'$.

4. Folosind *Figura 2*, justifică următoarele afirmații:
a) $BB' \perp (ACD)$; b) $AB \perp (C'B'C)$; c) $DD' \perp (A'B'C')$;
d) $AC \perp (BB'D')$; e) $AD' \perp (A'CD)$.

5. Demonstrează că într-un paralelipiped dreptunghic oricare muchie este perpendiculară pe două dintre fețe.

6. Portofoliu. În plan, „două drepte perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt paralele”. Afirmația rămâne adevărată dacă dreptele sunt în spațiu? Folosește un desen cu un cub pentru a justifica răspunsul dat.
Așază în portofoliul **Perpendicularitate în spațiu** justificarea ta.

7. Paralelogramul $ABCD$ și dreptunghiul $ABEF$ sunt situate în plane diferite.
a) Verifică dacă AF și DC sunt perpendiculare.
b) Demonstrează că $MN \perp DC$, unde M este mijlocul segmentului FB, iar N este mijlocul segmentului EF.

8. Triunghiul dreptunghic isoscel DCE $(\sphericalangle D = 90^\circ)$ și dreptunghiul $ABCD$ sunt situate în plane diferite.
a) Demonstrează că $AB \perp DE$.
b) Demonstrează că $AE \perp AB$.
c) Dacă $BC \perp EC$ demonstrează că $ED \perp BC$.

9. Pe planul triunghiului echilateral ABC, cu latura egală cu 12 cm se ridică perpendiculara DM, unde D este mijlocul laturii BC. Dacă $DM = 6$ cm, determină lungimea segmentelor AM, BM și CM.

10. Se consideră paralelogramele $ABCD$ și $BCEF$ situate în plane diferite, ca în *Figura 3*, astfel încât $AE = DF$. Demonstrează că $BC \perp AF$.

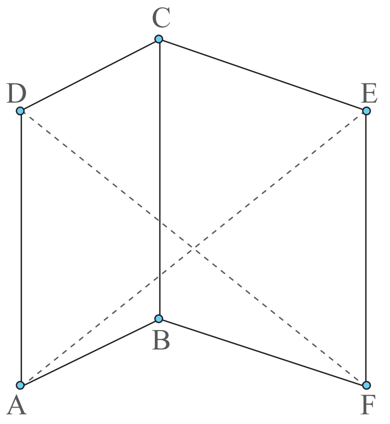


Figura 3 - Paralelograme în plane diferite

11. Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara DP.
a) Demonstrează că $AB \perp (PDA)$.
b) Justifică afirmația $PA \perp AB$.
c) Arată că $PC \perp BC$.

12. Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara DP. Dacă $PD = 16$ cm, $AB = 12$ cm și $BC = 30$ cm, determină lungimile segmentelor PA, PB și PC.

13. a) Demonstrează că diagonalele unui paralelipiped dreptunghic sunt congruente.
b) Notăm cu d lungimea diagonalei unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b și c.
Demonstrează că $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

2. Aplicații: înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept

Observă și descoperă!

1. Se consideră o piramidă regulată $VABC$, cu baza triunghiul echilateral ABC. Din vârful V se construiește VO perpendiculară pe planul bazei ABC, unde O aparține planului ABC. Folosind *Figura 4*, răspunde la următoarele întrebări.

a) Ce măsură are unghiul VOB? Justifică răspunsul dat.

b) Care sunt măsurile unghiurilor VOA și VOC? Justifică răspunsurile date.

c) Cum justifici faptul că $\triangle VOA \equiv \triangle VOB \equiv \triangle VOC$?

d) Justifică afirmația: „Punctul O este centrul cercului circumscris bazei piramidei."

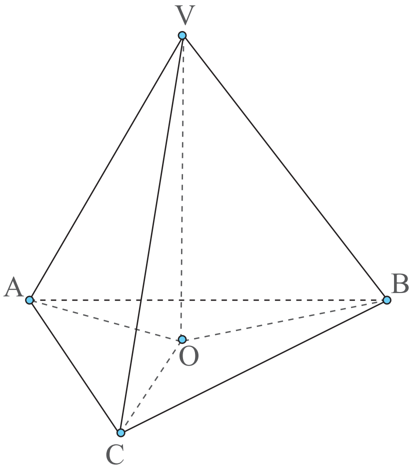
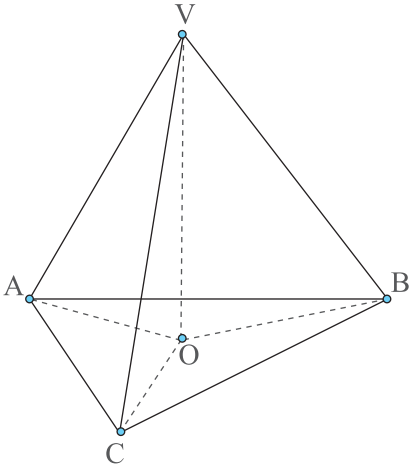


Figura 4 – Piramida regulată

Important

- Numim **înălțimea unei piramide** perpendiculara din vârful piramidei pe planul bazei.

Exemplu: În figura alăturată, dacă $VO \perp (ABC)$, atunci VO este înălțimea piramidei $VABC$.



- **Într-o piramidă regulată înălțimea „cade" în centrul cercului circumscris bazei.**

- **O piramidă cu baza poligon regulat în care înălțimea „cade" în centrul cercului circumscris bazei este o piramidă regulată.**

Justificare: Prin definiție, o piramidă este regulată dacă baza este poligon regulat și muchiile laterale sunt congruente. În cazul nostru baza este poligon regulat. Trebuie dovedit că muchiile laterale sunt congruente.

Deoarece $VO \perp (ABC)$ și OA, OB, $OC \subset (ABC)$ rezultă că $VO \perp OA$, $VO \perp OB$ și $VO \perp OC$, adică triunghiurile VOA, VOB și VOC sunt dreptunghice. Din $OA = OB = OC$ (O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC) și VO latură comună, rezultă $\triangle VOA \equiv \triangle VOB \equiv \triangle VOC$. De aici obținem $AV = BV = CV$, adică muchiile laterale sunt congruente. Prin urmare piramida $VABC$ este o piramidă regulată.

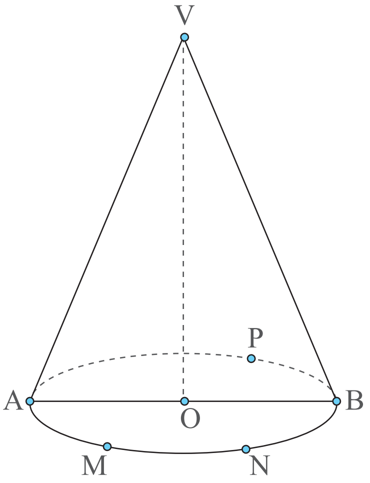
Observație: Justificările de mai sus rămân valabile și în cazul unei piramide regulate cu baza pătrat sau hexagon regulat.

• Numim **înălțimea unui con circular drept** perpendiculara din vârful conului pe planul bazei.

Exemplu: În figura alăturată, dacă VO este perpendiculară pe planul cercului, atunci VO este înălțimea conului circular drept.

• Într-un con circular drept, înălțimea conului „cade” în centrul cercului de la baza conului.

Justificare: Pe cercul de la baza conului se iau trei puncte, M, N, P și se demonstrează, ca mai sus, că $OM = ON = OP$. Cum trei puncte necoliniare determină un cerc deducem că punctul O este centrul cercului de la baza conului.



Exersează!

2. În *Figura 5* este reprezentat un con circular drept în care AB este diametrul bazei. Dacă VO este înălțimea conului, $OA = 12$ cm și $VA = 20$ cm, determină lungimea înălțimii conului.

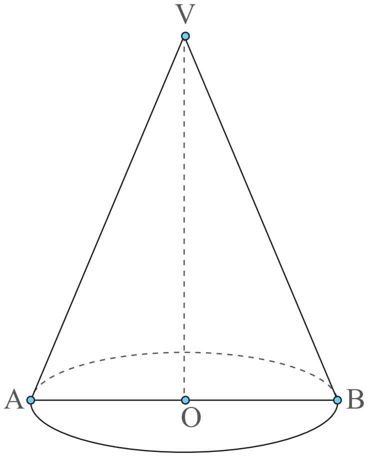


Figura 5 – Con circular drept

3. Determină raza unui con circular drept cu generatoarea de 13 cm și înălțimea de 12 cm.

4. Piramida regulată cu baza pătrat, din *Figura 6*, are muchia laterală de $5\sqrt{2}$ cm și latura bazei de 6 cm. Determină lungimea înălțimii acestei piramide.

5. Tetraedrul regulat $ABCD$ are muchia de 12 cm. Determină lungimea înălțimii tetraedrului.

6. În tetraedrul $ABCD$ fețele ABD și ACD sunt triunghiuri dreptunghice, cu $\sphericalangle D = 90°$. Demonstrează că segmentul AD este înălțimea din A a acestui tetraedru.

7. O piramidă regulată $VABCDEF$, cu baza hexagon regulat are înălțimea de 8 cm și muchia laterală de 10 cm. Determină lungimea muchiei bazei piramidei.

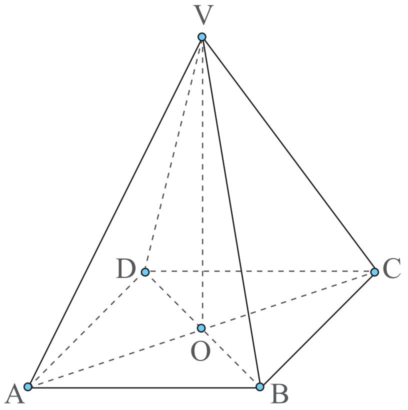


Figura 6 – Piramidă regulată cu baza pătrat

3. Distanța dintre două plane paralele, înălțimea prismei drepte, a paralelipipedului dreptunghic, a cilindrului circular drept, a trunchiului de piramidă, a conului circular drept

Observă și descoperă!

1. În *Figura 7* planele α și β sunt paralele, dreptele d_1 și d_2 sunt paralele. Dreapta d_1 intersectează planele α și β în punctele A_1, respectiv A_2, iar dreapta d_2 intersectează planele α și β în punctele B_1, respectiv B_2. Folosind figura răspunde la întrebările următoare:

a) Care este dreapta de intersecție a planului (d_1,d_2) cu planul α?

b) Care este dreapta de intersecție a planului (d_1,d_2) cu planul β?

c) Cum justifici că patrulaterul $A_1A_2B_2B_1$ este paralelogram?

d) Dacă $d_1 \perp \alpha$, ce măsură are unghiul $A_1A_2B_2$?

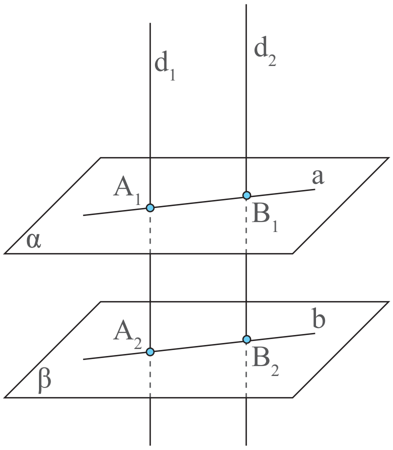
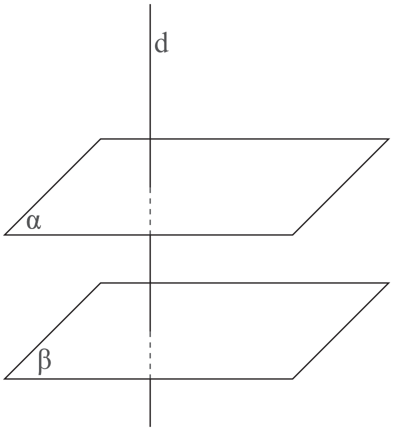


Figura 7 – Plane paralele

Important

• Dacă două plane sunt paralele, atunci o dreaptă care este perpendiculară pe unul dintre plane este perpendiculară și pe celălalt plan.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \beta \\ d \perp \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow d \perp \beta$$

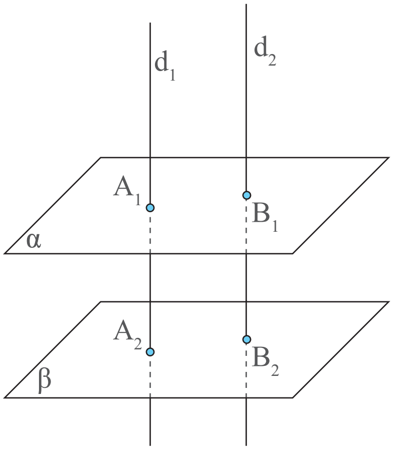


• Două plane paralele determină pe două drepte paralele, care intersectează cele două plane, segmente congruente.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \beta \\ d_1 \parallel d_2 \\ d_1 \cap \alpha = \{A_1\} \\ d_1 \cap \beta = \{A_2\} \\ d_2 \cap \alpha = \{B_1\} \\ d_1 \cap \beta = \{B_2\}\end{array}\right\} \Rightarrow A_1A_2 = B_1B_2$$

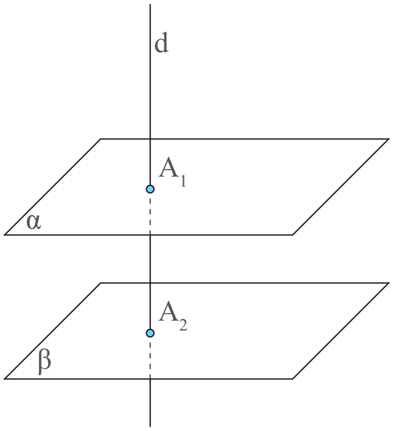
Justificare:

Deoarece $d_1 \parallel d_2$ rezultă că există un plan $\gamma = (d_1,d_2)$. Acum $\alpha \cap \gamma = A_1B_1$, $\beta \cap \gamma = A_2B_2$ și $\alpha \parallel \beta$ implică $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. De aici și din $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ rezultă că $A_1B_1B_2A_2$ este paralelogram și atunci $A_1A_2 = B_1B_2$.



- **Distanța dintre** două **plane paralele** este egală cu lungimea segmentului determinat de cele două plane pe o dreaptă perpendiculară pe cele două plane.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ d \perp \alpha \\ d \perp \beta \\ d \cap \alpha = \{A_1\} \\ d \cap \beta = \{A_2\} \end{array}\right\} \Rightarrow A_1A_2 \text{ este distanța dintre planele } \alpha \text{ și } \beta.$$



Observă și descoperă!

2. Ajută-l pe Radu să rezolve următoarea problemă:

Se consideră prisma dreaptă $ABCA'B'C'$, cu baza triunghiul ABC (*Figura 8*). Arată că $AA' \perp (ABC)$.

a) Cum justifici afirmația $AA' \perp AB$?

b) Cum justifici afirmația $AA' \perp AC$?

c) Cum justifici afirmația $AA' \perp (ABC)$?

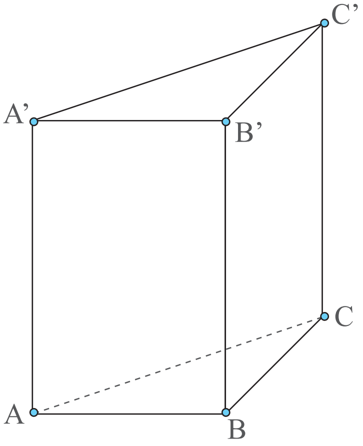


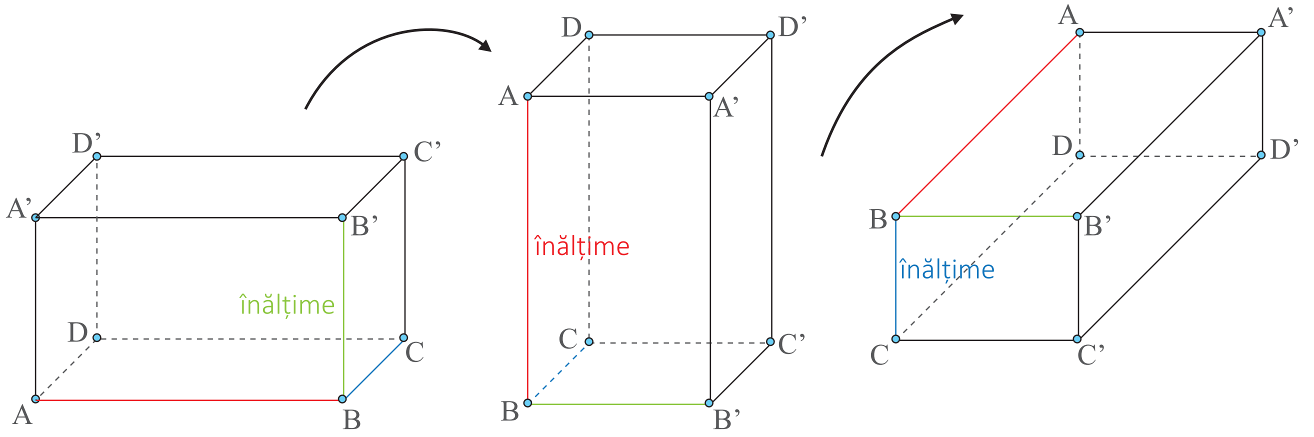
Figura 8 – Prismă dreaptă

Important

- Numim **înălțimea prismei drepte** distanța dintre planele celor două baze ale prismei.

- La o prismă dreaptă muchia laterală este și înălțime.

- La un paralelipiped dreptunghic oricare două fețe situate în plane paralele se pot numi baze și atunci oricare dintre cele trei dimensiuni ale paralelipipedului se poate considera înălțimea paralelipipedului dreptunghic.

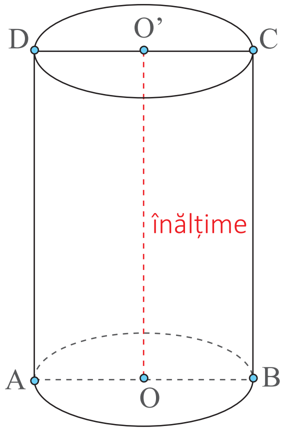


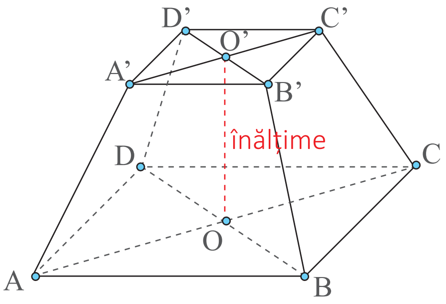
- Numim **înălțimea cilindrului circular drept** distanța dintre planele celor două baze ale cilindrului. De regulă, înălțimea cilindrului circular drept este considerată distanța dintre centrele cercurilor celor două baze.

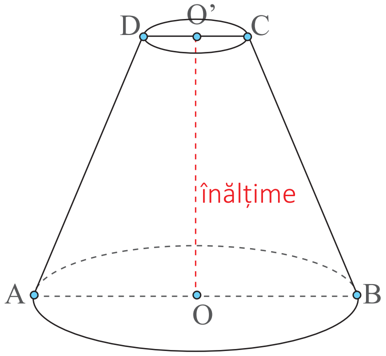
- La un cilindru circular drept generatoarea este și înălțime.

- Numim **înălțimea trunchiului de piramidă** distanța dintre planele celor două baze ale trunchiului de piramidă. De regulă, înălțimea trunchiului de piramidă regulată este considerată distanța dintre centrele cercurilor circumscrise celor două baze.

- Numim **înălțimea trunchiului de con** distanța dintre planele celor două baze ale trunchiului de con. De regulă, înălțimea trunchiului de con este considerată distanța dintre centrele cercurilor celor două baze.







Exersează!

3. În *Figura 9* $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă dreaptă cu baza pătrat. Dacă înălțimea prismei este de 10 cm, scrie în caiet toate segmentele din figură care au sigur lungimea egală cu 10 cm.

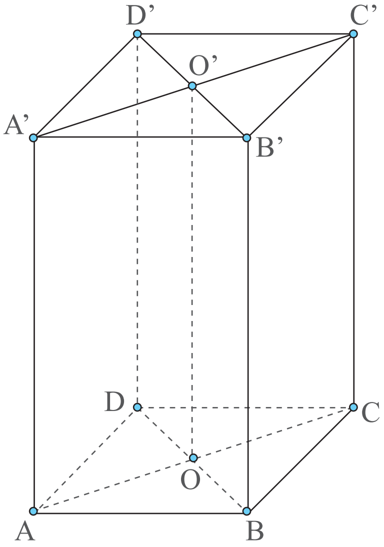


Figura 9 – Prismă dreaptă

4. O prismă dreaptă are fețele laterale pătrate cu latura de 5 cm. Câți centimetri are înălțimea acestei prisme?

5. Într-o prismă dreaptă cu baza pătrat, diagonala bazei este de 8 cm și diagonala prismei este de 10 cm. Câți centimetri are înălțimea acestei prisme?

6. Un cilindru circular drept are diametrul bazei și generatoarea de aceeași lungime. Dacă raza bazei este de 4 cm, câți centimetri are înălțimea acestui cilindru?

7. Desfășurarea pe un plan a suprafeței laterale a unui cilindru circular drept este un pătrat cu aria de 9 m^2.

Câți centimetri are înălțimea acestui cilindru?

8. Un trunchi de con circular drept are raza bazei mari de 8 cm, raza bazei mici de 4 cm și generatoarea de 5 cm.

Determină înălțimea acestui trunchi de con.

9. În trunchiul de piramidă regulată $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ cu baza hexagon din *Figura 10*, avem $AB = 8$ cm, $A'B' = 4$ cm și $AA' = 4\sqrt{2}$ cm.

Determină înălțimea acestui trunchi de piramidă.

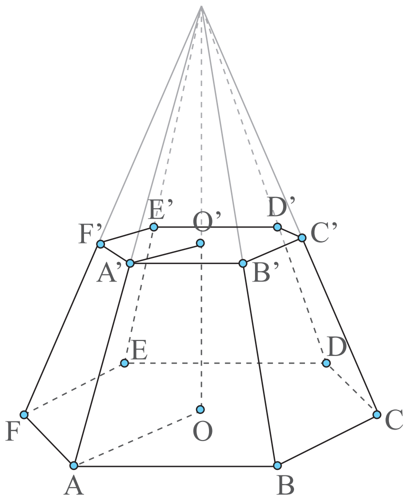


Figura 10 - Trunchi de piramidă regulată

10. În trunchiul de piramidă regulată $ABCDA'B'C'D'$, cu baza pătrat avem, $AB = 5\sqrt{2}$ cm, $A'B' = 2\sqrt{2}$cm și $AA' = 5$ cm.

Determină înălțimea acestui trunchi de piramidă.

11. O piramidă regulată $VABCD$, cu baza pătrat se secționează cu un plan paralel cu planul bazei. Latura bazei piramidei este de 18 cm, iar perimetrul pătratului de secțiune este egal cu 36 cm.

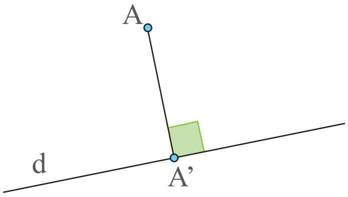
Dacă înălțimea piramidei este de 12 cm, determină înălțimea trunchiului de piramidă obținut.

12. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Știind că $AC = 6\sqrt{2}$ cm, determină distanța dintre planele (ADD') și (BCC').

4. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan

Amintește-ți!

1. Proiecția ortogonală a unui punct A pe o dreaptă d este punctul în care perpendiculara din punctul A pe dreaptă intersectează dreapta. Dacă $AA' \perp d$, cu $A' \in d$, atunci A' este proiecția punctului A pe dreapta d. Scriu: $A' = \text{pr}_d A$.



Folosind această definiție și cubul din *Figura 11*, răspunde la următoarele întebări:

a) Care este proiecția punctului B' pe dreapta AB?

b) Care este proiecția punctului A' pe dreapta AD?

c) Care este proiecția punctului B pe dreapta AB'?

d) Care este proiecția punctului A' pe dreapta $B'D'$?

e) Numește o dreaptă perpendiculară pe planul (ABC).

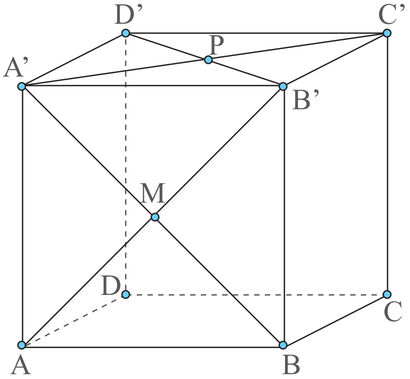


Figura 11 - Cub

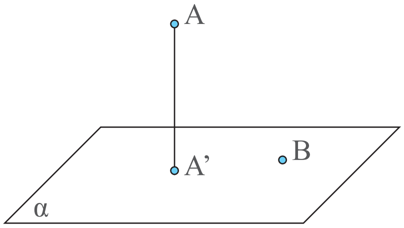
Important

• **Proiecția ortogonală a unui punct pe un plan** este punctul în care perpendiculara din acel punct pe plan intersectează planul.

Punctul A este exterior planului α. Dacă $AA' \perp \alpha$ $(A' \in \alpha)$, atunci A' este proiecția punctului A pe planul α.

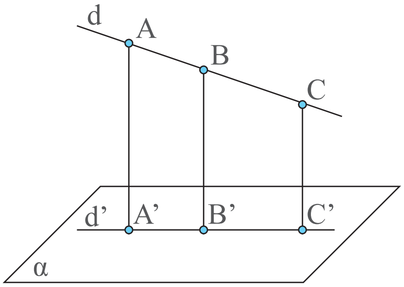
Scriu: $A' = \text{pr}_\alpha A$. Citesc: Punctul A' este proiecția pe planul α a punctului A.

Punctul B aparține planului α. Proiecția punctului B pe planul α este chiar punctul B $(B = \text{pr}_\alpha B)$.



• **Proiecția unei drepte pe un plan** este formată din proiecția tuturor punctelor dreptei pe plan.

• **Proiecția unei drepte pe un plan este o dreaptă, dacă dreapta nu este perpendiculară pe plan și un punct, dacă dreapta este perpendiculară pe plan.**



Justificare: Pe dreapta d, care nu este perpendiculară pe planul α, se consideră punctele A, B și C și fie punctele A', B' și C' proiecțiile lor pe planul α. Vom arăta că punctele A', B' și C' sunt coliniare.

Avem $AA' \perp \alpha$, $BB' \perp \alpha$ și $CC' \perp \alpha$, de unde $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ (perpendicularele pe același plan sunt paralele).

Acum $(AA',BB') = (d,A')$, iar $(AA',CC') = (d,A')$.

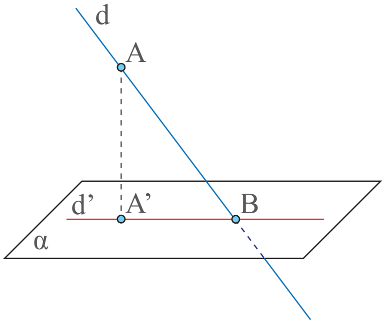
Punctele A', B' și C' sunt în planul α, dar și în planul (d,A'), deci $A', B', C' \in \alpha \cap (d,A') \Rightarrow A', B', C' \in d'$, prin urmare sunt coliniare.

• Pentru a obține proiecția unei drepte pe un plan este suficient să proiectăm două puncte ale dreptei pe acel plan.

Dacă $AA' \perp \alpha$ și B este punctul în care dreapta intersectează planul, atunci dreapta $A'B = d'$ este proiecția dreptei $AB = d$ pe planul α.

Scriu: $d' = \text{pr}_\alpha d$ sau $A'B = \text{pr}_\alpha AB$.

Citesc: „dreapta d' este proiecția dreptei d pe planul α” sau „dreapta $A'B$ este proiecția dreptei AB pe planul α”.

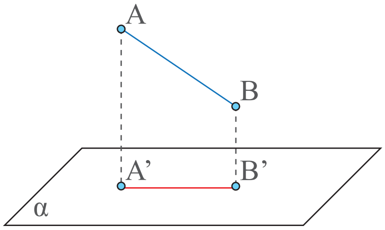


• Proiecția unui segment pe un plan se obține proiectând capetele segmentului pe acel plan. Proiecția este tot un segment sau un punct. Proiecția este un punct când dreapta din care face parte segmentul este perpendiculară pe plan.

Dacă $AA' \perp \alpha$ și $BB' \perp \alpha$, atunci segmentul $A'B'$ este proiecția segmentului AB pe planul α.

Scriu: $A'B' = \text{pr}_\alpha AB$.

Citesc: „segmentul $A'B'$ este proiecția segmentului AB pe planul α”.



Exersează!

2. În piramida $VABCD$ din *Figura 12*, VO este înălțime. Completează enunțurile de mai jos, pe caiet, astfel încât să obții enunțuri adevărate:

a) proiecția dreptei VA pe planul (ABC) este ....;
b) proiecția dreptei VB pe planul (ABD) este ....;
c) proiecția dreptei VP pe planul (ABC) este ....;
d) proiecția dreptei VO pe planul (ABC) este .... .

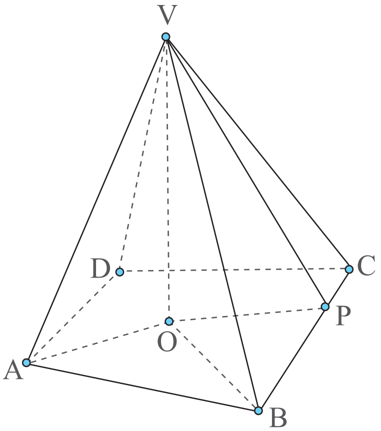


Figura 12 – Piramidă

3. Într-o piramidă $VABCD$, cu vârful în punctul V, VO este înălțime. Completează enunțurile de mai jos, pe caiet, astfel încât să obții enunțuri adevărate:

a) proiecția muchiei VD pe planul bazei este segmentul ....;
b) proiecția segmentului VM pe planul bazei, unde M este mijlocul muchiei BC este segmentul .... .

4. Portofoliu. În *Figura 13* $ABCDA'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic. Completează enunțurile de mai jos, astfel încât să obții enunțuri adevărate. Așază în portofoliul **Perpendicularitate în spațiu** răspunsurile tale.

a) proiecția dreptei $A'B'$ pe planul (ABC) este ....;
b) proiecția dreptei $B'C'$ pe planul (ABC) este ....;
c) proiecția dreptei AD pe planul (BCC') este ....;
d) proiecția dreptei AD' pe planul (ABC) este ....;
e) proiecția dreptei CC' pe planul (ABC) este ....;
f) proiecția dreptei AC' pe planul (ABC) este ....;
g) proiecția dreptei DB' pe planul (ADD') este ....;
h) proiecția dreptei $A'D$ pe planul (BCC') este .... .

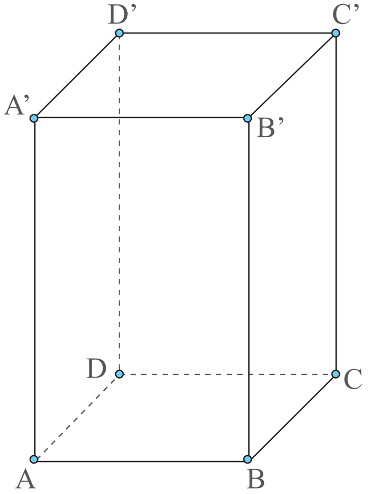


Figura 13 – Paralelipiped dreptunghic

5. Unghiul dintre o dreaptă și un plan, aplicație: lungimea proiecției unui segment

Observă și descoperă!

1. Decupează din hârtie două triunghiuri ABC și MNP astfel încât $AB = MN$ și $BC = NP$. Suprapune cele două triunghiuri astfel încât vârful A să se suprapună cu vârful M și vârful B cu vârful N.

Dacă $AC > MB$, cum sunt unghiurile ABC și MNP?

2. În *Figura 14* dreapta AB este perpendiculară pe planul α, iar dreapta BC este inclusă în planul α.

a) Stabilește dacă triunghiul ABC este dreptunghic.

b) Care dintre laturile AB și AC ale triunghiului ABC este mai mare?

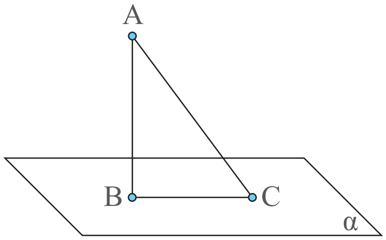


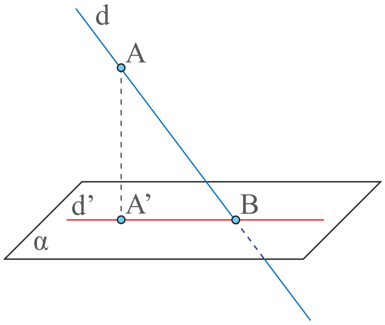
Figura 14 – Drepte în plan

Important

• **Unghiul dintre o dreaptă și un plan** este unghiul format de dreaptă și proiecția ei pe plan.

Dacă d' este proiecția dreptei d pe planul α, atunci unghiul dintre dreapta d și planul α este unghiul dintre dreapta d și dreapta d'.

Scriu: $\sphericalangle(d,\alpha) = \sphericalangle(d,d')$.

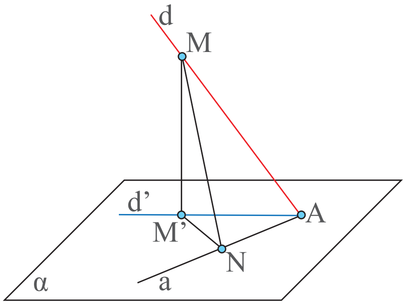


Exemplu: În figura alăturată dreapta $A'B$ este proiecția pe planul α a dreptei AB. $\sphericalangle(AB,\alpha) = \sphericalangle(AB,A'B) = \sphericalangle ABA'$.

• **Dacă dreapta este paralelă cu planul**, atunci unghiul dintre dreaptă și plan este unghiul nul.

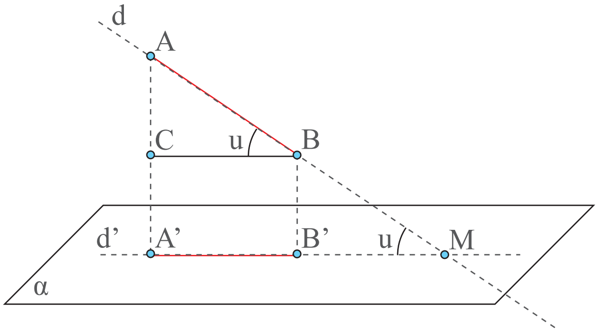
• Unghiul format de dreapta d cu proiecția ei pe planul α este cel mai mic unghi pe care dreapta d îl face cu o dreaptă din planul α.

Justificare: În figura alăturată d' este proiecția dreptei d pe planul α și a este o dreaptă oarecare din planul α. Vom arăta că $\sphericalangle(d,d')$ este mai mic decât $\sphericalangle(d,a)$. Se consideră M un punct pe dreapta d, M' proiecția lui M pe planul α și punctul N pe dreapta a astfel încât $AN = AM'$, unde $\{A\} = d \cap \alpha$. Atunci triunghiurile AMM' și AMN au două perechi de laturi congruente (AM este latură comună și $AN = AM'$). Pe de altă parte, dacă $MM' \perp \alpha$, atunci $MM' < MN$. Așadar, $\widehat{MAM'} < \widehat{MAN}$.



- Unghiul format de un segment AB cu un plan α este unghiul format de dreapta AB cu planul α.

- Dacă u este măsura unghiului dintre segmentul AB și planul α ($0° < u < 90°$), atunci între lungimea segmentului AB și lungimea proiecției sale $A'B'$ pe planul α există relația: $A'B' = AB \cdot \cos u$.



Justificare: Considerăm $AA' \perp \alpha$ și $BB' \perp \alpha$. Atunci $A'B' = \mathrm{pr}_{\alpha}AB$.

Deoarece $0° < u < 90°$ dreapta AB intersectează planul α în punctul M, iar dreapta $A'B'$ este proiecția dreptei AB pe planul α. Atunci $\sphericalangle AMA' = u$.

În planul determinat de dreptele AB și $A'B'$, prin punctul B construim $BC \parallel A'B'$, $C \in AA'$.

Atunci $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AMA' = u$ (sunt unghiuri corespondente).

Din $BC \parallel A'B'$ și $AA' \parallel BB'$ (ambele sunt perpendiculare pe planul α) rezultă că $BCA'B'$ este dreptunghi și deci $A'B' = BC$.

Din triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle C = 90°$), avem $\cos u = \dfrac{BC}{AB}$, de unde obținem $BC = AB \cdot \cos u$. Cum $A'B' = BC$, rezultă $A'B' = AB \cdot \cos u$.

- Dacă $AB \perp \alpha$, atunci $A'B' = 0$.

- Dacă $AB \parallel \alpha$, atunci $A'B' = AB$.

Exersează!

3. În *Figura 15*, $VABCD$ este o piramidă cu baza pătrat, VO este înălțime, iar punctul M este mijlocul muchiei BC. Scrie în caiet și completează enunțurile de mai jos, astfel încât să obții enunțuri adevărate:

a) unghiul dintre dreapta VM și planul (ABC) este unghiul ....;

b) unghiul dintre muchia VA și planul bazei este unghiul ....;

c) dacă $VO = 6\sqrt{3}$ cm și $AV = 12$ cm, determină măsura unghiului dintre dreapta AV și planul bazei;

d) dacă $VO = 4$ cm și $VM = 8$ cm, determină măsura unghiului dintre dreapta VM și planul bazei.

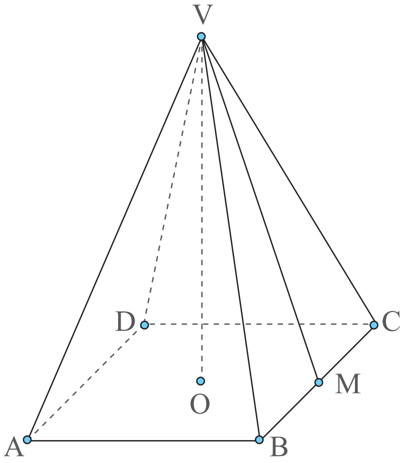


Figura 15 – Piramida cu baza pătrat

4. Portofoliu. În *Figura 16*, $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă dreaptă cu baza pătrat. Completează enunțurile de mai jos, astfel încât să obții enunțuri adevărate. Așază în portofoliul **Perpendicularitate în spațiu** răspunsurile tale.

a) unghiul dintre dreapta AD' și planul (ACD) este unghiul ....;

b) unghiul dintre dreapta BD' și planul (ABC) este unghiul ....;

c) unghiul dintre dreapta BD' și planul (BCC') este unghiul ....;

d) unghiul dintre dreapta BD' și planul (ABB') este unghiul ....;

e) dacă $BD' = 12$ cm și $BC = 6$ cm, determină măsura unghiului dintre dreapta BD' și planul ADD'.

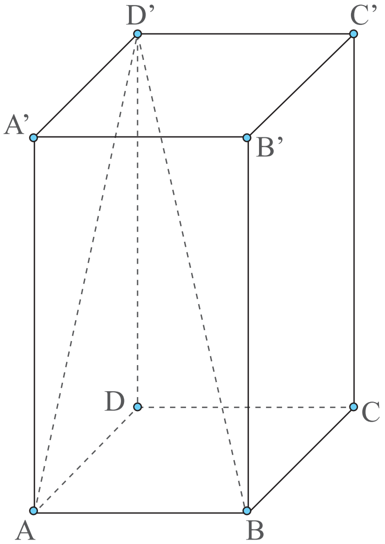


Figura 16– Prismă dreaptă cu baza pătrat

5. Segmentul AB are lungimea de 12 cm și formează cu un plan α un unghi cu măsura u. Determină lungimea proiecției segmentului AB în fiecare dintre cazurile următoare:

a) $u = 30°$; b) $u = 45°$; c) $u = 60°$; d) $u = 0°$.

6. Într-o piramidă regulată cu baza triunghi echilateral, o muchie laterală formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 30°. Dacă muchia laterală este de 18 cm, determină:

a) înălțimea piramidei;

b) muchia bazei piramidei.

7. Într-o piramidă regulată cu baza pătrat, o muchie laterală formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 45°. Dacă muchia laterală este de 8 cm, determină:

a) înălțimea piramidei;

b) muchia bazei piramidei.

8. Generatoarea unui con circular drept formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 60°. Dacă generatoarea conului este de 12 cm, determină:

a) înălțimea conului;

b) lungimea cercului de la baza conului.

9. Într-o prismă dreaptă cu baza pătrat diagonala prismei formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 60°. Știind că diagonala este de 10 cm, determină:

a) înălțimea prismei;

b) latura bazei prismei.

10. Un stâlp pentru o turbină eoliană este ancorat cu trei cabluri metalice, ca în *Figura 17*. Unul dintre cabluri trebuie schimbat. Se știe că de la piciorul stâlpului până la punctul unde cablul este legat de pământ (BC, BD sau BE) sunt 4 m, iar unghiul format de un cablu cu planul terenului are măsura de 45°. La magazin se pot comanda cabluri a căror lungime se exprimă prin numere naturale. Ce lungime trebuie să aibă cablu comandat la magazin, care poate înlocui cablul care trebuie schimbat ?

Figura 17 – Stâlp pentru turbina eoliană

11. Planul α intersectează segmentul AB în punctul O astfel încât $\dfrac{AO}{BO} = \dfrac{2}{3}$. Dacă $AB = 60$ cm și unghiul format de dreapta AB cu planul α are măsura de 30°, determină lungimea proiecției segmentului AB pe planul α.

6. Unghi diedru, unghi plan corespunzător diedrului; unghiul a două plane; plane perpendiculare; secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile studiate

Observă și descoperă!

1. În *Figura 18* sunt două semiplane mărginite de aceeași dreaptă.

a) Folosește o carte sau un caiet pentru a ilustra situația din figură.

b) Identifică, în sala de clasă, situații asemănătoare cu cea din figură.

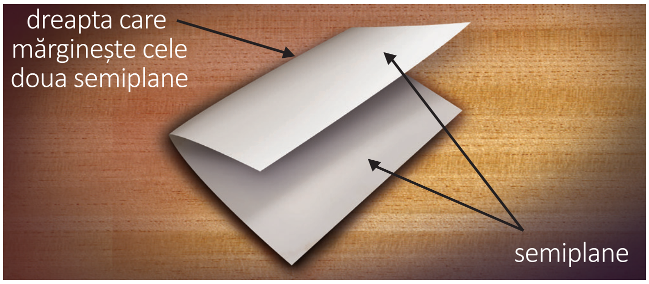
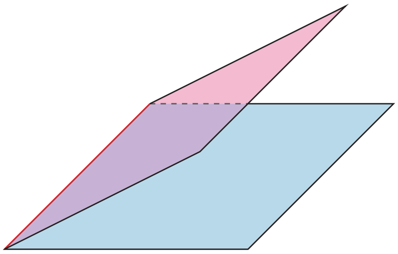


Figura 18 – Două semiplane

Important

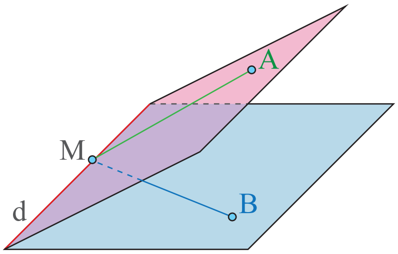
- **Unghiul diedru** este figura geometrică formată de două semiplane mărginite de aceeași dreaptă.



- Elementele unghiului diedru:
  - ▷ **Fețele diedrului** sunt cele două semiplane.
  - ▷ **Muchia diedrului** este dreapta care mărginește cele două semiplane.

- Măsura unghiului diedru este dată de măsura **unghiului plan corespunzător diedrului**.

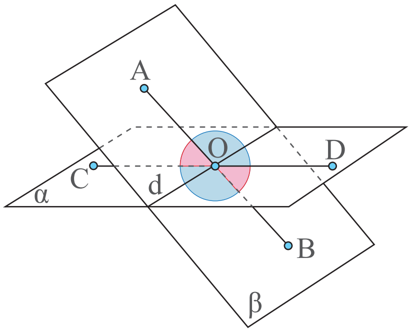
- Unghiul plan corespunzător diedrului se obține astfel:
  - ▷ Se consideră un punct pe muchia diedrului.
  - ▷ Prin punctul ales se construiesc perpendiculare pe muchia diedrului în cele două semiplane care reprezintă fețele diedrului.
  - ▷ Unghiul dintre aceste semidrepte este unghiul plan corespunzător diedrului.



$$\left.\begin{array}{l} M \in d \\ MA \perp d \\ MB \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AMB} \text{ este unghiul plan corespunzător diedrului}$$

- Două plane concurente formează patru unghiuri diedre.

- **Unghiul a două plane** este este unghiul plan ascuțit corespunzător diedrului.

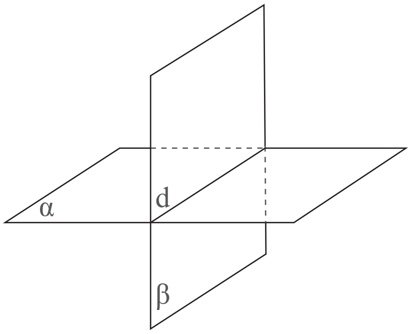


Justificare. Dacă $\alpha \cap \beta = d$, $AB \perp d$ și $CD \perp d$ și O este punctul de intersecția a dreptelor AB și CD, atunci cele patru unghiuri plane corespunzătoare celor patru diedre sunt $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle COB$, $\sphericalangle BOD$ și $\sphericalangle DOA$. Fiind unghiuri opuse la vârf, două câte două sunt congruente; $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$ și $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOC$. Dacă măsura $\sphericalangle AOC$ este cea mai mică dintre măsurile celor patru unghiuri, atunci măsura unghiului dintre planele α și β este măsura unghiului AOC.

Scriu: $\sphericalangle(\alpha,\beta) = \sphericalangle AOC$. Citesc: „măsura unghiul dintre planele α și β este măsura unghiul AOC”

- Numim **plane perpendiculare** două plane care au măsura unghiului dintre ele egală cu 90°.

Scriu: $\alpha \perp \beta$. Citesc: „planul α este perpendicular pe planul β”.

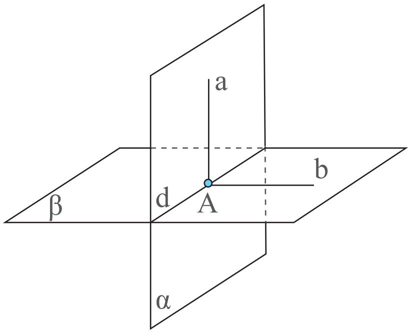


- Cum dovedesc că două plane sunt perpendiculare?

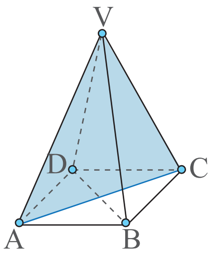
Dacă o dreaptă dintr-un plan este perpendiculară pe un alt plan, atunci planele sunt perpendiculare.

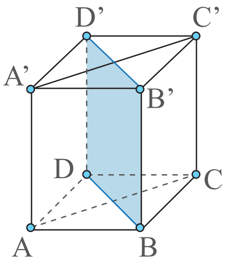
$$\left.\begin{array}{l} a \subset \alpha \\ a \perp \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

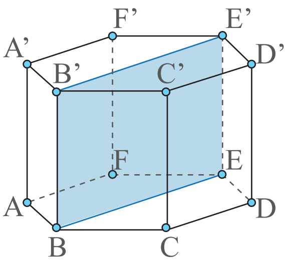
Justificare: Considerăm $d = \alpha \cap \beta$. Dacă $a \perp \beta$ și $d \subset \beta$ rezultă $a \perp d$. Dacă A este punctul de intersecție a dreptelor a și d, atunci construim în planul β perpendiculara pe d în punctul A și o notăm b. Avem $a \perp d$ și $b \perp d$, adică unghiul dintre planele α și β este unghiul dintre dreptele a și b. Cum $a \perp \beta$ și $b \subset \beta$ rezultă $a \perp b$, adică unghiul dintre dreptele a și b este de 90°. Prin urmare planele α și β sunt perpendiculare.

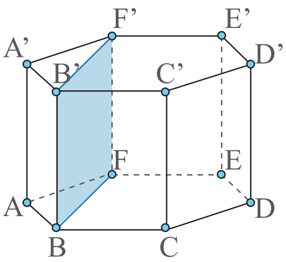


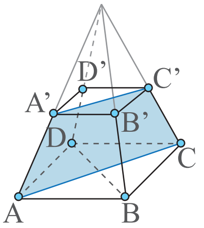
- **Secțiunea diagonală** într-o piramidă, prismă sau trunchi de piramidă este secțiunea obținută cu un plan perpendicular pe planul bazei care conține dreapta determinată de o diagonală a bazei.



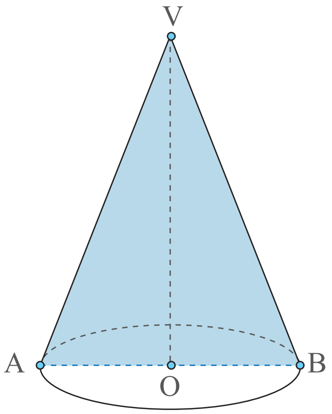


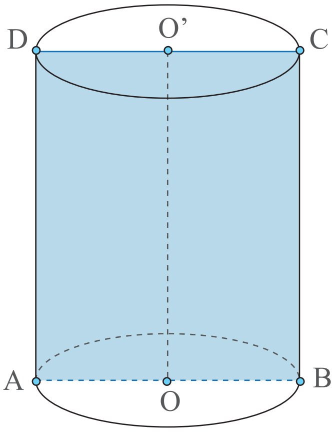


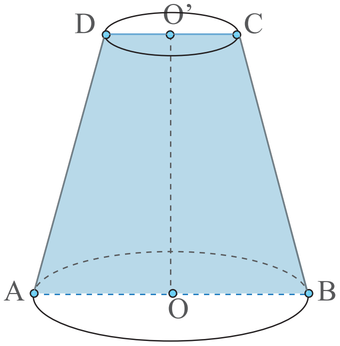




• **Secțiunea axială** într-un cilindru circular drept, con circular drept sau trunchi de con circular drept este secțiunea obținută cu un plan perpendicular pe planul bazei care conține dreapta determinată de vârf și centrul bazei sau de centrele bazelor.







Exersează!

2. În *Figura 19*, triunghiul EDC, dreptunghic în C, și dreptunghiul $ABCD$ sunt situate în plane diferite.

a) Identifică un unghi plan al diedrului determinat de semiplanele DCA și DCE.

b) Demonstrează că $DC \perp (BEC)$.

c) Identifică un unghi plan al diedrului determinat de semiplanele ABC și ABE.

3. Se consideră prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghi echilateral.

a) Determină măsura unghiul dintre planul unei fețe laterale și planul unei baze.

b) Determină măsura unghiului dintre planele a două fețe laterale.

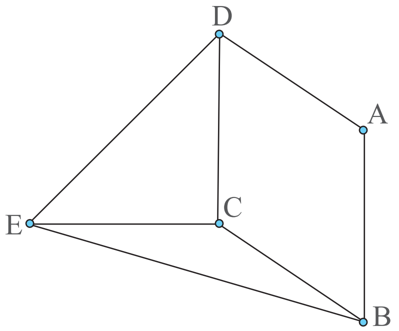


Figura 19 – Triunghi și dreptunghi în plane diferite

4. Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi echilateral cu aria egală cu $9\sqrt{3}$ cm^2. Determină înălțimea acestui con.

5. Portofoliu.

a) Desenează în caiet un cub $ABCDA'B'C'D'$.

b) Construiește un unghi plan al diedrului determinat de semiplanele ACD și ACD'.

c) Determină sinusul unghiului dintre planele (ACD) și (ACD').

Așază în portofoliul **Perpendicularitate în spațiu** desenele tale.

6. Dreptunghiurile $ABCD$ și $ABEF$ sunt situate în plane diferite.

a) Demonstrează că $EF \perp (BEC)$.

b) Dacă planele (ADC) și (ABF) sunt perpendiculare, determină măsura unghiului FAD.

7. Secțiunea diagonală a piramidei regulate $VABCD$ cu baza pătrat și vârful V este un triunghi echilateral cu latura de $6\sqrt{2}$ cm. Determină înălțimea piramidei și muchia bazei.

8. Triunghiurile dreptunghice isoscele ABC ($\sphericalangle C = 90°$) și ABD ($\sphericalangle D = 90°$) sunt situate în plane diferite. Latura AB este de 6 cm, iar distanța dintre punctele C și D este de $3\sqrt{2}$ cm. Demonstrați că $(ABC) \perp (ABD)$.

7. Teorema celor trei perpendiculare. Calculul distanței de la un punct la o dreaptă. Calculul distanței de la un punct la un plan. Calculul distanței dintre două plane paralele

Figura 20

Observă și descoperă!

1. *Figura 21* este o schiță a imaginii din *Figura 20*. Dacă privim echerul ca pe un triunghi dreptunghic, atunci dreapta d este cateta pe care sunt scriși centimetri, dreapta a este creionul, AB este cateta situată pe masă, iar MB este ipotenuza. Creionul este astfel așezat încât formează cu cateta de pe masă un unghi drept. Observă, cu atenție, cele două imagini și răspunde la următoarele întrebări.

a) Dacă dreapta d este perpendiculară pe planul α, pot afirma că dreapta d este perpendiculară pe dreapta a? Justifică răspunsul dat.

b) Dacă dreapta AB este perpendiculară pe dreapta a pot afirma că $a \perp (ABM)$? Justifică răspunsul dat.

c) Este dreapta MB perpendiculară pe dreapta a? Justifică răspunsul dat.

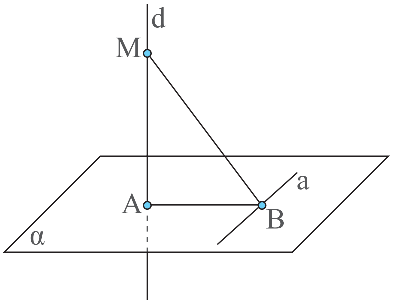


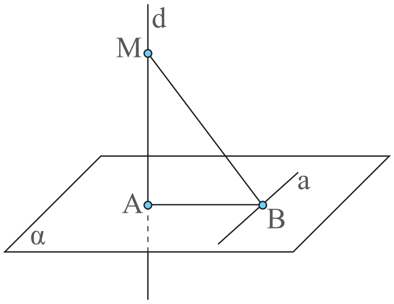
Figura 21

Important

• Dacă o dreaptă (d) este perpendiculară pe un plan (α) și din piciorul ei construim o dreaptă (AB) perpendiculară pe o dreaptă (a) din plan, atunci dreapta determinată de orice punct (M) al perpendicularei pe plan și piciorul perpendicularei pe dreapta din plan (B) este perpendiculară pe dreapta din plan.

(Teorema celor trei perpendiculare)

$$\left.\begin{array}{l} d \perp \alpha \\ AB \perp a \\ a \subset \alpha \\ M \in d \end{array}\right\} \Rightarrow MB \perp a$$



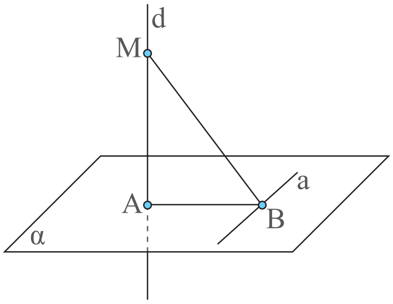
Justificare:

Din $d \perp \alpha$ și $a \subset \alpha$ rezultă $d \perp a$. Din ipoteză avem $a \perp AB$ și atunci $a \perp (ABM)$ (dreapta a este perpendiculară pe două drepte concurente din plan). Din $a \perp (ABM)$ și $MB \subset (ABM)$ rezultă $a \perp MB$.

• Dacă o dreaptă d este perpendiculară pe un plan α în punctul A și dintr-un punct al ei (M) construiesc o dreaptă perpendiculară pe o dreaptă a din plan (MB), atunci dreapta care unește picioarele celor două perpendiculare (AB) este perpendiculară pe dreapta a din plan.

(Reciproca I a teoremei celor trei perpendiculare)

$$\left.\begin{array}{l} d \perp \alpha \\ M \in d \\ MB \perp a \\ a \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp a$$



Justificare: Din $d \perp \alpha$ și $a \subset \alpha$ rezultă $d \perp a$. Din ipoteză avem $a \perp BM$ și atunci $a \perp (ABM)$ (dreapta a este perpendiculară pe două drepte concurente din plan). Din $a \perp (ABM)$ și $AB \subset (ABM)$ rezultă $a \perp AB$.

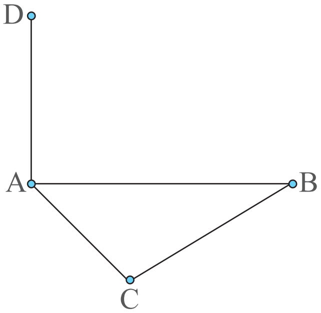
Comentariu: Reciproca I a teoremei celor trei perpendiculare îmi dă posibilitatea, în anumite situaţii, să determin distanța de la un punct la o dreaptă.

Exemplu: Din vârful A al triunghiului ABC se ridică perpendiculara AD pe planul acestuia astfel încât $AD = 3$ cm. Dacă înălțimea din A a triunghiului ABC are lungimea de $3\sqrt{3}$ cm, determină distanța de la punctul D la latura BC.

Soluție:

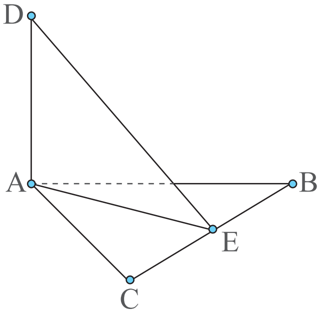
Cum gândesc: Pas 1. Realizez o figură corespunzătoare enunțului.

Cum scriu:



Pas 2. Distanța de la un punct la o dreaptă este distanța dintre punct și proiecția lui pe dreaptă (se măsoară pe perpendiculara din acel punct pe dreaptă). Construiesc perpendiculara din D pe dreapta BC.

Construiesc $DE \perp BC$, unde $E \in BC \Rightarrow DE$ este distanța cerută.



Pas 3. Nu știu unde se află punctul E pe dreapta BC. Aici intervine teorema celor trei perpendiculare, mai precis reciproca I.

Observ că AE este înălțimea din A a triunghiului ABC.

$$\left.\begin{array}{l} DA \perp (ABC) \text{ (din ipoteză)} \\ DE \perp BC \text{ (din construcție)} \\ BC \subset (ABC) \end{array}\right\} \xrightarrow{R1T3P} AE \perp BC$$

Pas 4. Pentru a determina lungimea segmentului DE voi folosi teorema lui Pitagora. Trebuie să identific un triunghi dreptunghic.

Din $DA \perp (ABC)$ și $AE \subset (ABC)$ rezultă $DA \perp AE$, adică $\triangle DAE$ este dreptunghic în A.

Pas 5. În triunghiul DAE cunosc $DA = 3$ cm și $AE = 3\sqrt{3}$ cm.

Aplic teorema lui Pitagora în triunghiul DAE.

În $\triangle DAE \xrightarrow{T.P.} DE^2 = DA^2 + AE^2$.

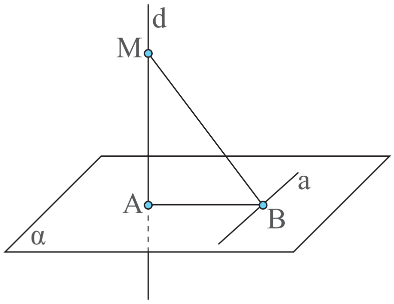
$DE^2 = 3^2 + (3\sqrt{3})^2 = 9 + 27 = 36$

$DE = \sqrt{36} = 6$ cm.

• Dacă o dreaptă MA este perpendiculară pe o dreaptă AB dintr-un plan, dreapta AB este perpendiculară pe o dreaptă a din plan și MB este perpendiculară pe dreapta a din plan, atunci dreapta MA este perpendiculară pe plan.

(Reciproca a II-a a teoremei celor trei perpendiculare)

$$\left.\begin{array}{l} MA \perp AB \\ AB \subset \alpha \\ AB \perp a \\ a \subset \alpha \\ MB \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow MA \perp \alpha$$



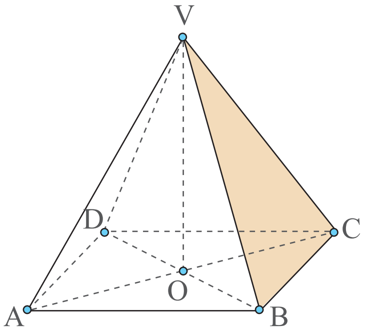
Justificare: Din $a \perp AB$ și $a \perp MB$ rezultă că $a \perp (ABM)$ (dreapta a este perpendiculară pe două drepte concurente din plan). De aici și din $AM \subset (ABM)$ rezultă $AM \perp a$. Din $AM \perp a$ și $AM \perp AB$ rezultă $AM \perp \alpha$ (dreptele a și AB sunt concurente, incluse în planul α).

Comentariu: Reciproca a II-a a teoremei celor trei perpendiculare îmi dă posibilitatea, în anumite situaţii, să determin distanța de la un punct la un plan.

Exemplu: Se consideră piramida regulată $VABCD$, cu baza pătrat de latură $AB = 6$ cm și înălțime $VO = 4$ cm. Determină distanța de la punctul O la planul (VBC).

Cum gândesc: Pas 1. Realizez un desen corespunzător enunțului.

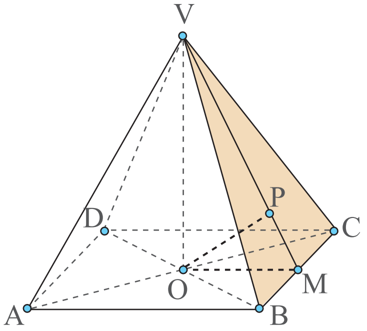
Cum scriu:



Pas 2. Trebuie construită perpendiculara din punctul O pe planul VBC. Mă aștept ca această perpendiculară să cadă pe înălțimea din V a triunghiului VBC.

Construiesc $VM \perp BC$ și $OP \perp VM$.

$$\left.\begin{array}{l} VO \perp (ABC) \\ VM \perp BC \end{array}\right\} \xRightarrow{R1T3P} OM \perp BC$$



Pas 3. Aici intervine reciproca a II-a a teoremei celor trei perpendiculare.

$$\left.\begin{array}{l} OP \perp VM \text{ (din construcție)} \\ PM \perp BC \text{ (din construcție)} \\ OM \perp BC \text{ (din demonstrație)} \end{array}\right\} \xRightarrow{R2T3P} OP \perp (VBC), \text{ adică } OP \text{ este distanța cerută.}$$

Pas 4. OP poate fi privit ca înălțime în triunghiul MOV, $OP \perp VM$, iar triunghiul MOV este dreptunghic, $VO \perp (ABC)$.

În $\triangle MOV$, OP este înălțime, $OP \perp VM$. Din $VO \perp (ABC)$ și $OM \subset (ABC)$ rezultă $VO \perp OM$, deci $\triangle MOV$ este un triunghi dreptunghic în O.

Pas 5. Pot afla lungimea segmentului OP cu relația $h_{\triangle \text{ dreptunghic}} = \dfrac{c_1 \cdot c_2}{ip}$

În $\triangle ABC$, OM este linie mijlocie, rezultă $OM = 3$ cm ($AB = 6$ cm).
Din ipoteză $VO = 4$ cm.

În $\triangle MOV \xRightarrow{T.P.} VM^2 = VO^2 + OM^2$; $VM^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$
$VM = \sqrt{25} = 5$ cm
În $\triangle MOV$ avem $OP = \dfrac{VO \cdot MO}{VM}$ rezultă $OP = \dfrac{3 \cdot 4}{5} = \dfrac{12}{5} = 2{,}4$ cm.

Exersează!

2. În *Figura 22* se știe că triunghiul ABC este dreptunghic în A, $ABDE$ este dreptunghi și $(ABC) \perp (ABD)$. a) Demonstrează că $AC \perp (ABD)$; b) Arată că $CE \perp ED$.

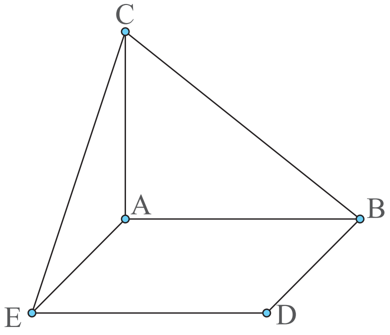


Figura 22

3. În vârful A al rombului $ABCD$ se ridică perpendiculara AP pe planul acestuia. Dacă O este punctul de intersecție a diagonalelor rombului, arată că $PO \perp BD$.

4. În vârful B al triunghiului ABC se ridică perpendiculara BD pe planul acestuia. Dacă $DE \perp AC$, demonstrează că BE este înălțimea din B a triunghiului ABC.

5. Triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$ are latura BC într-un plan α și vârful A exterior planului. Notăm cu A' proiecția punctului A pe planul α.

a) Demonstrează că triunghiul $A'BC$ este isoscel.

b) Dacă punctul M este mijlocul segmentului BC și $A'P \perp AM$, demonstrează că $A'P \perp (ABC)$.

6. Pe planul triunghiului isoscel ABC se ridică perpendiculara PA, cu $PA = 6$ cm. Se știe că $AB = AC = 13$ cm și $BC = 10$ cm.

a) Determină distanța de la punctul P la latura BC.

b) Calculează aria triunghiului PBC.

7. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC , $\sphericalangle A = 90°$, cu $AB = 4$ cm și $AC = 4\sqrt{3}$ cm, se ridică perpendiculara MO, unde O este mijlocul ipotenuzei. Se știe că $MA = 4\sqrt{2}$ cm.

a) Arată că $MO = 4$ cm.

b) Determină distanța de la punctul M la latura AC.

8. Se consideră pătratul $ABCD$, cu latura de 8 cm și $PD \perp (ABC)$, astfel încât $PD = 12$ cm. Determină:

a) distanța de la punctul P la latura AB;

b) distanța de la punctul P la latura BC;

c) distanța de la punctul P la latura AC.

9. Problemă rezolvată:

Triunghiurile ABC și ABD sunt triunghiuri isoscele congruente, $AC = AB = AD = 10$ cm și $BC = BD = 12$ cm.

Se consideră $AO \perp (BCD)$, unde O este mijlocul segmentului CD și $AO = 2\sqrt{7}$ cm.

a) Determină distanța de la punctul O la dreapta AB.

b) Demonstrează că $DO \perp (AOB)$.

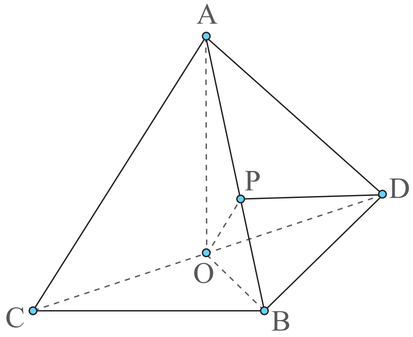
c) Dacă $OP \perp AB$, unde $P \in AB$, demonstrează că $DP \perp AB$.

d) Determină distanța de la punctul D la dreapta AB.

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Realizez un desen corespunzător enunțului.

Cum scriu:



Pas 2. a) Distanța de la un punct la o dreaptă se măsoară pe perpendiculara din punct pe dreaptă.

Consider $OP \perp AB$, unde $P \in AB$. Atunci OP este distanța cerută.

Pas 3. Încadrez segmentul OP în triunghiul AOB în care OP este înălțime. Mai mult, triunghiul AOB este dreptunghic.

Din $AO \perp (BCD)$ și $OB \subset (BCD)$ rezultă $AO \perp OB$, adică $\triangle AOB$ este dreptunghic în O.

Pas 4. Pot determina lungimea lui OP cu relația $h_{\triangle \text{ dreptunghic}} = \dfrac{c_1 \cdot c_2}{ip}$.

Cunosc AB și AO. Îmi trebuie OB, pe care o determin cu teorema lui Pitagora.

În $\triangle AOB(\sphericalangle O = 90°)$, din teorema lui Pitagora avem,

$$OB^2 = AB^2 - AO^2 \Rightarrow BO^2 = 10^2 - \left(2\sqrt{7}\right)^2 \Rightarrow BO^2 = 72 \Rightarrow BO = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Obţinem $OP = \dfrac{AO \cdot BO}{AB} \Rightarrow OP = \dfrac{2\sqrt{7} \cdot 6\sqrt{2}}{10} = \dfrac{6\sqrt{14}}{5}$ cm.

Pas 5. b) Trebuie demonstrat că OD este perpendiculară pe două drepte concurente din planul (AOB). Voi arăta că este perpendiculară pe AO și BO.

Din $AO \perp (BCD)$ și $DO \subset (BCD)$ rezultă $AO \perp DO$.

Triunghiul BCD este isoscel, $BC = BD$, iar O este mijlocul laturii DC.

Rezultă BO este și înălțime, deci $DO \perp BO$.

Din $AO \perp DO$ și $DO \perp BO$ rezultă $DO \perp (AOB)$.

Pas 6. c) Voi folosi teorema celor trei perpendiculare. Am nevoie de o dreaptă care trece prin D, care este perpendiculară pe un plan care conține dreapta AB, dar și de o dreaptă din acest plan care este perpendiculară pe AB.

Din punctul b) avem $DO \perp (AOB)$.

Din punctul a) avem $OP \perp AB$. Cum $AB \subset (AOB) \xrightarrow{T3P} DP \perp AB$.

Pas 7. d) Din punctul anterior știu că $DP \perp AB$, deci DP este distanța cerută.

Încadrez segmentul DP în triunghiul DOP care este dreptunghic în O și trebuie să determin lungimea lui OD.

Din punctul c) $DP \perp AB \Rightarrow DP$ este distanța cerută.

Din $DO \perp (AOB)$ și $OP \subset (AOB) \Rightarrow DO \perp OP$, deci $\triangle DOP$ este dreptunghic.

Triunghiul BCD este isoscel, $BC = BD$, iar O este mijlocul laturii DC. Rezultă BO este și înălțime, deci $DO \perp BO \Rightarrow \triangle BOD$ este dreptunghic și din teorema lui Pitagora avem:

$$OD^2 = BD^2 - BO^2 \Rightarrow OD^2 = 12^2 - \left(6\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow OD^2 = 72 \Rightarrow OD = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ cm.}$$

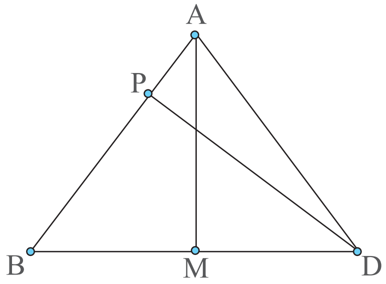
Acum, din teorema lui Pitagora în triunghiul DOP avem $DP^2 = DO^2 + OP^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow DP^2 = (6\sqrt{2})^2 + \left(\frac{6\sqrt{14}}{5}\right)^2 \Rightarrow DP^2 = \frac{2\,304}{25} \Rightarrow DP = \sqrt{\frac{2\,304}{25}} = \frac{48}{5} = 9{,}6 \text{ cm.}$$

Observație: Punctul d) se putea rezolva independent de punctele a), b) și c).

Cum gândesc: Pas 1. Distanța de la punctul D la dreapta AB este înălțime în triunghiul ABD. Triunghiul ABD este isoscel și îi cunosc toate laturile. Scot separat triunghiul. În aceste condiții este ușor de determinat înălțimea corespunzătoare bazei.

Cum scriu:



În triunghiul ABD construim $AM \perp BD$, atunci, în triunghiul dreptunghic AMD avem $AD = 10$ cm și $DM = 6$ cm. Rezultă, din teorema lui Pitagora $AM^2 = AD^2 - DM^2 \Rightarrow AM^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow AM = \sqrt{64} = 8$ cm.

Pas 2. Pentru determinarea lui DP scriu aria triunghiului ABD în două moduri.

$$\mathcal{A}_{ABD} = \frac{BD \cdot AM}{2} \text{ și } \mathcal{A}_{ABD} = \frac{AB \cdot DP}{2}, \text{ deci } BD \cdot AM = AB \cdot DP \Rightarrow$$
$$\Rightarrow DP = \frac{BD \cdot AM}{AB} \Rightarrow DP = \frac{12 \cdot 8}{10} = \frac{48}{5} = 9{,}6 \text{ cm}.$$

10. Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara MO, unde O este centrul pătratului și $MO = 6$ cm. Dacă distanța de la M la dreapta BC este egală cu $2\sqrt{13}$ cm, determină:
a) distanța de la punctul M la latura AB; b) distanța de la punctul M la latura CD;
c) distanța de la punctul M la planul (MBC); d) distanța de la punctul M la planul (MAB);
e) distanța de la punctul M la planul (MCD).

11. Se consideră punctul P, mijlocul muchiei $D'C'$ a cubului $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 6$ cm.
a) Determină distanța de la punctul P la dreapta AB. b) Calculează aria triunghiului PAB.
c) Determină distanța de la punctul A la planul $(BB'D')$.

12. Se consideră $VABCD$ o piramidă regulată, de vârf V, cu toate muchiile egale cu 8 cm. Determină distanța de la centrul bazei la o față laterală a piramidei.

13. Se consideră prisma dreaptă $ABCDEFGH$, cu baza pătrat, în care $AB = 6$ cm și $AE = 6\sqrt{2}$ cm. Determină: a) distanța de la punctul H la dreapta AC; b) distanța de la punctul D la planul (HAC).

14. Se consideră hexagonul regulat $ABCDEF$, cu latura de 5 cm. Pe planul acestuia se ridică perpendiculara MA, cu $MA = 12$ cm. Determină:
a) distanţele de la M la laturile hexagonului; b) distanța de la punctul E la planul (MAC).

15. Se consideră triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$ și D un punct ce nu aparține planului (ABC) astfel încât $AD \perp (ABC)$. Se știe că $AD = 10$ cm, $AB = 20$ cm și distanța de la A la planul (BCD) este egală cu $5\sqrt{3}$ cm.
a) Dacă punctul P este mijlocul laturii BC și $AM \perp DP$, $M \in DP$, demonstrează că $AM \perp (BCD)$.
b) Determină lungimea segmentului DP.
c) Dacă $CN \perp AB$, demonstrează că $CN \perp (ABD)$.
d) Determină distanța de la punctul C la planul (ABD).

16. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care punctul O este centrul feței $ABCD$, iar punctul P aparține diagonalei BD' astfel încât $CP \perp BD'$. Demonstrează că $OP \perp BD'$.

8. Recapitulare

1. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$. Determină:

a) $pr_{(ABC)}F$;
b) $pr_{(ABC)}D$;
c) $pr_{(AEH)}C$;
d) $pr_{(DBC)}AE$;
e) $pr_{(FBC)}AE$;
f) $pr_{(ABC)}AG$;
g) $pr_{(EFG)}AB$.

2. Se consideră un dreptunghi $ABCD$ și dreapta AM perpendiculară pe planul dreptunghiului.
a) Realizează un desen corespunzător enunțului.
b) Demonstrează că $MB \perp BC$.
c) Dacă $AB = AM$, determină măsura unghiului dintre planele (ABC) și (MBC).

3. În *Figura 23* $ABCD$ și $ABEF$ sunt pătrate și $BE \perp BC$.
a) Demonstrează că $BE \perp (ABC)$.
b) Determină măsura unghiului dintre planele (BED) și (FAB).
c) Demonstrează că planele (CAF) și (BED) sunt perpendiculare.

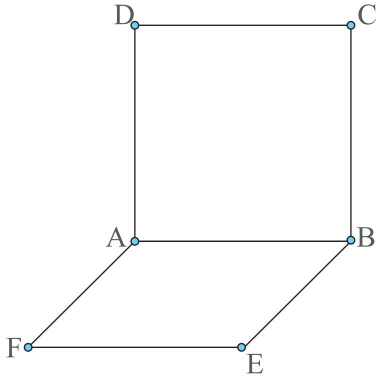


Figura 23

4. Pe planul rombului $ABCD$ cu latura de 12 cm și $\sphericalangle A = 60°$, se ridică perpendiculara SA, astfel încât $SA = 6$ cm. Determină:
a) distanța de la punctul S la dreapta BD;
b) distanța de la punctul S la dreapta BC.

5. O cutie de carton are forma unei prisme drepte $ABCDA'B'C'D'$, cu baza pătrat, în care $AB = 4$ cm și $AA' = 4\sqrt{14}$ cm. Se poate introduce, în această cutie, un pix cu lungimea de 16,5 cm? Justifică răspunsul dat.

6. În *Figura 24* este un stâlp ancorat cu un cablu metalic.
a) Ce elemente ar putea fi măsurate pentru a determina lungimea cablului metalic ?
b) Dacă $BC = 3$ m și unghiul format de cablu metalic cu planul terenului este egal cu 60°, determină lungimea cablului metalic.

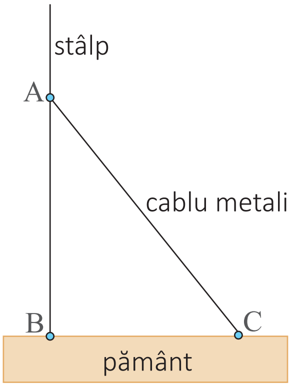


Figura 24

7. O piramidă regulată $VABCD$, cu baza pătrat se intersectează cu un plan paralel cu planul bazei prin mijlocul înălțimii VO. Determină aria secțiunii, știind că latura bazei piramidei este de 18 cm.

8. Un con circular drept cu raza bazei egală cu 15 cm se intersectează cu un plan paralel cu planul bazei, construit la $\frac{3}{5}$ din înălțime față de bază. Determină aria secțiunii.

9. Punctele A și B sunt de o parte și de alta a planului α, iar dreapta AB formează cu planul α un unghi cu măsura de 30°. Dreapta AB intersectează planul α în punctul C. Știind că $AC = 8$ cm și $BC = 6$ cm, determină lungimile proiecțiilor segmentelor AC, BC şi AB pe planul α.

10. Se consideră punctul M exterior planului α la distanță de 12 cm față de acesta, iar A și B două puncte în planul α. Știind că dreptele MA și MB formează cu planul α unghiuri de 45°, respectiv 30° și că $AB = 24$ cm, determină:

a) lungimile proiecțiilor segmentelor MA și MB pe planul α;

b) aria triunghiului MAB.

11. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu latura de 6 cm. Determină:
a) lungimea proiecției diagonalei AC' pe planul $(BB'C)$;
b) lungimea proiecției segmentului $B'D'$ pe planul (ABC').

12. Se consideră punctele necoplanare A, B, C și D astfel încât $AD \perp AB$, $AB \perp AC$, $AC \perp AD$, $AB = 1$ cm, $AC = 3$ cm și $AD = 4$ cm. Determină:
a) măsura unghiului dintre planele (ABD) și (ABC);
b) perimetrul triunghiului BCD;
c) distanța de la punctul B la dreapta DC;
d) aria triunghiului BCD.

13. Pe planul pătratului $ABCD$, cu latura de $3\sqrt{6}$ cm, se ridică perpendiculara AM, cu $AM = 6$ cm.
a) Demonstrează că $(MBD) \perp (MAC)$.
b) Calculează măsura unghiului dintre planele (MBD) și (ABC).
c) Dacă E și F sunt picioarele perpendicularelor din A pe MD, respectiv pe MB, demonstrează că patrulaterului $DEFB$ este trapez isoscel.

14. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Demonstrează că:
a) $(B'BC) \perp (ABC)$;
b) $(A'AC) \perp (B'BD)$.

15. Pe perpendiculara în D pe planul dreptunghiului $ABCD$ se consideră un punct oarecare M.
a) Demonstrează că $(MAD) \perp (MCD)$.
b) Dacă $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $AD = 6$ cm și $MD = \frac{1}{2}AB$, arată că unghiul dintre planele (MAC) și (ADC) are măsura de 45°.

16. Pe planul dreptunghiului $ABCD$, cu $AB = 8\sqrt{5}$ cm și $BC = 4\sqrt{5}$ cm, se ridică perpendiculara TA, cu $TA = 15$ cm. Determină distanțele de la T la laturile dreptunghiului și la diagonala BD.

17. Se consideră $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei $AB = 12$ cm. Știind că înălțimea $SO = 12$ cm, determină:
a) lungimea muchiei laterale;
b) aria secțiunii paralele cu baza, determinată de un plan care trece prin punctul M de pe segmentul VO astfel încât $OM = 4$ cm.

18. În *Figura 25* este reprezentată schița unui acoperiș în care triunghiurile ABC și DEF sunt echilaterale, $BCFE$ este dreptunghi, iar $ABED$ și $ACFD$ sunt trapeze isoscele. Distanța de la punctul A la planul (BCF) este de 2 m, fața $ACFD$ formează cu planul (BCF) un unghi cu măsura de 30° și $CF = 12\sqrt{3}$ m.
a) Arată că $BC = 4\sqrt{3}$ m.
b) Determină lungimea coamei AD.
c) Câți metri pătrați de tablă trebuie cumpărați pentru acest acoperiș?

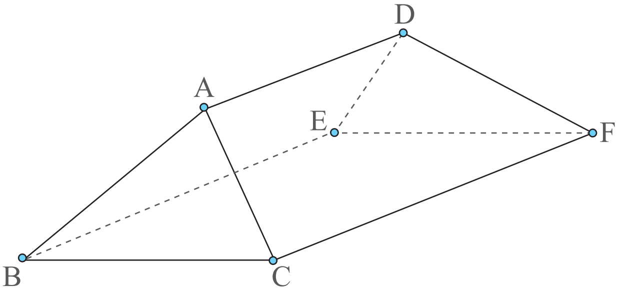


Figura 25

AUTOEVALUARE – În această unitate de învățare:

Am înțeles foarte bine ....
Îmi este neclar ....
Nu știu să .... / Nu am înțeles ....

Revezi lecțiile și exercițiile noțiunilor notate la culoarea galbenă. Discută cu un coleg/ o colegă sau cu profesorul despre ceea ce nu ai înțeles și ai completat la culoarea roșie.

9. Evaluare

Timp de lucru: 45 de minute

Din oficiu 10p

1. Desenează o piramidă regulată $VABCD$ și înălțimea VO. *10p*

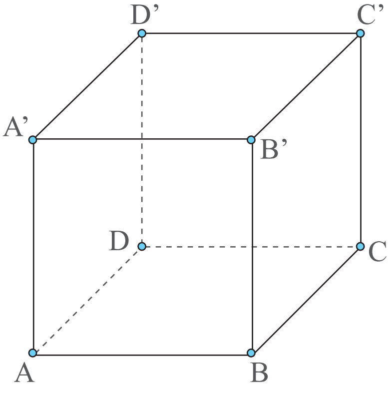


Figura 26

2. În *Figura 26* $ABCDA'B'C'D'$ este un cub. Măsura unghiului dintre dreptele AA' și BC este egală cu: *10p*

A. 30°; B. 45°; C. 60°; D. 90°.

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

3. Într-o prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral, latura bazei este de 8 cm și muchia laterală de 6 cm. Înălțimea acestei prisme este egală cu: *10p*

A. 4 cm; B. 6 cm; C. 10 cm; D. 8 cm.

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

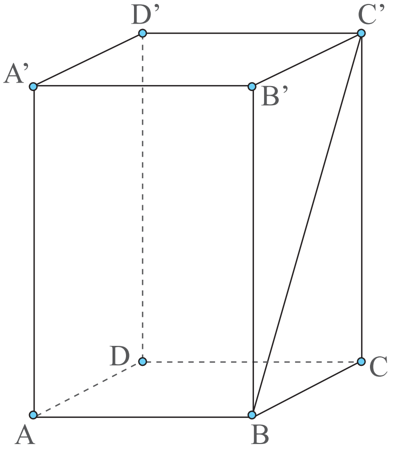


Figura 27

4. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ din *Figura 27.* Proiecția pe planul $AA'D$ a segmentului BC' este: *10p*

A. AA'; B. AD; C. AD'; D. $A'D$.

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

5. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$ se ridică perpendiculara AM, $AM = 5$ cm. Se știe că $AB = 15$ cm și $AC = 20$ cm.

a) Arată că $AD = 12$ cm, unde D este piciorul înălțimii din A a triunghiului ABC. *5p*

b) Determină distanța de la punctul M la dreapta BC. *5p*

6. Segmentul AB formează cu un plan α un unghi cu măsura de 30°. Dacă $A \in \alpha$ și proiecția lui AB pe planul α are lungimea de 6 cm, determină la ce distanță de planul α se află punctul B. *10p*

7. Triunghiurile ABC și ABD, dreptunghice în A, sunt situate în plane diferite.

a) Demonstrează că $AB \perp (DAC)$. *10p*

b) Dacă distanța de la punctul A la dreapta CD este egală cu lungimea segmentului AB, determină măsura unghiului dintre planele BCD și DAC. *10p*

8. O cutie în formă de paralelipiped dreptunghic are dimensiunile de 3 cm, 4 cm și 12 cm. Se poate introduce, în această cutie o bară metalică cu lungimea de 14 cm? Justifică răspunsul dat. *10p*

10. Exersezi și progresezi

PORTOFOLIU

Prezintă portofoliul
Perpendicularitate în spațiu.

Autoevaluare:

a) Portofoliul conține piesele recomandate?

b) Piesele respectă cerințele de realizare?

c) Aspectul portofoliului este îngrijit?

1. Se consideră cubul $ABCDEFGH$, reprezentat în *Figura 28*.

Determină:

a) $pr_{(ABC)}D$;

b) $pr_{(GBC)}A$;

c) $pr_{(ABC)}E$;

d) $pr_{(BDF)}A$;

e) $pr_{(EFG)}B$;

f) $pr_{(BCG)}H$.

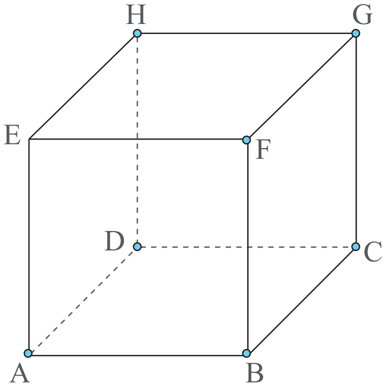


Figura 28

2. Se consideră un segment AB cu lungimea de 20 cm care intersectează un plan α.

Determină lungimea proiecției segmentului AB pe planul α, știind că punctele A și B se află la distanță de 15 cm, respectiv 3 cm față de planul α.

3. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 25$ cm, $CD = 7$ cm și $AD = BC = 15$ cm.

În punctul O de intersecție a diagonalelor se ridică perpendiculara OM pe planul trapezului, $MO = 10$ cm.

Determină:

a) distanța de la punctul M la dreapta DC;

b) distanța de la punctul M la dreapta BC.

4. Pe planul triunghiului isoscel ABC, cu $AB = AC = 15$ cm și $BC = 18$ cm, se ridică perpendiculara MG, unde G este centrul de greutate al triunghiului și $MG = 4$ cm.

Determină:

a) distanța de la punctul M la dreapta BC;

b) distanța de la punctul M la dreapta AB;

c) distanța de la punctul M la dreapta AC.

5. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, cu $AB = 14$ cm, $CD = 6$ cm și $BC = 10$ cm. Pe planul trapezului se ridică perpendiculara DO, astfel încât $DO = 9$ cm.

Determină:

a) distanța de la punctul O la dreapta BC;

b) distanța de la punctul O la dreapta AB;

c) distanța de la punctul O la dreapta AC.

6. De aceeași parte a planului α se consideră punctele coliniare A, B și C, în această ordine, astfel încât $AB = 8$ cm, $BC = 12$ cm și M, N și P proiecțiile celor trei puncte pe planul α.

Arată că $\dfrac{NP}{MP} = \dfrac{3}{5}$.

7. Se consideră paralelipipedul deptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu $AA' = 4\sqrt{6}$ cm , $AB = 6$ cm și $BC = 8$ cm.

a) Determină lungimea proiecției diagonalei AC' pe planul (ABC).

b) Calculează cosinusul unghiului dintre diagonala $A'C$ și planul $(BB'C)$.

8. Proiecția vârfurilor unui paralelogram $ABCD$ pe un plan α formează patrulaterul $A'B'C'D'$.

a) Demonstrează că $A'B'C'D'$ este paralelogram.

b) Arată că $AA' + CC' = BB' + DD'$.

9. Se consideră piramida regulată $SABC$, cu baza triunghi și M mijlocul laturii bazei BC.

Demonstrează că $(SAM) \perp (ABC)$.

10. Se consideră piramida regulată $VABCD$, cu baza pătrat și punctul O centrul pătratului $ABCD$.

Demonstrează că $(VBD) \perp (VAC)$.

11. Pe planul triunghiului isoscel ABC $(AB = AC)$, $AB = 10$ cm și $BC = 16$ cm, se ridică perpendiculara AD astfel încât $AD = 6$ cm.

Determină măsura unghiului dintre planele (DBC) și (ABC).

12. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 2\sqrt{13}$ cm, $AC = 4\sqrt{3}$ cm, $BC = 10$ cm și punctul P exterior planului (ABC) astfel încât $AP \perp (ABC)$, $AP = 10$ cm.

a) Stabilește natura triunghiului (ABC).

b) Determină măsura unghiului dintre planele (PAB) și (PBC).

13. Se consideră prisma dreaptă $ABCDEF$ cu baza triunghi echilateral.

Dacă $AB = 8$ cm și înălțimea $AD = 4$ cm, determină:

a) măsura unghiului dintre planele (ABE) și (EBC);

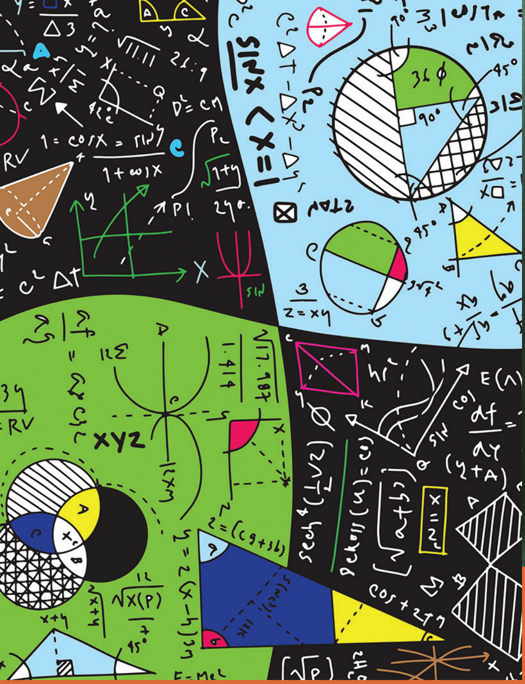
b) măsura unghiului dintre planele (DBC) și (ABC).

14. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, în care $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 12$ cm, $CD = 4$ cm, $BC = 10$ cm și dreptunghiul $ABEF$, cu $AF = 6\sqrt{3}$ cm.

Știind că $(ABC) \perp (ABE)$:

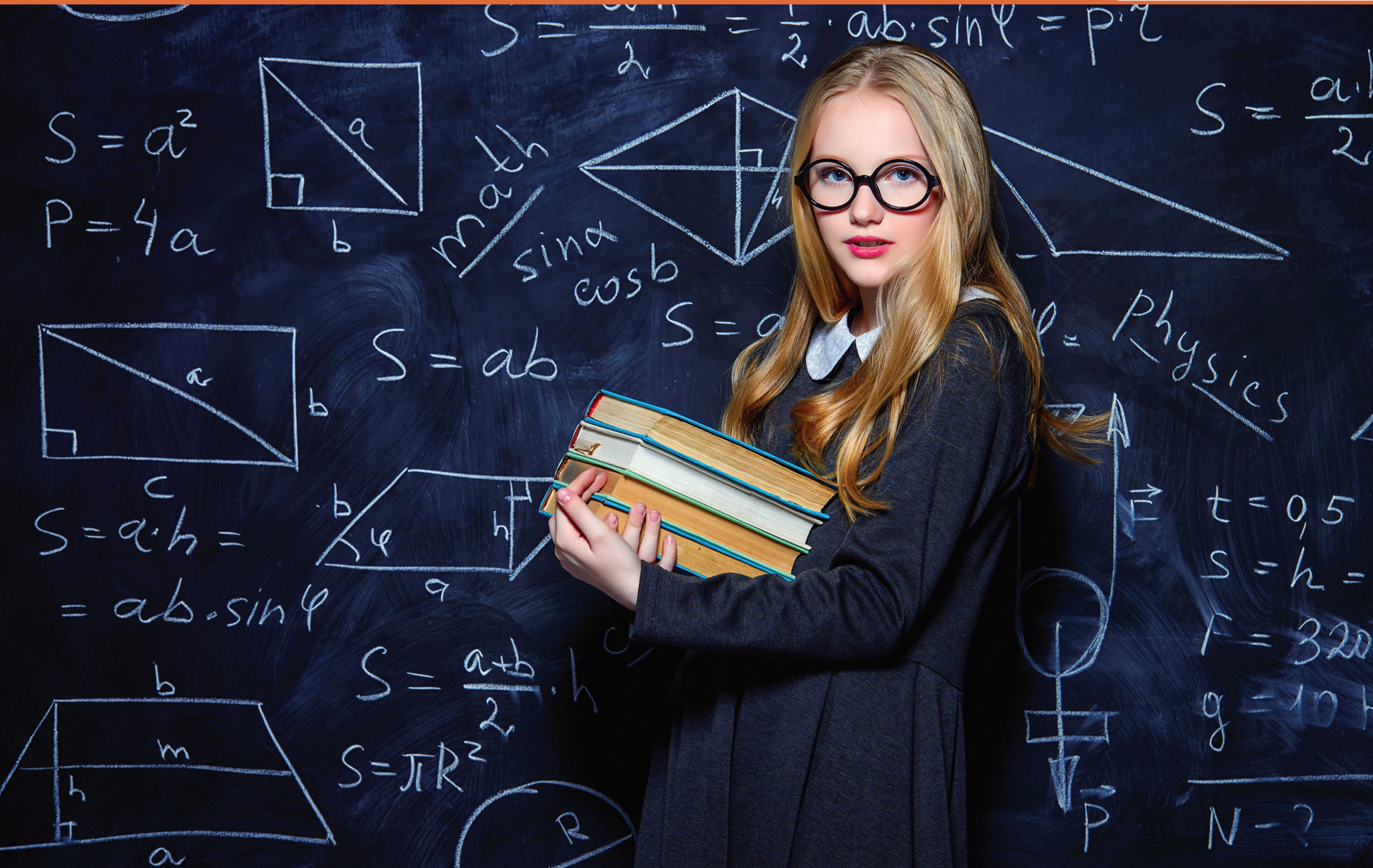
a) determină distanța de la punctul C la dreapta EF;

b) calculează măsura unghiului dintre planele (ABE) și (DCE).



X

Arii și volume ale unor corpuri geometrice



1. Distanțe pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate

Observă și descoperă!

1. Desenează, pe caiet, piramida regulată $VABC$ cu baza triunghiul ABC (*Figura 1*).

a) Pe acest desen, pune în evidență înălțimea unei fețe laterale dusă din vârful piramidei.

b) Justifică de ce piciorul perpendicularei din punctul V pe dreapta BC este mijlocul laturii BC.

c) Care este proiecția segmentului VM pe planul bazei ABC?

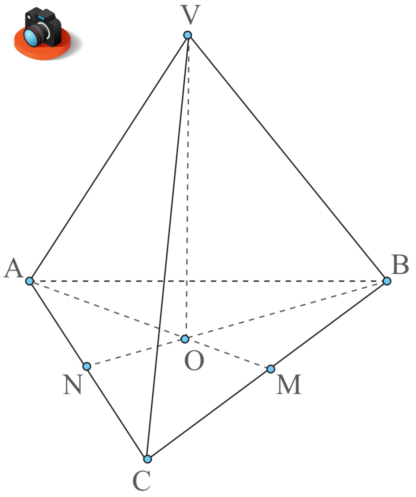


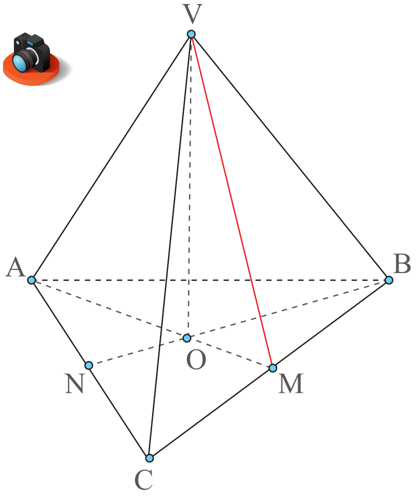
Figura 1

Important

- **Apotema piramidei regulate** este înălțimea unei fețe laterale dusă din vârful piramidei.

Exemplu: Dacă $VM \perp BC$, atunci VM este apotema piramidei regulate.

O numim apotemă deoarece proiecția ei pe planul bazei este apotema poligonului regulat.



- Deoarece toate fețele laterale ale unei piramide regulate sunt triunghiuri isoscele congruente, apotema piramidei poate fi considerată pe oricare față laterală.

- Pentru determinarea elementelor unei piramide regulate folosim relațiile metrice din triunghiul dreptunghic.

Prezentăm mai jos câteva situații.

2. Problemă rezolvată.

Într-o piramidă regulată $VABC$, cu baza triunghi echilateral se cunosc înălțimea $VO = 2\sqrt{13}$ cm și latura bazei $AB = 12$ cm.

a) Determină lungimea muchiei laterale a piramidei.

b) Determină lungimea apotemei piramidei.

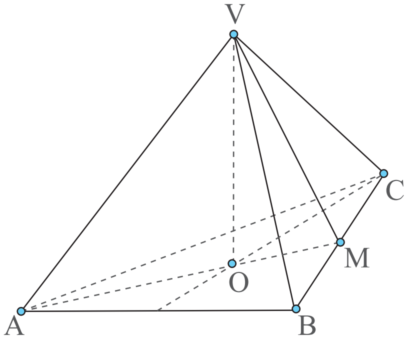
c) Determină distanța de la vârful A la apotema de pe fața laterală VBC.

d) Determină distanța de la vârful A la fața laterală VBC.

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Citesc cu atenție enunțul și realizez un desen corespunzător acestuia.

Cum scriu:



Pas 2. a) Muchia laterală VA o pot încadra ca latură în triunghiul VAO care este dreptunghic în O, deoarece VO este perpendiculară pe planul bazei.

Din $VO \perp (ABC)$ și $AO \subset (ABC)$ rezultă $VO \perp AO$, deci $\triangle VAO$ este dreptunghic.

Pas 3. Pentru a determina lungimea laturii VA, am nevoie de lungimile laturilor VO (o cunosc) și AO. Pentru a determina lungimea laturii AO, avem mai multe posibilități:

1. O privesc ca rază a cercului circumscris triunghiului echilateral.

2. Punctul O este centrul de greutate al triunghiului, deci pe o mediană se află la $\frac{2}{3}$ de vârf, iar AM privită ca înălțime se poate determina cu teorema lui Pitagora.

1. În $\triangle ABC$ echilateral, AO este rază. Din $l_3 = R\sqrt{3}$ obținem $12 = R\sqrt{3} \Rightarrow$
$R = {}^{\sqrt{3})}\frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$, deci $AO = 4\sqrt{3}$ cm.

2. În $\triangle ABM$ dreptunghic în M, cunosc $AB = 12$ cm și $BM = 6$ cm (M este mijlocul lui BC), rezultă, din teorema lui Pitagora:
$AM^2 = AB^2 - BM^2 \Rightarrow AM^2 = 12^2 - 6^2 = (12-6)(12+6) = 6 \cdot 18 = 6 \cdot 6 \cdot 3 = 6^2 \cdot 3 \Rightarrow$
$AM = \sqrt{6^2 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$ cm.
Acum $AO = \frac{2}{3} \cdot AM \Rightarrow AO = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm.

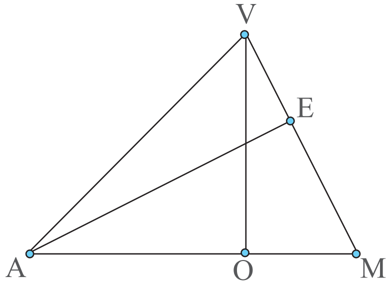
Pas 4. Acum, în triunghiul dreptunghic VAO am toate elementele pentru a determina lungimea lui VA.

În $\triangle VAO$ dreptunghic în O, din teorema lui Pitagora, avem $VA^2 = VO^2 + AO^2$
$\Rightarrow VA^2 = \left(2\sqrt{13}\right)^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 52 + 48 = 100 \Rightarrow VA = \sqrt{100} = 10$ cm.

Pas 5. b) Apotema piramidei o pot încadra ca latură în triunghiul dreptunghic MOV sau în triunghiul dreptunghic BMV. Dacă folosesc triunghiul MOV trebuie să determin lungimea segmentului OM. Dacă folosesc triunghiul BMV am toate elementele necesare. Folosesc triunghiul BMV.

În $\triangle BMV$, dreptunghic în M, cunosc $VB = VA = 10$ cm și $BM = 6$ cm. Din teorema lui Pitagora, avem $VM^2 = VB^2 - BM^2 \Rightarrow VM^2 = 10^2 - 6^2 = (10-6)(10+6) = 4 \cdot 16$
$\Rightarrow VM = \sqrt{4 \cdot 16} = 2 \cdot 4 = 8$ cm.

Pas 6. c) Este vorba de perpendiculara din punctul A pe dreapta VM, adică de înălțimea din A a triunghiului VAM. Scot separat acest triunghi.



Pas 7. Pentru determinarea lungimii segmentului AE voi scrie aria triunghiului VAM în două moduri.

Consider $AE \perp VM \Rightarrow AE$ este distanța cerută.

$$\mathcal{A}_{\triangle\text{VAM}} = \frac{VM \cdot AE}{2} \text{ și } \mathcal{A}_{\triangle\text{VAM}} = \frac{AM \cdot VO}{2} \Rightarrow VM \cdot AE = AM \cdot VO, \text{ adică}$$

$$8 \cdot AE = 6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{13} \Rightarrow AE = \frac{6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{13}}{8} = \frac{3\sqrt{39}}{2} \text{ cm.}$$

Pas 8. d) Distanța se măsoară totdeauna pe perpendiculară. Trebuie construită perpendiculara din A pe planul VBC, dar nu știu unde cade. Intuiția îmi spune că o să cadă pe dreapta VM. Am deja perpendiculara din A pe VM. Demonstrez că AE este perpendiculară pe planul VBC folosind a doua reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare.

$$\left.\begin{array}{l} AE \perp VM \\ VM \perp BC \\ AM \perp BC \\ VM \subset (VBC) \\ BC \subset (VBC) \end{array}\right\} \xRightarrow{R2T3P} AE \perp (VBC) \Rightarrow AE \text{ este distanța cerută.}$$

Pas 9. Lungimea segmentului AE a fost deja determinată la punctul c).

$$AE = \frac{3\sqrt{39}}{2} \text{ cm.}$$

Exersează!

3. În *Figura 2*, $VABCD$ este o piramidă regulată cu vârful V, în care $VA = 5$ cm și $AB = 6$ cm. O este centrul bazei și M este mijlocul laturii BC.

a) Este triunghiul BMV dreptunghic? Justifică răspunsul dat.

b) Folosind triunghiul BMV determină lungimea apotemei piramidei.

c) Este triunghiul MOVdreptunghic? Justifică răspunsul dat.

d) Folosind triunghiul MOV determină lungimea înălțimii piramidei.

e) Determină distanța de la punctul O la dreapta VM.

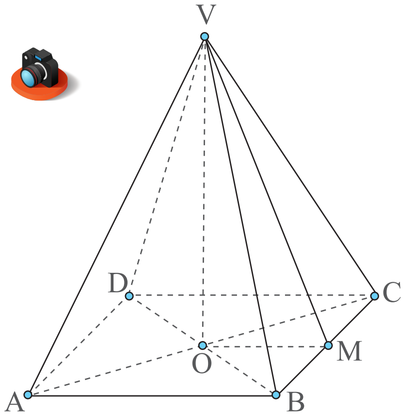


Figura 2

4. Într-o piramidă regulată $VABC$, cu vârful V, cunoaștem înălțimea piramidei $VO = 4$ cm, unde O este centrul bazei, și apotema piramidei $VM = 2\sqrt{7}$ cm, unde M aparține segmentului BC.

a) Determină lungimea muchiei bazei.

b) Determină lungimea muchiei laterale.

c) Determină distanța de la punctul O la muchia AV.

d) Determină distanța de la punctul O la planul (VBC).

5. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ avem $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm și $D'B = 20$ cm. Arată că $AA' = 10\sqrt{3}$ cm.

6. Se consideră un con circular drept cu înălțimea de 8 cm și raza bazei de 6 cm.

a) Determină generatoarea conului.

b) Determină distanța de la centrul bazei la o generatoare a conului.

7. Se consideră cubul $ABCDEFGH$, din *Figura 3*, cu muchia de 6 cm.

a) Calculează lungimea diagonalei cubului.

b) Determină distanța de la punctul C la diagonala BH.

c) Determină distanța de la punctul A la planul (BCG).

d) Determină distanța de la punctul E la planul (DBF).

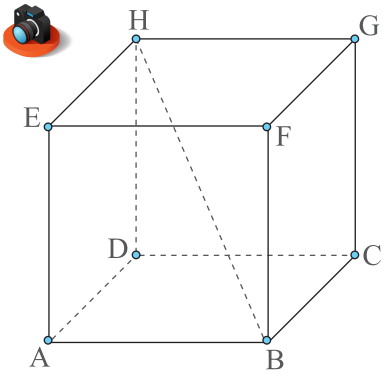


Figura 3

8. Se consideră $ABCDEF$ o prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral care are fețele laterale pătrate de latură 9 cm.

a) Determină distanța de la punctul D la dreapta BC.

b) Determină distanța de la punctul A la planul (BCE).

9. Secțiunea diagonală în piramida patrulateră regulată $VABCD$ (*Figura 4*), cu vârful în V, este un triunghi echilateral cu latura de 12 cm.

a) Arată că $VO = 6\sqrt{3}$ cm, unde O este centrul bazei.

b) Determină lungimea muchiei bazei piramidei.

c) Determină lungimea apotemei piramidei.

d) Determină distanța de la punctul O la planul feței VAB.

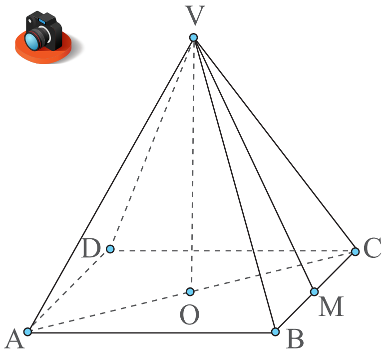


Figura 4

10. Acoperișul unei biserici maramureșene are forma piramidei patrulatere regulate $VABCD$, cu vârful V, reprezentată în *Figura 5*. Cunoaștem muchia laterală $VA = 5$ m și apotema piramidei $VM = 4$ m, $M \in BC$.

a) Determină lungimea muchei bazei.

b) Determină lungimea înălțimii piramidei.

c) Muchiile laterale AV, BV, CV și DV sunt sprijinite cu stâlpi care pornesc din punctul O, centrul bazei, și ajung în mijlocul muchiei. Ce lungime are un astfel de stâlp?

d) O față laterală a acoperișului este sprijinită cu un stâlp care pornește din punctul O, centrul bazei. Care este cea mai mică lungime pe care o poate avea un astfel de stâlp?

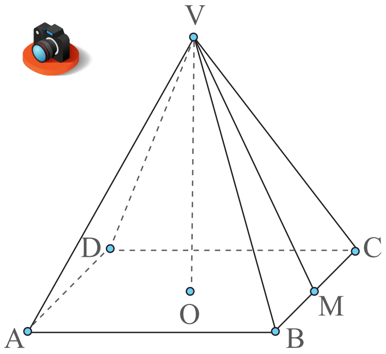


Figura 5

2. Măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate

Amintește-ți!

1. În *Figura 6* dreptunghiul $ABCD$ și triunghiul ABE sunt situate în plane diferite. Se știe că triunghiul ABE este dreptunghic în A, $AD = 3$ cm, $AE = 4$ cm și $DE = 5$ cm.

a) Identifică un unghi plan corespunzător diedrului dintre planul dreptunghiului $ABCD$ și planul triunghiului ABE.

b) Ce măsură are unghiul DAE?

c) Justifică afirmația: $(ABE) \perp (ADC)$.

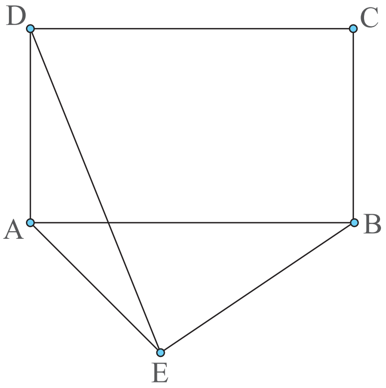


Figura 6

Important

• În corpurile studiate apar unghiuri între muchii și planul fețelor sau unghiuri între două fețe. Prin câteva exemple vom arăta cum trebuie abordată problema determinării acestor unghiuri. Uneori ne vom mulțumi numai cu valoarea unei funcții trigonometrice a acestor unghiuri.

2. Problemă rezolvată: Se consideră o piramidă regulată $VABC$, cu baza triunghi, în care înălțimea este $VO = 4\sqrt{3}$ cm și muchia laterală $VA = 4\sqrt{6}$ cm.

a) Determină măsura unghiului dintre o muchie laterală și planul bazei.

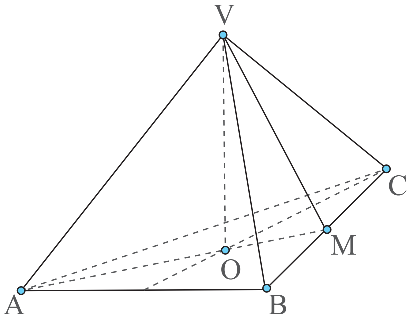
b) Determină tangenta unghiului dintre o față laterală și planul bazei.

c) Determină sinusul unghiului determinat de două fețe laterale.

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Citesc cu atenție enunțul și realizez un desen corespunzător acestuia.

Cum scriu:



Pas 2. a) Unghiul unei drepte cu un plan este unghiul format de dreaptă și proiecția ei pe plan. Trebuie identificată proiecția muchiei VA pe planul ABC.

$VO \perp (ABC) \Rightarrow AO = \text{pr}_{(ABC)}AV$. Unghiul căutat este unghiul dintre dreptele AV și AO, adică $\sphericalangle VAO$, deoarece este ascuțit.

Pas 3. Unghiul VAO îl pot încadra în triunghiul dreptunghic AOV unde cunosc cateta VO și ipotenuza VA.

În $\triangle VAO$ dreptunghic în O, $\sin\widehat{VAO} = \dfrac{VO}{VA} \Rightarrow$
$\sin\widehat{VAO} = \dfrac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ și atunci $\widehat{VAO} = 45^\circ$.

Pas 4. b) Pentru unghiul dintre două plane trebuie, în primul rând, identificată dreapta de intersecție a celor două plane.

$(VBC) \cap (ABC) = BC$

Pas 5. Acum trebuie construită, în fiecare plan, perpendiculara în același punct, pe dreapta de intersecție. Aceste perpendiculare trebuie alese cât mai convenabil, adică să le pot identifica cu elemente ale corpului sau ale unui poligon cunoscut.

Consider apotema $VM \perp BC$ și evident $OM \perp BC$ ($VO \perp (ABC)$ și $VM \perp BC$).
Unghiul căutat este $\sphericalangle(VM,OM) = \sphericalangle VMO$.

Pas 6. Pentru determinarea tangentei acestui unghi îl încadrez în triunghiul MOV, unde deja cunosc VO. Îmi trebuie OM. Dacă îl privesc pe O ca centru de greutate al triunghiului ABC atunci OM este o treime din AM sau jumătate din AO.

Avem $OM = \dfrac{AO}{2}$.

Pas 7. Pe AO îl determin încadrându-l în triunghiul AOV.

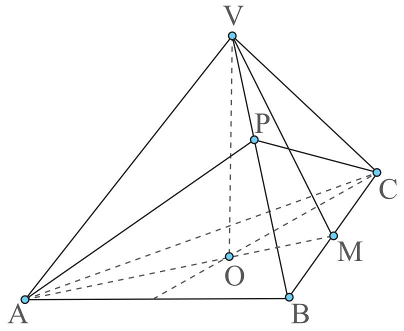
Din teorema lui Pitagora, în $\triangle VAO$ dreptunghic în O, avem $AO^2 = AV^2 - VO^2 \Rightarrow$
$AO^2 = \left(4\sqrt{6}\right)^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 16 \cdot 6 - 16 \cdot 3 = 16 \cdot (6-3) = 16 \cdot 3 \Rightarrow$
$AO = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$ și atunci $OM = 2\sqrt{3}$ cm.

Pas 8. Tangenta unui unghi este raportul dintre cateta opusă unghiului și cateta alăturată unghiului.

În $\triangle MOV$, $\operatorname{tg}\widehat{VMO} = \dfrac{VO}{OM} \Rightarrow \operatorname{tg}\widehat{VMO} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 2$.

Pas 9. c) Aleg cele două plane și identific dreapta de intersecție a celor două plane.

$(VAB) \cap (VBC) = VB$.



Pas 10. Acum trebuie construită, în fiecare plan, perpendiculara în același punct, pe dreapta de intersecție, pentru a identifica unghiul plan al diedrului. În planul VAB aleg perpendiculara din vârful A (o voi putea numi înălțime în triunghiul VAB) și voi demonstra că CP este perpendicular pe VB.

Consider $AP \perp VB$.
Acum $\triangle PAB \equiv \triangle PCB$ deoarece $AB = BC$ (muchii ale bazei), BP este latură comună și $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PBC$ (sunt unghiuri la bază ale fețelor laterale). De aici $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPB$ și cum $\sphericalangle APB = 90°$ rezultă $CP \perp VB$.
Din $AP \perp VB$ și $CP \perp VB$ rezultă $\sphericalangle((VAB),(VBC)) = \sphericalangle(AP,CP) = \sphericalangle APC$.

Pas 11. Voi încadra unghiul APC în triunghiul APC despre care știu că este isoscel.

Din $\triangle PAB \equiv \triangle PCB$ rezultă $AP = CP$, adică $\triangle APC$ este isoscel.

Pas 12. În triunghiul APC trebuie să determin lungimile lui AC, AP și CP. Pentru a determina lungimea lui AC folosesc raza AO și legătura dintre rază și latură.
Pentru a determina lungimea segmentului CP consider triunghiul VBC căruia îi exprim aria în două moduri.

Din $l_3 = R\sqrt{3} \Rightarrow AC = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12$ cm.

$$\mathcal{A}_{\triangle VBC} = \frac{BC \cdot VM}{2} = \frac{VB \cdot CP}{2} \Rightarrow CP = \frac{BC \cdot VM}{VB}.$$

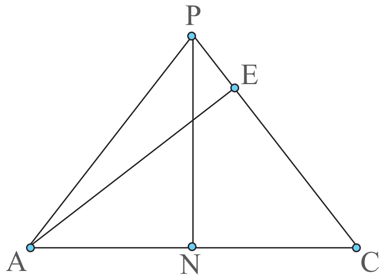
Pas 13. Trebuie determinată lungimea segmentului VM.

Din teorema lui Pitagora în $\triangle MOV$ $(\widehat{O} = 90°)$ avem $VM^2 = VO^2 + OM^2 \Rightarrow$
$VM^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 48 + 12 = 60 \Rightarrow VM = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$ cm.

Pas 14. Revin la determinarea segmentului CP.

$$CP = \frac{12 \cdot 2\sqrt{15}}{4\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{10} \text{ cm.}$$

Pas 15. Reprezint separat triunghiul APC în care cunosc lungimile tuturor laturilor.



Pas 16. Pentru a determina sinusul unui unghi trebuie să îl încadrez într-un triunghi dreptunghic.

Construiesc $AE \perp PC$ și obțin $\triangle APE$ dreptunghic în E.

Pas 17. Lungimea segmentului AE o determin cu aria triunghiului APC calculată în două moduri, dar am nevoie să determin lungimea înălțimii din P.

Consider $PN \perp AC$, $N \in AC$.
Rezultă, deoarece triunghiul este isoscel, că $AN = \dfrac{AC}{2} \Rightarrow AN = 6$ cm.
Din teorema lui Pitagora în $\triangle APN$ $(\widehat{N} = 90°)$ avem:
$PN^2 = AP^2 - AN^2 \Rightarrow PN^2 = \left(3\sqrt{10}\right)^2 - 6^2 = 90 - 36 = 54 \Rightarrow PN = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$ cm.

$$\text{Acum } \mathcal{A}_{\triangle APC} = \frac{AC \cdot PN}{2} = \frac{CP \cdot AE}{2} \Rightarrow AE = \frac{AC \cdot PN}{CP} \Rightarrow$$

$$AE = \frac{12 \cdot 3\sqrt{6}}{3\sqrt{10}} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{15}}{5} \text{ cm.}$$

Pas 18. Acum pot determina sinusul unghiului APC într-un triunghi dreptunghic.

$$\text{În } \triangle APE \text{ dreptunghic în } E,\ \sin \widehat{APE} = \frac{AE}{AP} \Rightarrow$$

$$\sin \widehat{APE} = \frac{\frac{12\sqrt{15}}{5}}{3\sqrt{10}} = \frac{12\sqrt{15}}{15\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Exersează!

3. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful V (*Figura 7*).
Se știe că $AB = 12$ cm și $VO = 6$ cm, unde O este centrul bazei.

a) Determină proiecția muchiei AV pe planul bazei.

b) Este triunghiul AOV dreptunghic? Justifică răspunsul dat.

c) Determină lungimea segmentului AO.

d) Folosind triunghiul AOV calculează sinusul unghiului format de muchia laterală AV și planul bazei.

e) Care este dreapta de intersecție a planelor (ABC) și (VBC)?

f) Este $VM \perp BC$, unde M este mijlocul lui BC? Justifică răspunsul dat.

g) Este $OM \perp BC$? Justifică răspunsul dat.

h) Folosind triunghiul MOV determină măsura unghiului planelor (VBC) și (ABC).

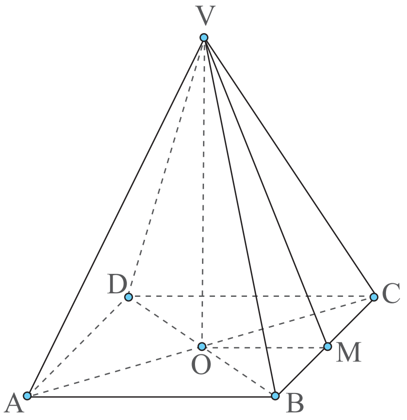


Figura 7

4. Un con circular drept are generatoarea de 8 cm și raza bazei de 4 cm. Determină măsura unghiului format de o generatoare a conului cu planul bazei.

5. Se consideră tetraedrul $VABC$ cu toate fețele triunghiuri echilaterale cu latura de 6 cm.

a) Determină sinusul unghiului format de muchia AV cu planul (ABC).

b) Determină tangenta unghiului format de planele (VBC) și (ABC).

6. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm și $AA' = 5$ cm.

a) Determină măsura unghiului format de o diagonală a paralelipipedului cu planul feței $ABCD$.

b) Determină tangenta unghiului format de planele (DCA') și (ABC).

c) Determină sinusul unghiului format de planele (BCD') și (ABC).

7. Se consideră prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghi echilateral care are latura bazei de 12 cm și muchia laterală de $12\sqrt{3}$ cm.

a) Determină măsura unghiului format de dreapta BC' cu planul (ABC).

b) Determină sinusul unghiului format de dreapta BC' cu planul (ABB').

3. Piramida regulată (cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat)

Observă și descoperă!

1. În *Figura 8* este schița unui acoperiș în formă de piramidă regulată cu baza pătrat în care înălțimea $VO = 20$ dm și latura bazei $AB = 30$ dm.

a) Ce lungime are VM, apotema piramidei?

b) Câți metri pătrați de tablă s-au folosit pentru a acoperi o singură față a piramidei? Nu se iau în calcul pierderile de la montaj.

c) Câți metri pătrați de tablă s-au folosit pentru a acoperi întreaga piramidă?

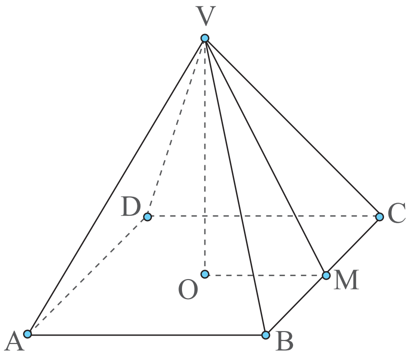


Figura 8

Important

- **Aria laterală** a unei piramide este suma ariilor fețelor laterale.

- La o **piramidă regulată**, aria laterală se obține înmulțind aria unei fețe laterale cu numărul fețelor.

$\mathcal{A}_{\text{lat.}} = n \cdot \mathcal{A}_{\text{f}}$

Justificare: La piramida regulată, fețele laterale sunt triunghiuri congruente.

- **Aria laterală a unei piramide regulate** se poate determina și cu formula:

$\mathcal{A}_{\text{lat.}} = \dfrac{P \cdot a_p}{2}$, unde P este perimetrul bazei, iar a_p apotema piramidei.

Justificare: Aria unei fețe este $\mathcal{A}_{\text{f}} = \dfrac{BC \cdot VM}{2}$.

Aria laterală este $\mathcal{A}_{\text{lat.}} = n \cdot \dfrac{BC \cdot VM}{2} = \dfrac{(n \cdot BC) \cdot VM}{2}$.

Cum $n \cdot BC$ este perimetrul bazei și VM este apotema piramidei, obținem $\mathcal{A}_{\text{lat.}} = \dfrac{P \cdot a_p}{2}$.

- **Aria totală** a unei piramide este suma dintre aria laterală și aria bazei piramidei.

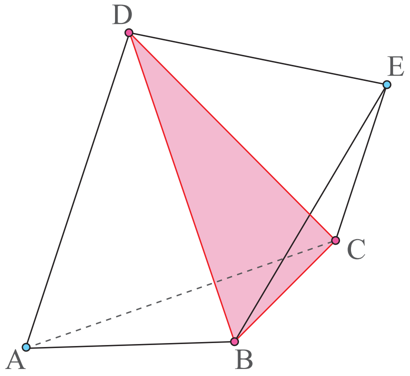
$\mathcal{A}_{\text{tot.}} = \mathcal{A}_{\text{lat.}} + \mathcal{A}_{\text{b}}$

- **Volumul** unui tetraedru este o treime din aria unei fețe înmulțită cu înălțimea corespunzătoare ei.

$$V_{\text{tetraedru}} = \frac{\mathcal{A}_{\text{b}} \cdot h}{3}$$

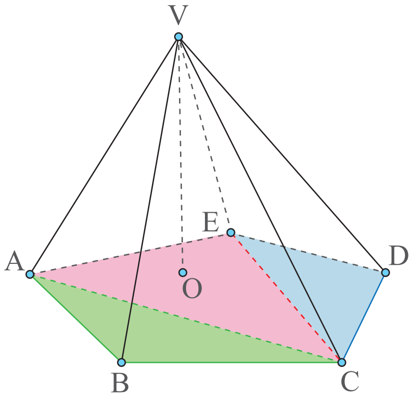
- Dacă două corpuri cu interioare distincte au o față comună, atunci volumul noului corp este suma volumelor celor două corpuri.

$$V_{ABCDE} = V_{ABCD} + V_{EBCD}$$



- Orice piramidă se descompune în tetraedre.

Justificare: Un poligon se descompune în triunghiuri, cu ajutorul diagonalelor.
Pentagonul $ABCDE$ s-a descompus în triunghiurile ABC, ACE și ECD.
Am obținut tetraedrele $VABC$, $VACE$ și $VECD$.



- **Volumul** unei piramide se determină cu formula:

$V_{\text{piramidă}} = \dfrac{\mathcal{A}_{\text{b}} \cdot h}{3}$, unde A_{b} reprezintă aria bazei, iar h este înălțimea piramidei.

Exersează!

2. În *Figura 9*, $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu vârful V. Am notat cu l latura bazei, m muchia laterală, h înălțimea, a_p apotema piramidei, $\mathcal{A}_{\text{lat.}}$ aria laterală, $\mathcal{A}_{\text{tot.}}$ aria totală și V_{p} volumul piramidei.

Transcrie, pe caiet, tabelul de mai jos și completează căsuțele libere. Lungimile sunt exprimate în centimetri, ariile în centimetri pătrați și volumul în centimetri cubi.

l	m	h	a_{p}	$\mathcal{A}_{\text{lat.}}$	$\mathcal{A}_{\text{tot.}}$	V_{p}
6		4				
9			6			
		$4\sqrt{3}$	8			
	$4\sqrt{3}$	4				
8				80		
				60	96	
6						48

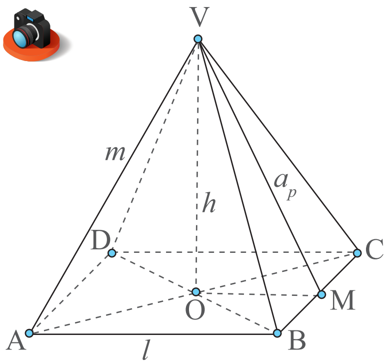


Figura 9

3. Se consideră o piramidă triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful V, $AB = 6$ cm și $VM = 3\sqrt{5}$ cm, unde M este mijlocul segmentului BC.

a) Calculează aria laterală a piramidei.

b) Calculează aria totală a piramidei.

c) Calculează volumul piramidei.

4. Într-o piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$ cu vârful V, muchia laterală este de 8 cm și formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 60°.

a) Calculează aria laterală a piramidei.

b) Calculează aria totală a piramidei.

c) Calculează volumul piramidei.

5. Determină aria laterală, aria totală și volumul unui tetraedru regulat cu muchia de 12 cm.

6. În *Figura 10* este reprezentată schița unui cort în formă de piramidă patrulateră regulată cu vârful V. Înălțimea cortului este egală cu 1,5 m, iar latura bazei este egală cu 2 m. Se poate confecționa un astfel de cort din 11 m^2 de material? Se are în vedere că și partea de jos a cortului este din același material.

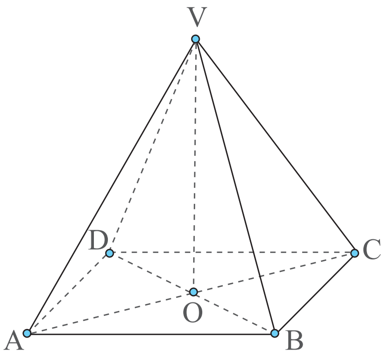


Figura 10

4. Prismă dreaptă (cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat), paralelipiped dreptunghic, cub

Observă și descoperă!

1. În *Figura 11* este schița unui rezervor care are forma unei prisme drepte cu baza pătrat. Înălțimea prismei este $AA' = 2$ m, iar latura bazei este $AB = 5$ m.

a) Determină aria unei fețe laterale a rezervorului;

b) Suprafața laterală a rezervorului trebuie vopsită. Pentru o suprafață de 10 m^2 este necesar 1 litru de vopsea. Determină câți litri de vopsea sunt necesari pentru a vopsi întreaga suprafață laterală a rezervorului.

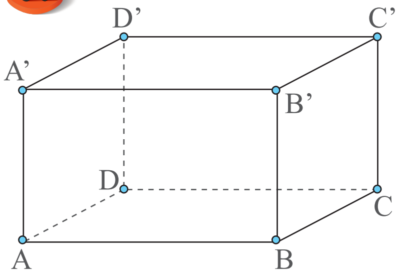


Figura 11

Important

- **Aria laterală** a unei prisme este suma ariilor fețelor laterale.

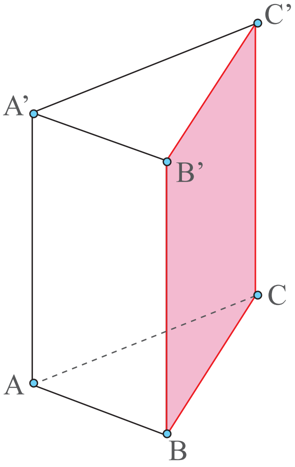
- La o **prismă dreaptă (cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat)**, aria laterală se obține înmulțind aria unei fețe laterale cu numărul fețelor.

$\mathcal{A}_{\text{lat.}} = n \cdot \mathcal{A}_{\text{f}}$

Justificare: La prisma dreaptă (cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat), fețele laterale sunt dreptunghiuri congruente.

- **Aria laterală a unei prisme drepte (cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat)** se determină și cu formula:

$\mathcal{A}_{\text{lat.}} = P \cdot h$, unde P este perimetrul bazei, iar h înălțimea prismei.



Justificare: Aria unei fețe este $A_{\text{f}} = BC \cdot BB'$. Aria laterală este $A_{\text{lat.}} = n \cdot BC \cdot BB' = (n \cdot BC) \cdot BB'$. Cum $n \cdot BC$ este perimetrul bazei și BB' este înălțimea, avem $A_{\text{lat.}} = P \cdot h$.

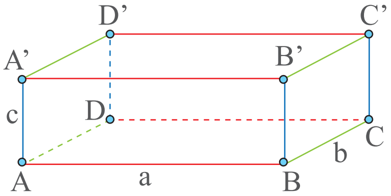
- **Aria totală** a unei prisme este suma dintre aria laterală și ariile celor două baze ale prismei.

$A_{\text{tot.}} = \mathcal{A}_{\text{lat.}} + 2\mathcal{A}_{\text{b}}$

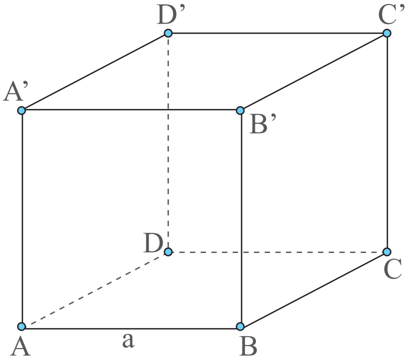
- **Paralelipipedul dreptunghic** are numai arie totală. Aria totală pentru un paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile a, b, respectiv c se determină cu formula

$\mathcal{A}_{\text{paralelipiped}} = 2ab + 2bc + 2ac$

- La un paralelipiped dreptunghic se poate vorbi despre arie laterală numai dacă se precizează care sunt bazele.



- **Cubul** are toate fețele pătrate cu muchia de lungime a. Aria laterală se determină cu formula $\mathcal{A}_{\text{lat. cub}} = 4a^2$, iar aria totală cu formula $\mathcal{A}_{\text{cub}} = 6a^2$.



- Orice prismă dreaptă cu baza triunghi se descompune în trei tetraedre având volumele egale.

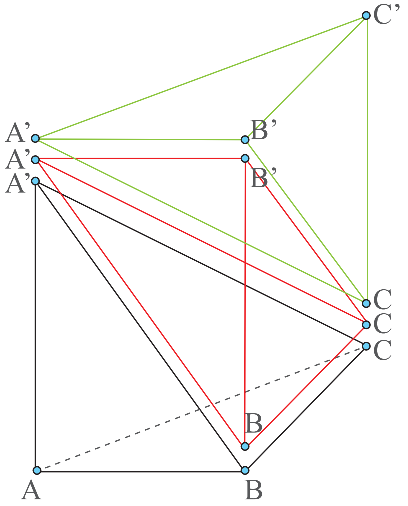
Justificare: $V_{CABA'} = \dfrac{\mathcal{A}_{\triangle ABB'} \cdot h_C}{3}$. Am notat h_C înălțimea din C corespunzătoare feței ABB'.

$V_{CA'BB'} = \dfrac{\mathcal{A}_{\triangle A'BB'} \cdot h_C}{3}$. Am notat h_C înălțimea din C corespunzătoare feței $A'BB'$.

Dar $\mathcal{A}_{\triangle ABB'} = \mathcal{A}_{\triangle A'BB'} = \dfrac{\mathcal{A}_{ABB'A'}}{2}$, iar înălțimea este aceeași; triunghiurile ABB' și $A'BB'$ sunt din același plan. Prin urmare $V_{CABA'} = V_{CA'BB'}$.

$V_{A'BCB'} = \dfrac{\mathcal{A}_{\triangle BCB'} \cdot h_{A'}}{3}$, iar $V_{A'B'CC'} = \dfrac{\mathcal{A}_{\triangle B'CC'} \cdot h_{A'}}{3}$. Ca mai sus $\mathcal{A}_{\triangle BCB'} = \mathcal{A}_{\triangle B'CC'}$ și înălțimea este aceeași, prin urmare $V_{A'BCB'} = V_{A'B'CC'}$.

În concluzie, cele trei tetraedre au volumele egale.



- **Volumul** unei prisme drepte cu baza triunghi se determină cu formula: $V_{\text{prisme drepte}} = \mathcal{A}_{\text{b}} \cdot h$, unde $\mathcal{A}_{\text{b}}$ reprezintă aria bazei, iar h este înălțimea prismei.

Justificare:

Avem $V_{ABCA'B'C'} = V_{CABA'} + V_{CA'BB'} + V_{A'B'CC'} = 3 \cdot V_{CABA'} = 3 \cdot \dfrac{\mathcal{A}_{\triangle ABC} \cdot h_{A'}}{3} = \mathcal{A}_{\triangle ABC} \cdot h_{A'}$.

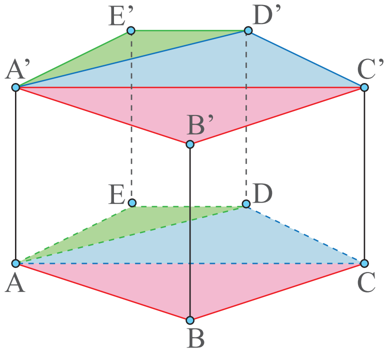
Dar $h_{A'}$ este egală cu înălțimea prismei, pentru că $A'A \perp (ABC)$.

- Orice prismă dreaptă se descompune în prisme drepte cu baza triunghi, deci **volumul** oricărei **prisme drepte** se determină cu formula
$V_{\text{prismă dreaptă}} = \mathcal{A}_{\text{b}} \cdot h$, unde $\mathcal{A}_{\text{b}}$ reprezintă aria bazei, iar h este înălțimea piramidei.

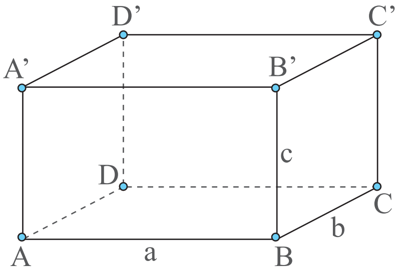
Justificare:

$$V_{ABCDEA'B'C'D'E'} = V_{ABCA'B'C'} + V_{ACDA'C'D'} + V_{ADEA'D'E'} =$$
$$= \mathcal{A}_{\triangle ABC} \cdot AA' + \mathcal{A}_{\triangle ACD} \cdot AA' + \mathcal{A}_{\triangle ADE} \cdot AA' =$$
$$= AA' \cdot (\mathcal{A}_{\triangle ABC} + \mathcal{A}_{\triangle ACD} + \mathcal{A}_{\triangle ADE}) = \mathcal{A}_{ABCDE} \cdot AA'$$

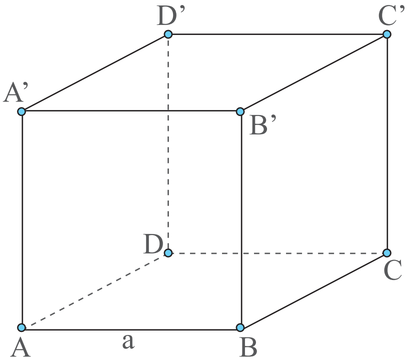
Dar AA' este înălțimea prismei, iar $\mathcal{A}_{ABCDE}$ este aria bazei.



- **Volumul unui paralelipiped dreptunghic** se determină cu formula
$V_{\text{paralelipiped}} = abc$, unde a, b și c sunt dimensiunile paralelipipedului dreptunghic.



- **Volumul unui cub** se determină cu formula $V_{\text{cub}} = a^3$, unde a este muchia cubului.



Exersează!

2. Un cub are muchia de 5 cm.
a) Calculează aria laterală a cubului.
b) Calculează aria totală a cubului.
c) Calculează volumul cubului.

3. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt 3 cm, 4 cm respectiv 12 cm.
a) Calculează aria paralelipipedului.
b) Calculează volumul paralelipipedului.

4. În *Figura 12*, $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă dreaptă cu baza pătrat. Am notat cu l latura bazei, m muchia laterală, h înălțimea, $\mathcal{A}_{\text{lat.}}$ aria laterală, $\mathcal{A}_{\text{tot.}}$ aria totală și V_{p} volumul prismei.

Transcrie, pe caiet, tabelul de mai jos și completează căsuțele libere. Lungimile sunt exprimate în centimetri, ariile în centimetri pătrați și volumul în centimetri cubi.

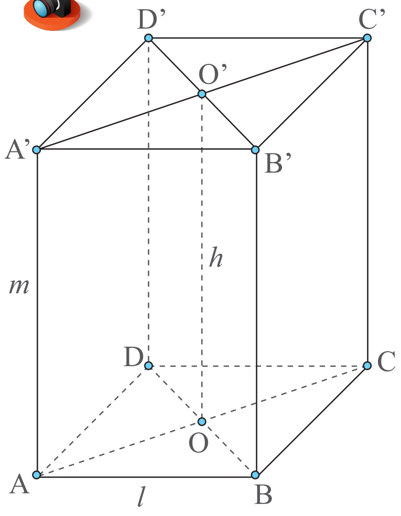


Figura 12

l	m	h	$\mathcal{A}_{\text{lat.}}$	$\mathcal{A}_{\text{tot.}}$	V_{p}
6		4			
9				270	
		$4\sqrt{3}$			$64\sqrt{3}$
4	$4\sqrt{2}$				
8			80		
			60	96	
4					48

5. O prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral a cărei latură este de 4 cm are înălțimea de 8 cm.
a) Calculează aria bazei.
b) Calculează aria laterală.
c) Calculează aria totală.
d) Calculează volumul prismei.

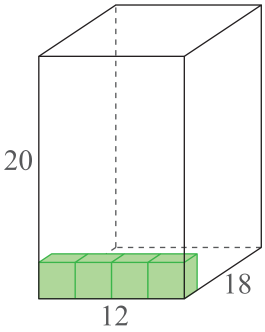
6. O prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral are aria totală egală cu $81\sqrt{3}$ cm^2. Știind că latura bazei este de 6 cm, determină înălțimea și volumul prismei.

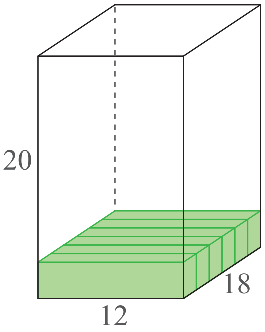
7. Diagonala unei prisme cu baza un pătrat are lungimea de 35 cm, iar diagonala unei fețe laterale are 25 cm. Determină aria totală și volumul prismei.

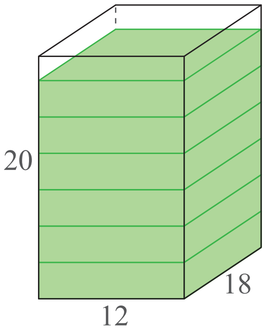
8. **Problemă rezolvată:** O cutie în formă de paralelipiped dreptunghic are dimensiunile 12 cm, 18 cm, respectiv 20 cm. Se pot introduce, în această cutie, 160 de cubulețe cu muchia de 3 cm?

Soluție: Aparent, răspunsul este **DA** deoarece volumul paralelipipedului dreptunghic este $V = 12 \cdot 18 \cdot 20 = 4320$ cm^3. Volumul unui cubuleț este $v = 3^3 = 27$ cm^3, iar $4\,320 : 27 = 160$.

În realitate, răspunsul este **NU** deoarece pe latura de 12 cm se poate așeza un rând de 4 cubulețe; $12 : 3 = 4$. Pe latura de 18 cm se pot așeza 6 rânduri de câte 4 cubulețe; $18 : 3 = 6$. Obținem astfel un strat cu 24 de cubulețe; $4 \cdot 6 = 24$. Pe latura de 20 cm se pot așeza 6 straturi a câte 24 de cubulețe; $20 : 3 \to 6,$ rest 2. Așadar, în paralelipiped am introdus $24 \cdot 6 = 144$ de cubulețe.







9. Anumite produse se ambalează în cutii în formă de prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral având latura bazei de 4 cm și înălțimea de 15 cm. Pierderile la îmbinări se neglijează. Se poate confecționa o astfel de cutie dintr-o bucată de carton cu aria de 194 cm^2?

5. Cilindru circular drept, con circular drept

Observă și descoperă!

1. În *Figura 13* sunt desenate o prismă dreaptă cu baza hexagon și un cilindru.

a) Dacă privești bazele celor două corpuri, prin ce se deosebește o prismă dreaptă de un cilindru circular drept?

b) Determină lungimea unui cerc cu raza egală cu 3 cm.

c) Determină aria unui disc cu raza egală cu 4 cm.

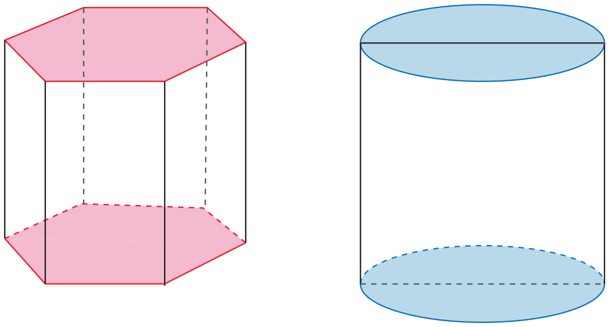
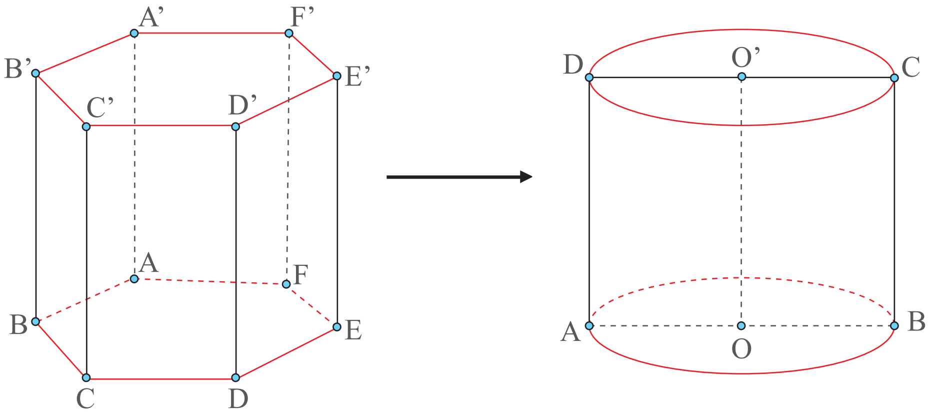


Figura 13

Important

• Formulele pentru determinarea ariei și volumului unui cilindru circular drept le putem descoperi prin analogie cu o prismă dreaptă.



$\mathcal{A}_{\text{lat. prismă}} = P \cdot h \rightarrow \mathcal{A}_{\text{lat. cilindru}} = 2\pi RG$

pentru că perimetrul (P) a devenit lungimea cercului ($2\pi R$), iar înălțimea (h) a devenit generatoarea (G).

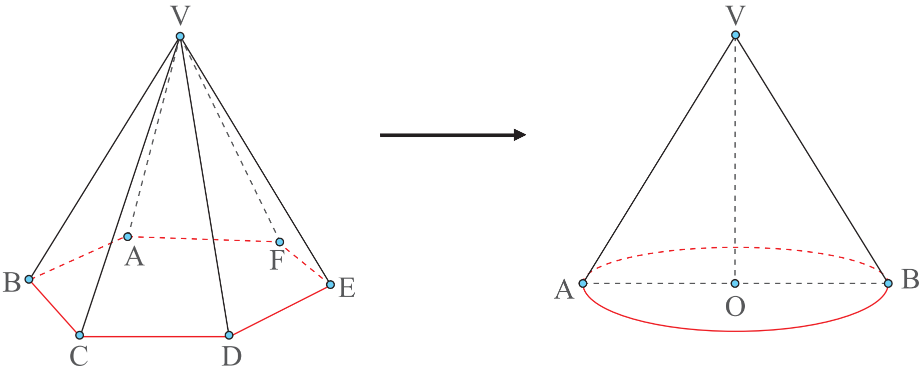
$\mathcal{A}_{\text{tot. prismă}} = \mathcal{A}_{\text{lat.prismă}} + 2\mathcal{A}_{\text{b}} \rightarrow \mathcal{A}_{\text{tot. cilindru}} = 2\pi RG + 2\pi R^2 = 2\pi R\,(G + R)$

pentru că aria bazei ($\mathcal{A}_{\text{b}}$) a devenit aria discului (πR^2).

$V_{\text{prismă dreaptă}} = \mathcal{A}_{\text{b}} \cdot h \rightarrow V_{\text{cilindru circular drept}} = \pi R^2 G$

pentru că aria bazei ($\mathcal{A}_{\text{b}}$) a devenit aria discului (πR^2), iar înălțimea (h) a devenit generatoarea (G).

- Formulele pentru determinarea ariei și volumului unui con circular drept le putem descoperi prin analogie cu o piramidă regulată.



$$\mathcal{A}_{\text{lat. piramidă}} = \frac{P \cdot a_p}{2} \rightarrow \mathcal{A}_{\text{lat. con}} = \pi RG$$

pentru că perimetrul (P) a devenit lungimea cercului $(2\pi R)$, iar apotema piramidei (a_p) a devenit generatoarea (G).

$$\mathcal{A}_{\text{tot. piramidă}} = \mathcal{A}_{\text{lat. piramidă}} + \mathcal{A}_{\text{b}} \rightarrow \mathcal{A}_{\text{tot. con}} = \pi RG + \pi R^2 = \pi R\,(G + R)$$

pentru că aria bazei $(\mathcal{A}_{\text{b}})$ a devenit aria discului (πR^2).

$$V_{\text{piramidă}} = \frac{\mathcal{A}_{\text{b}} \cdot h}{3} \rightarrow V_{\text{con circular drept}} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

pentru că aria bazei $(\mathcal{A}_{\text{b}})$ a devenit aria discului (πR^2).

Exersează!

2. În *Figura 14*, $ABCD$ reprezintă secțiunea axială a unui cilindru circular drept. Am notat cu R raza bazei, G generatoarea, h înălțimea, $A_{\text{lat.}}$ aria laterală, $A_{\text{tot.}}$ aria totală și V_{cil} volumul cilindrului.

Transcrie în caiet tabelul de mai jos și completează căsuțele libere. Lungimile sunt exprimate în centimetri, ariile în centimetri pătrați și volumul în centimetri cubi.

R	G	h	$\mathcal{A}_{\text{lat.}}$	$\mathcal{A}_{\text{tot.}}$	V_{cil}
6		4			
9				270π	
		$4\sqrt{3}$			$64\pi\sqrt{3}$
4	$4\sqrt{2}$				
8			80π		
			60π	132π	
4					48π

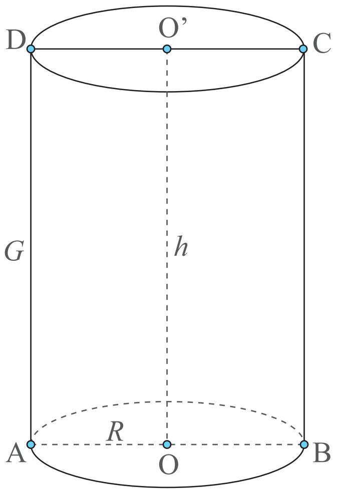


Figura 14

3. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu latura de 6 cm.

a) Determină aria laterală a acestui cilindru.

b) Determină aria totală a acestui cilindru.

c) Determină volumul acestui cilindru.

4. Dintr-o coală de hârtie ca cea din *Figura 15* se pot obține doi cilindri. Un cilindru în care generatoarea este latura AD, notat cu C1 și un cilindru în care generatoarea este latura AB, notat cu C2. $AB = 20$ cm și $AD = 10$ cm.

a) Determină aria laterală a cilindrului C1.

b) Determină aria laterală a cilindrului C2.

c) Compară aria laterală a cilindrului C1 și aria laterală a cilindrului C2.

d) Determină volumul cilindrului C1.

e) Determină volumul cilindrului C2.

f) Compară volumul cilindrului C1 și volumul cilindrului C2.

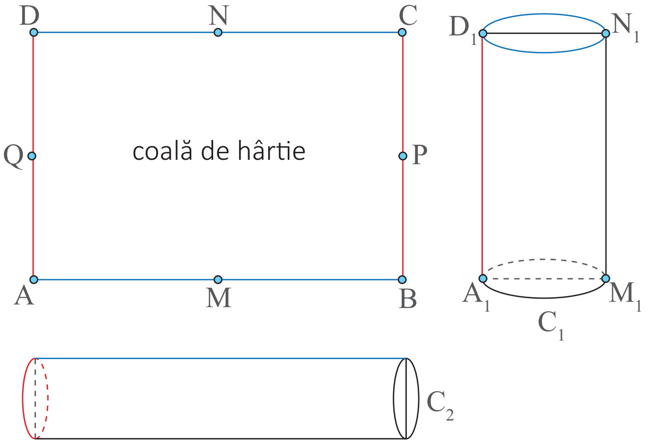


Figura 15

5. Determină aria laterală și volumul unui cilindru circular drept știind că raportul dintre raza bazei și generatoare este $\frac{2}{3}$, iar perimetrul secțiunii axiale este de 56 cm.

6. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept cu generatoarea de 8 cm este un dreptunghi cu unghiul dintre diagonale de 60°. Determină volumul acestui cilindru.

7. În *Figura 16*, VAB reprezintă secțiunea axială a unui con circular drept. Am notat cu R raza bazei, G generatoarea, h înălțimea, $\mathcal{A}_{\text{lat.}}$ aria laterală, $\mathcal{A}_{\text{tot.}}$ aria totală și V_{con} volumul conului.

Transcrie în caiet tabelul de mai jos și completează căsuțele libere. Lungimile sunt exprimate în centimetri, ariile în centimetri pătrați și volumul în centimetri cubi.

R	G	h	$\mathcal{A}_{\text{lat.}}$	$\mathcal{A}_{\text{tot.}}$	V_{con}
6		4			
9				270π	
		$4\sqrt{3}$			$64\pi\sqrt{3}$
4	$4\sqrt{2}$				
8			80π		
			60π	96π	
6					48π

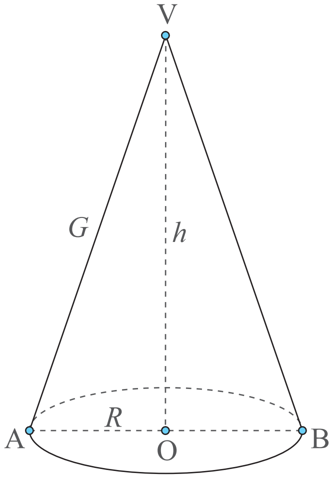


Figura 16

8. Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi echilateral cu latura de 12 cm.

a) Determină aria laterală a acestui con; b) Determină aria totală a acestui con; c) Determină volumul acestui con.

9. În *Figura 17* este schița unui rezervor în formă de con circular drept. AB este diametrul bazei conului și $AB = 6$ m, iar AC este generatoarea conului și $AC = 5$ m.

a) Câți litri de apă se pot păstra în acest rezervor?

b) Suprafața exterioară a rezervorului trebuie vopsită și, la 10 m^2, avem nevoie de 1 litru de vopsea. Pot vopsi rezervorul cu 4,8 litri de vopsea? $(3{,}14 < \pi < 3{,}15)$

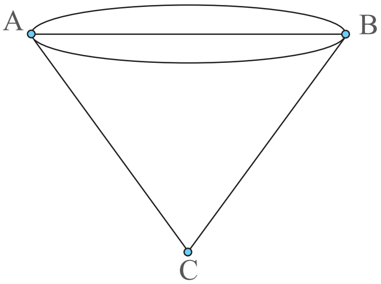


Figura 17

10. Desfășurarea pe un plan a unui con circular drept cu înălțimea de $6\sqrt{3}$ cm este un semicerc. Determină volumul conului.

6. Trunchi de piramidă regulată, trunchi de con circular drept. Sferă

Observă și descoperă!

1. În *Figura 18* este desenat un trunchi de piramidă dreaptă cu baza triunghi echilateral.

a) Dacă aria laterală a piramidei din care provine trunchiul este egală cu 100 cm^2 și aria laterală a piramidei care se elimină este egală cu 20 cm^2, determină aria laterală a trunchiului de piramidă.

b) Dacă volumul piramidei din care provine trunchiul este egal cu 100 cm^3 și volumul piramidei care se elimină este egal cu 20 cm^3, determină volumul trunchiului de piramidă.

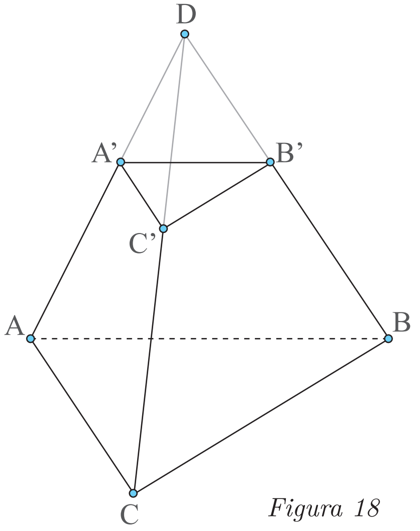


Figura 18

Important

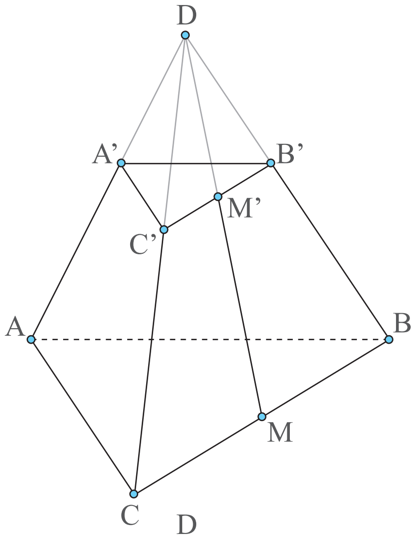
• **Aria laterală a unui trunchi de piramidă regulată** se poate determina ca diferență între aria laterală a piramidei mari și aria laterală a piramidei mici.

$$\mathcal{A}_{\text{lat.tr.de pir.}} = \mathcal{A}_{\text{lat.P}} - \mathcal{A}_{\text{lat.p}}$$

• **Aria laterală a unui trunchi de piramidă** se poate determina și cu ajutorul formulei:

$$\mathcal{A}_{\text{lat.tr.de pir.}} = \frac{(P_{\text{B}} + P_{\text{b}}) \cdot a_{tr}}{2},$$

unde P_{B} este perimetrul bazei mari, P_{b} este perimetrul bazei mici, iar a_{tr} apotema trunchiului de piramidă, MM'.



• **Aria totală a trunchiului de piramidă regulată** este suma dintre aria laterală a trunchiului de piramidă regulată și ariile celor două baze.

$$\mathcal{A}_{\text{tot.tr.de pir.}} = \mathcal{A}_{\text{lat.tr.de pir.}} + \mathcal{A}_{\text{B}} + \mathcal{A}_{\text{b}},$$

unde $\mathcal{A}_{\text{B}}$ este aria bazei mari și $\mathcal{A}_{\text{b}}$ este aria bazei mici.

• **Volumul unui trunchi de piramidă regulată** se poate determina ca diferență între volumul pirmidei mari și volumul piramidei mici.

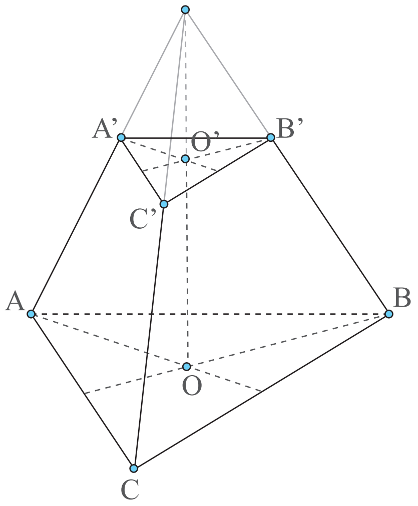
$$V_{\text{tr.de pir.}} = V_{\text{P}} - V_{\text{p}},$$

unde V_{P} este volumul piramidei mari și V_{p} este volumul piramidei mici.

• **Volumul unui trunchi de piramidă** se poate determina și cu formula:

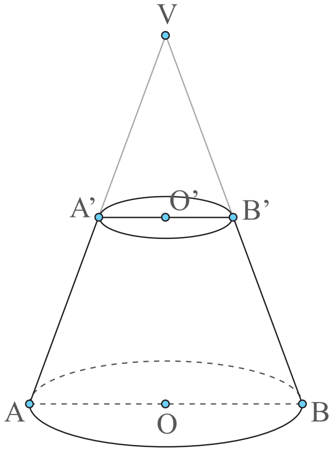
$$V_{\text{tr.de pir.}} = \frac{h}{3}\left(\mathcal{A}_{\text{B}} + \mathcal{A}_{\text{b}} + \sqrt{\mathcal{A}_{\text{B}} \cdot \mathcal{A}_{\text{b}}}\right),$$

unde $\mathcal{A}_{\text{B}}$ este aria bazei mari, $\mathcal{A}_{\text{b}}$ este aria bazei mici, iar h este înălțimea trunchiului de piramidă.



• **Aria laterală a unui trunchi de con circular drept** se poate determina ca diferență între aria laterală a conului mare și aria laterală a conului mic.

$$\mathcal{A}_{\text{lat.tr.de con}} = \mathcal{A}_{\text{lat.Con}} - \mathcal{A}_{\text{lat.con}}$$



• **Aria laterală a unui trunchi de con circular drept** se poate determina și cu formula:

$$\mathcal{A}_{\text{lat.tr.de con}} = \pi G\,(R + r),$$

unde R este raza bazei mari, r este raza bazei mici, iar G este generatoarea trunchiului de con, BB'.

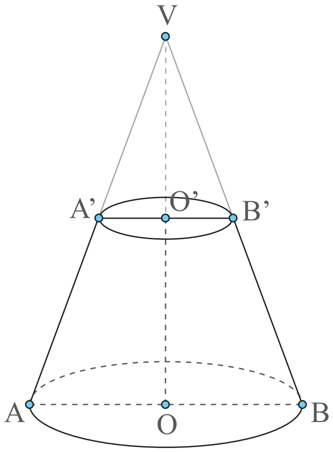
• **Aria totală a trunchiului de con circular drept** este suma dintre aria laterală a trunchiului de con circular drept și ariile celor două baze.

$$\mathcal{A}_{\text{tot.tr.de con}} = \pi G\,(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$$

• **Volumul unui trunchi de con circular drept** se poate determina ca diferență între volumul conului mare și volumul conului mic.

$$V_{\text{tr.de co}} = V_{\text{Con}} - V_{\text{con}},$$

unde V_{Con} este volumul conului mare și V_{con} este volumul conului mic.



• **Volumul unui trunchi de con circular drept** se poate determina și cu formula:

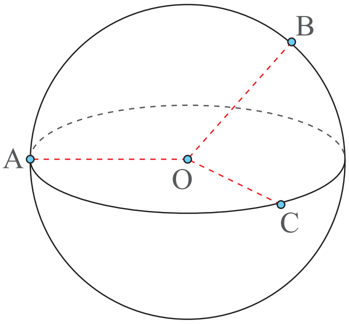
$$V_{\text{tr. de con}} = \frac{\pi h}{3}\,(R^2 + r^2 + Rr),$$

unde R este raza bazei mari, r este raza bazei mici, iar h este înălțimea trunchiului de con.

• Numim **sferă** mulțimea punctelor din spațiu egal depărtate de un punct fix numit centrul sferei.

• **Raza sferei** este distanța de la centrul sferei (punctul O) la un punct de pe sferă.

Exemplu: În figura alăturată, OA, OB și OC sunt raze.



• Aria unei sfere se determină cu formula:

$\mathcal{A}_{\text{sferă}} = 4\pi R^2$, unde R este raza sferei.

• Volumul unei sfere se determină cu formula:

$V_{\text{sferă}} = \dfrac{4\pi R^3}{3}$, unde R este raza sferei.

Exersează!

2. În *Figura 19*, $ABCDA'B'C'D'$ este un trunchi de piramidă regulată. Am notat cu L latura bazei mari, l latura bazei mici, m muchia laterală, h înălțimea, a_{tr} apotema, $\mathcal{A}_{\text{lat.}}$ aria laterală, $\mathcal{A}_{\text{tot.}}$ aria totală și V_{tr} volumul trunchiului de piramidă.

Transcrie în caiet tabelul de mai jos și completează căsuțele libere. Lungimile sunt exprimate în centimetri, ariile în centimetri pătrați și volumul în centimetri cubi.

L	l	m	h	a_{tr}	$\mathcal{A}_{\text{lat.}}$	$\mathcal{A}_{\text{tot.}}$	V_{tr}
8	2			5			
10	6	$2\sqrt{10}$					
12			4	5			
	2			4	64		
	4				72	152	
5	3						49

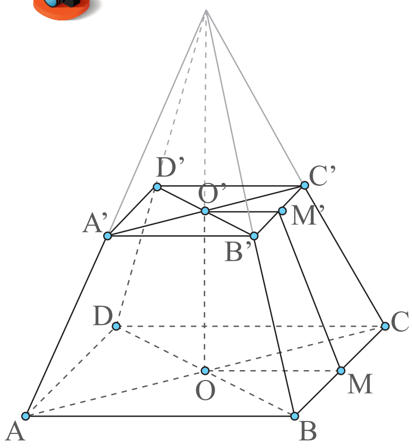


Figura 19

3. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are laturile bazelor de 3 cm, respectiv 9 cm, iar apotema piramidei din care provine trunchiul de 6 cm. Calculează:

a) aria laterală a trunchiului de piramidă.

b) volumul trunchiului de piramidă.

c) volumul piramidei din care provine trunchiul.

4. Într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată latura bazei mari este de $12\sqrt{3}$ cm, latura bazei mici $6\sqrt{3}$ cm, iar înălțimea de 4 cm. Calculează:

a) muchia laterală a trunchiului.

b) apotema trunchiului.

c) aria laterală a trunchiului de piramidă.

d) aria totală a trunchiului de piramidă.

e) volumul trunchiului de piramidă.

5. În *Figura 20* este reprezentat un trunchi de con circular drept. Am notat cu R raza bazei mari, r raza bazei mici, G generatoarea, h înălțimea, $\mathcal{A}_{\text{lat.}}$ aria laterală, $\mathcal{A}_{\text{tot.}}$ aria totală și V_{tr} volumul trunchiului de con. Transcrie în caiet tabelul de mai jos și completează căsuțele libere. Lungimile sunt exprimate în centimetri, ariile în centimetri pătrați și volumul în centimetri cubi.

R	r	G	h	$\mathcal{A}_{\text{lat.}}$	$\mathcal{A}_{\text{tot.}}$	V_{tr}
6	2		3			
7	4	5				
	2	10	6			
10		5		80π		
	4			72π	152π	
8	4					224π

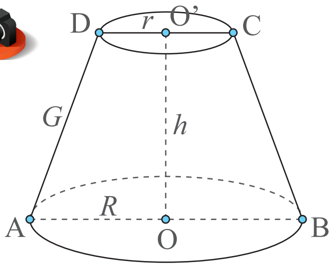


Figura 20

6. Într-un trunchi de con circular drept o generatoare formează cu planul bazei mari un unghi de 60°, iar generatoarea și diametrul bazei mici au lungimea egală cu $2a$.

a) Determină, în funcție de a, aria laterală a trunchiului de con;

b) Determină, în funcție de a, volumul trunchiului de con.

7. Determină aria și volumul unei sfere, știind că:

a) raza este de 6 cm; b) diametrul sferei este de 4 cm.

8. Determină volumul unei sfere a cărei arie este egală cu 16π cm^2.

9. Determină aria unei sfere știind că volumul sferei este egal cu $\frac{256\pi}{3}$ cm^3.

10. Determină raza unei sfere știind că aria și volumul se exprimă prin același număr real.

7. Recapitulare

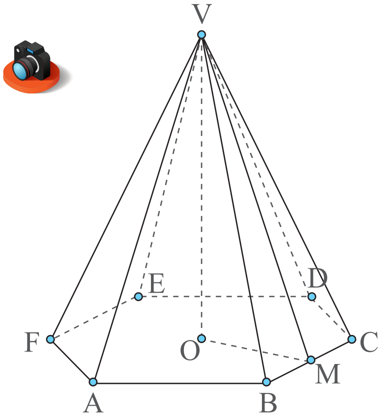


Figura 21

1. În *Figura 21*, $VABCDEF$ este o piramidă hexagonală regulată cu vârful V. Se știe că $VA = 13$ cm și $VO = \sqrt{69}$ cm, unde O este centrul bazei.

a) Arată că $AB = 10$ cm.

b) Determină lungimea apotemei VM, unde M este centrul bazei piramidei.

c) Determină cosinusul unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei.

d) Determină cosinusul unghiului format de o față laterală a piramidei cu planul bazei.

2. Se consideră paralelipipedul dreptughic $ABCDEFGH$, cu $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm și $AE = 10$ cm.

a) Determină lungimea diagonalei paralelipipedului.

b) Determină distanța de la punctul B la planul (ACG).

c) Determină măsura unghiului format de diagonala AG cu planul (ABC).

3. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de 8 cm.

a) Determină lungimea proiecției segmentului BC' pe planul (ABC).

b) Determină distanța de la punctul A la planul (BDD').

c) Determină distanța de la punctul D' la dreapta AC.

d) Determină distanța de la punctul C la planul $(C'BD)$.

4. Se consideră $ABCDA'B'C'D'$ o prismă dreaptă cu baza pătrat, cu latura bazei de $6\sqrt{2}$ cm și muchia laterală de 12 cm.

a) Determină distanța de la punctul B la drepta AC'.

b) Determină lungimea proiecției segmentului AC' pe planul (BCC').

c) Determină distanța de la punctul A la planul (BDD').

d) Determină distanța de la punctul A la planul $(A'BD)$.

5. Se consideră $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V, care are toate muchiile de 6 cm.

a) Determină lungimea proiecției segmentului VA pe planul (ABC).

b) Determină măsura unghiului format de VB cu planul (ABC).

c) Determină distanța de la centrul bazei piramidei la o față laterală.

6. Într-un vas în formă de piramidă regulată ca cel din *Figura 22*, închis ermetic, se află un lichid care se ridică până la jumătatea înălțimii. Latura bazei piramidei este de 12 dm, iar înălțimea piramidei este de 9 dm. Câți litri de lichid sunt în interiorul piramidei?

7. Se consideră trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDMNPQ$, cu muchia bazei mari $AB = 12$ cm, unghiul dintre muchia laterală și planul bazei mari are măsura de 45° și $OO' = 3\sqrt{2}$ cm, O și O' sunt centrele bazelor.

a) Determină apotema trunchiului.

b) Determină măsura unghiului dintre dreptele AM și BN.

c) Determină distanța de la punctul O la planul (NBC).

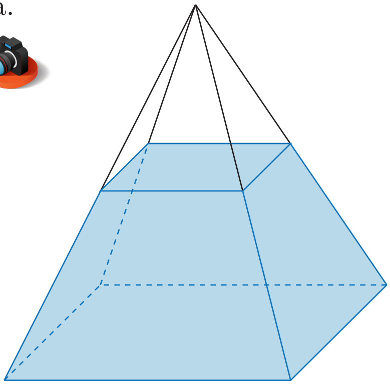


Figura 22

8. Se consideră un triunchi de con circular drept cu raza bazei mari, raza bazei mici și generatoarea direct proporționale cu numerele 3, 2 și respectiv 2. Se știe că înălțimea trunchiului de con este de $4\sqrt{3}$ cm.

a) Determină razele bazelor.
b) Determină distanța de la centrul bazei mari la o generatoare.
c) Determină tangenta unghiului format de generatoare cu planul bazei mari.

9. O piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$ cu vârful V are latura bazei de 8 cm și înălțimea de $4\sqrt{2}$ cm.

a) Determină aria laterală a piramidei.
b) Determină aria totală a piramidei.
c) Determină volumul piramidei.

10. Într-o piramidă triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful V, aria bazei este egală cu $36\sqrt{3}$ cm^2 și perimetrul unei fețe laterale este egal cu 36 cm.

a) Calculează aria laterală a piramidei.
b) Calculează aria totală a piramidei.
c) Calculează volumul piramidei.
d) Determină cosinusul unghiului format de o față laterală a piramidei cu planul bazei.
e) Determină distanța de la un vârf al bazei la o față laterală opusă a piramidei.
f) Determină sinusul unghiului diedru dintre două fețe laterale ale piramidei.

11. Un cilindru circular drept are raza bazei egală cu 3 cm și generatoarea de 8 cm. Calculează aria laterală, aria totală și volumul cilindrului.

12. Dacă aria laterală a unui cilindru circular drept este egală cu 108π cm^2 și volumul este de 324π cm^3, determină raza, înălțimea și aria totală a cilindrului.

13. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat care are aria egală cu 196 cm^2. Calculează aria totală și volumul cilindrului.

14. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are apotema de 8 cm, muchia laterală de 10 cm și raza cercului circumscris bazei mici $\sqrt{3}$ cm.

a) Calculează aria laterală a trunchiului.
b) Calculează volumul triunchiului.
c) Determină cosinusul unghiului format de o față laterală a trunchiului și planul bazei mari.

15. Secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept este un trapez cu diagonalele perpendiculare care are bazele de 10 cm, respectiv 24 cm.

a) Calculează aria laterală a trunchiului de con.
b) Calculează volumul trunchiului de con.

16. Determină raza unei sfere al cărei volum este egal cu cel al unui con circular drept care are înălțimea de 8 cm și generatoarea de $2\sqrt{17}$ cm.

AUTOEVALUARE – În această unitate de învățare:

🟩 Am înțeles foarte bine ....
🟨 Îmi este neclar ....
🟥 Nu știu să .... / Nu am înțeles ....

Revezi lecțiile și exercițiile noțiunilor notate la culoarea galbenă. Discută cu un coleg/ o colegă sau cu profesorul despre ceea ce nu ai înțeles și ai completat la culoarea roșie.

8. Evaluare

Timp de lucru: 45 de minute

Din oficiu 10p

1. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile 3 cm, 4 cm și 6 cm.
Volumul acestui paralelipiped este egal cu: *10p*
A. 13 cm^3; B. 72 cm^3; C. 108 cm^3; D. 36 cm^3.
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

2. Un cilindru circular drept are raza bazei de 6 cm și înălțimea de 4 cm.
Volumul acestui cilindru este egal cu: *10p*
A. 96π cm^3; B. 144 cm^3; C. 24π cm^3; D. 144π cm^3.
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

3. O piramidă hexagonală regulată are aria unei fețe laterale egală cu 12 cm^2.
Aria laterală a acestei piramide este egală cu: *10p*
A. 72 cm^2; B. 144 cm^2; C. 72π cm^2; D. 36 cm^2.
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

4. Un con circular drept are raza bazei de 4 cm și generatoarea de 6 cm.
Aria laterală a acestui con este egală cu: *10p*
A. 48π cm^2; B. 144 cm^2; C. 24π cm^2 D. 144π cm^2;
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

5. În *Figura 23*, $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu muchia bazei $AB = 8$ cm și înălțimea $VO = 4\sqrt{2}$ cm, unde O este centrul bazei.
a) Arată că apotema $VM = 4\sqrt{3}$ cm, unde M este mijlocul lui BC. *5p*
b) Calculează aria totală a piramidei. *10p*
c) Determină măsura unghiului dintre o muchie laterală și planul bazei. *10p*

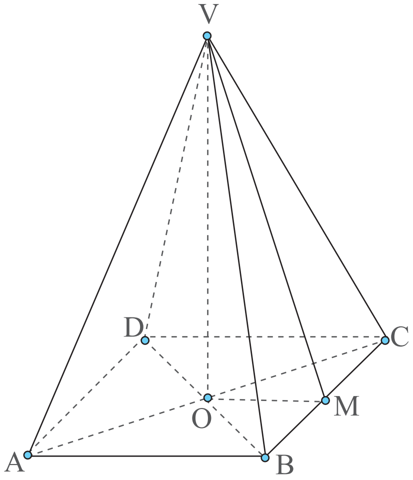


Figura 23

6. Într-un cub $ABCDA'B'C'D'$, punctul M este mijlocul muchiei BC și $A'M = 12$ cm.
a) Arată că $AB = 8$ cm. *10p*
b) Calculează tangenta unghiului determinat de diagonala BD' și planul feței (ABC). *10p*
c) Calculează distanța de la punctul C la planul $(AA'M)$. *5p*

9. Exersezi și progresezi

1. Se consideră cubul $ABCDEFGH$ cu muchia de 4 cm. a) Calculează lungimea diagonalei cubului. b) Determină distanța de la punctul B la dreapta AG. c) Determină distanța de la punctul A la planul (EBD).

2. Se consideră $ABCDA'B'C'D'$ o prismă dreaptă cu baza pătrat, cu latura bazei de $6\sqrt{2}$ cm și muchia laterală de 12 cm. a) Determină distanța de la punctul B la drepta AC'. b) Determină lungimea proiecției segmentului AC' pe planul (BCC'). c) Determină distanța de la punctul A la planul (BDD'). d) Determină distanța de la punctul A la planul $(A'BD)$.

3. Piramida hexagonală regulată $VABCDEF$ cu vârful V are latura bazei de 6 cm și apotema de $\sqrt{91}$ cm. a) Determină muchia laterală a piramidei. b) Determină înălțimea piramidei. c) Determină distanța de la V la BC. d) Determină măsura unghiului format de o față laterală cu planul bazei. e) Determină distanța de la punctul O la o față laterală, unde O este centrul bazei.

4. Se consideră trunchiul de piramidă triunghiulară regulată, $ABCA'B'C'$, în care se știe că $AB = 12\sqrt{3}$ cm, $A'B' = 8\sqrt{3}$ cm și $AA' = 5$ cm. a) Determină distanța dintre planele bazelor trunchiului de piramidă; b) Determină sinusul unghiului format de dreapta AA' cu planul (BCC').

5. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V și P un punct pe muchia BV. Se știe că $AV = 5$ cm și $AB = 6$ cm. a) Demonstrează că triunghiul PAC este isoscel. b) Determină lungimea segmentului PB pentru care perimetrul triunghiului PAC este minim. c) Determină lungimea segmentului OP, unde O este centrul bazei, pentru care aria triunghiului PAC este minimă.

6. Într-o piramidă triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful V, muchia laterală este de $4\sqrt{6}$ cm, iar lungimea apotemei piramidei este de $4\sqrt{2}$ cm. a) Calculează lungimea laturii bazei. b) Calculează lungimea înălțimii. c) Calculează volumul piramidei. d) Determină tangenta unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei.

7. Determină aria totală și volumul unui cilindru circular drept care are generatoarea de 9 cm și aria laterală de 180π cm^2.

8. Determină aria totală și volumul unui cilindru circular drept cu aria bazei de $289\pi^2$ și perimetrul secțiunii axiale de 88 cm.

9. Un cilindru circular drept are diametrul bazei de 18 cm, iar aria laterală este jumătate din aria totală. Determină generatoarea acestui cilindru.

10. Într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată, lungimea laturii bazei mari este de $18\sqrt{3}$ cm, lungimea apotemei trunchiului de 10 cm iar aria laterală de $360\sqrt{3}$ cm^2. a) Calculează volumul trunchiului de piramidă. b) Calculează aria laterală și volumul piramidei din care provine trunchiul.
c) Determină distanța de la centrul bazei mari la o față laterală.

11. Într-un trunchi de con circular drept, secțiunea axială este un trapez $ABCD$ care are $AD = DC = CB = \dfrac{BA}{2} = a$ cm. a) Determină în funcție de a, aria secțiunii axiale a trunchiului de con. b) Determină în funcție de a, volumul trunchiului de con. c) Determină în funcție de a, aria laterală a trunchiului de con. d) Determină în funcție de a, aria laterală și volumul conului din care provine trunchiul de con. e) Determină măsura unghiului dintre generatoarea și înălțimea trunchiului.

12. Aria unei sfere este egală cu 100π cm^2. Determină volumul sferei.

XI

Bun venit, vacanță!

1. Recapitulare finală

Algebră

1. Stabilește care dintre următoarele relații sunt adevărate și care sunt false:
a) $2\sqrt{5} \in (3; 4]$; b) $-2{,}4 \in (-3; 2)$; c) $-\sqrt{7} \in [-3; +\infty)$; d) $3\sqrt{3} \in (2; 4]$; e) $(1 - \sqrt{2}) \in (-1; 0]$.

2. Calculează, folosind reprezentarea pe axa numerelor, $I_1 \cap I_2$ și $I_1 \cup I_2$, știind că:
a) $I_1 = (-4; 3)$ și $I_2 = [-2; 2]$;
b) $I_1 = (-\infty; 2]$ și $I_2 = [-3{,}5; 2)$;
c) $I_1 = (-\sqrt{5}{,}4)$ și $I_2 = (-2{,}3; \sqrt{17}]$;
d) $I_1 = \left(-\frac{4}{3}; \frac{3}{4}\right)$ și $I_2 = \left[-\frac{5}{4}; \frac{4}{5}\right)$.

3. Rezolvă inecuațiile:
a) $4x - 2 > 0$;
b) $3x + 5 < 0$;
c) $|2x - 1| \leq 3$;
d) $|3x - 2| \leq 1$;
e) $x^2 + 6x + 9 \leq 4$;
f) $4x^2 + 4x + 1 \leq 9$;
g) $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x - 1} > 0$;
h) $\dfrac{9x^2 - 6x + 1}{3x - 2} < 0$.

4. O persoană a depus la o bancă o sumă de bani cu dobânda de 5% pe an. Scrie ca expresie algebrică suma de bani pe care o primește după trei ani.

5. Suma a două numere reale este 17, iar diferența pătratelor lor este egală cu 119. Determină numerele.

6. Arată că numărul $(\sqrt{6} - 2)^2 + (2\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ este natural.

7. Să se aducă la forma cea mai simplă următoarele expresii algebrice:
a) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$;
b) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
c) $(2y + 1)(4y^2 - 2y + 1)$;
d) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
e) $(z - 1)(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$;
f) $(a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$;
g) $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) - x^3 - y^3 - z^3 + 3xyz$.

8. Un triunghi dreptunghic cu aria egală cu 30 cm^2 are ipotenuza egală cu 13 cm. Determină perimetrul acestui triunghi.

9. Calculează cât mai rapid:
a) 47^2;
b) $25 \cdot 35$;
c) 101^2;
d) 999^2;
e) $105 \cdot 115$;
f) $2\,020^2$;
g) $1\,999^2$;
h) $1\,990 \cdot 2\,010$.

10. Folosindu-te de formulele de calcul prescurtat, descompune următoarele expresii algebrice:

a) x^2+6x+9; c) $4x^2+12x+9$; e) $4x^2-25$; g) x^4-18x^2+81; i) x^6+8x^3+16;
b) x^2-6x+9; d) $4x^2-12x+9$; f) $25x^4-4$; h) x^4+10x^2+25; j) x^8-32x^4+256;

11. Se consideră expresia algebrică $E(x,y)=(x^2+4xy+3y^2)(x^2+4xy+5y^2)+y^4$. Dacă $x+2y=5$, demonstrează că $E(x,y)=625$.

12. Rezolvă următoarele ecuații în mulțimea numerelor reale:

a) $4x^2+3x=0$; b) $5x^2+10x+5=0$; c) $x^2+5x+6=0$; d) $4x^2+8x+3=0$.

13. Determină numărul natural n pentru care $1+2+3+\ldots+n=666$.

14. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{x}{x^2+4x+4}+1\right):\left(1+\frac{2}{x+2}\right)+\frac{1}{x+2}$, unde $x\neq-2$. Arată că $E(x)$ este un număr natural, pentru orice număr real x, $x\neq-2$.

15. Rezolvă următoarele sisteme de ecuații, folosindu-te de formulele de calcul prescurtat:

a) $\begin{cases}x^2-2xy+y^2=169\\x^2-y^2=481\end{cases}$

b) $\begin{cases}x^2+2xy+y^2=144\\x^2-y^2=24\end{cases}$

c) $\begin{cases}x^2+4xy+4y^2=256\\4x^2+4xy+y^2=121\end{cases}$

16. Stabilește dacă punctele $A(-4,-5)$, $B(-2,-4)$ și $C(8,1)$ sunt coliniare.

17. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$.

a) Reprezintă geometric graficul funcției f, într-un sistem de axe ortogonale.

b) Determină coordonatele punctelor aflate la intersecția dintre reprezentarea geometrică a graficului funcției f și axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale.

c) Dacă punctul $D(a,a^2)$ aparține graficului funcției f, determină valorile posibile ale numărului real a.

18. Determină un set de date format din patru numere naturale scrise în ordine crescătoare cu proprietatea că media lor aritmetică este 10, mediana este 12, iar modul este 13.

Geometrie

1. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu lungimea muchiei egală cu 6 cm, în care O este centrul feței $ABCD$, iar O' centrul feței $A'B'C'D'$.

a) Realizează un desen corespunzător.

b) Demonstrează că $AD\parallel B'C'$, $BC'\parallel AD'$ și $AC\parallel A'C'$.

c) Determină măsura unghiului format de dreptele:
i) AB și BC; ii) AB' și CC'; iii) BB' și BC'; iv) $B'C$ și DC'.

d) Demonstrează următoarele relații de paralelism:
$AB\parallel(CDD'C')$, $BC\parallel(ADC'B')$ și $CC'\parallel(BB'D'D)$.

e) Calculează lungimile segmentelor AC, AC' și AO'.

f) Demonstrează că $OO' \perp (ABC)$ și $AO \perp (BDD'B')$.

g) Determină măsura unghiului format de planele:
i) $(ABB'A')$ și $(BB'D'D)$; ii) $(ABCD)$ și $(ACC'A')$.

h) Calculează distanța de la punctul B la planul:
i) $(ACC'A')$; ii) $(AB'C)$.

i) Calculează volumul cubului și volumul piramidelor $D'ABCD$ și $O'ABCD$.

j) Dacă M, N, P și Q sunt mijloacele segmentelor AO', BO', CO', respectiv DO', calculează volumul corpului $ABCDMNPQ$.

2. Se consideră tetraedrul regulat $VABC$ cu lungimea muchiei egală cu 6 cm, în care O reprezintă centrul feței ABC, iar punctele M, N și P sunt mijloacele muchiilor AB, BC, respectiv AC.

a) Realizează un desen corespunzător.

b) Determină măsura unghiului format de dreptele:
i) VB și BC; ii) VB și AC; iii) MP și AB; iv) AN și BC.

c) Demonstrează următoarele relații de paralelism: $MP \parallel (VBC)$, $MN \parallel (VAC)$ și $NP \parallel (VAB)$.

d) Calculează lungimile segmentelor AN, AO, VM și VO.

e) Demonstrează că $AB \perp (VCM)$ și că $BC \perp VA$.

f) Determină sinusul unghiului dintre planele (VAB) și (ABC).

g) Calculează distanța de la punctul A la planul (VBC).

h) Calculează volumul și aria totală a tetraedrului $VMNP$.

3. Se consideră prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ cu bazele ABC și $A'B'C'$ triunghiuri dreptunghice isoscele cu vârful în B, respectiv B', astfel încât $AA' = 3\sqrt{3}$ cm, iar $AB = 3$ cm.

a) Realizează un desen corespunzător.

b) Determină măsura unghiului format de dreptele: i) AA' și AC; ii) AA' și BC; iii) AB și $A'C'$; iv) $A'B$ și BB'; v) BC și BC'.

c) Demonstrează că $AB \perp (BCC'B')$ și că triunghiul $A'BC$ este dreptunghic.

d) Calculează lungimile segmentelor AC, AB', $B'C$ și AC'.

e) Determină sinusul unghiului dintre dreptele AC' și AC.

f) Calculează volumul și aria laterală a prismei $ABCA'B'C'$.

g) Determină distanța de la punctul B la planul $AB'C$, calculând în două moduri volumul tetraedrului $B'ABC$.

4. Se consideră un con circular drept cu vârful V, de rază 6 cm, cu centrul bazei O, iar punctele A și B sunt pe cercul bazei astfel încât AB este diametru. Înălțimea conului, VO, are lungimea de 8 cm.

a) Calculează lungimea generatoarei conului circular drept.

b) Calculează volumul și aria totală a conului circular drept.

c) Determină cosinusul unghiului dintre dreptele VA și AB.

Se consideră acum punctul O' pe segmentul VO astfel încât $VO' = 1$ cm. Secționăm conul circular drept cu un plan paralel cu baza, care trece prin punctul O'.

d) Realizează un desen corespunzător.

e) Calculează volumul și aria laterală a trunchiului de con circular drept astfel format.

2. Teste de evaluare finală

Testul 1

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

PARTEA I (40 puncte) – Pe foaia de examen se trec numai literele corespunzătoare răspunsurilor considerate corecte.

1. Rezultatul calculului $2 - 3 \cdot 2^{-2}$ este: *5p*
A. -4; B. $-\frac{1}{4}$; C. $\frac{5}{4}$; D. 14.

2. Media aritmetică a numerelor $2\sqrt{2}$ și $4 - \sqrt{8}$ este egală cu: *5p*
A. 4; B. 2; C. $4\left(\sqrt{2} - 1\right)$; D. 6.

3. Calculând $\sqrt{\left(\sqrt{5} - 3\right)^2}$ se obține: *5p*
A. $\sqrt{5} - 3$; B. 2; C. $3 - \sqrt{5}$; D. $\sqrt{5} + 3$.

4. Soluția ecuației $2x - 3 = 11$ este: *5p*
A. 4; B. 7; C. -7; D. 14.

5. În triunghiul echilateral ABC, mediana AM are lungimea de 5 cm, $M \in BC$.
Distanța de la punctul B la latura AC este egală cu: *5p*
A. 10; B. $5\sqrt{3}$; C. $5\sqrt{2}$; D. 5.

6. Într-un cub, aria unei fețe este de 50 cm^2. Lungimea diagonalei cubului este egală cu: *5p*
A. $5\sqrt{2}$; B. $5\sqrt{3}$; C. $5\sqrt{6}$; D. 5.

7. Pe un cerc cu raza de 6 cm se iau punctele A și B astfel încât arcul AB să aibă măsura de 60°. Lungimea coardei AB este egală cu: *5p*
A. 6; B. $6\sqrt{3}$; C. $6\sqrt{2}$; D. 12.

8. Pătratul $ABCD$ și triunghiul echilateral MNP au laturile congruente.
Raportul dintre aria pătratului și aria triunghiului este egal cu: *5p*
A. $\frac{4}{3}$; B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$; D. $\frac{1}{3}$.

PARTEA a II-a (50 puncte) – Pe foaia de examen se trec rezolvările complete.

1. Determină cel mai mic număr natural n care prin împărțire la numărul natural nenul p dă câtul 5 și restul 125. *5p*

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 4$.
a) Într-un sistem de axe ortogonale, reprezintă geometric graficul funcției. *5p*
b) Determină punctul, aparținând reprezentării geometrice a graficului funcției, care are abscisa egală cu ordonata. *5p*

3. a) Calculează $(x - 2)^2 + (y - 2x)^2$. *5p*
b) Determină toate perechile (x,y) de numere reale pentru care $5x^2 + y^2 - 4xy - 4x + 4 = 0$. *5p*
c) Demonstrează că $5x^2 + y^2 - 4xy - 4x + 5 > 0$, pentru orice pereche (x,y) de numere reale. *5p*

4. Pătratul $ABCD$ și triunghiul dreptunghic isoscel ABE ($\sphericalangle B = 90^\circ$) sunt situate în plane diferite. Notăm O centrul pătratului și M mijlocul ipotenuzei.
a) Realizează un desen corespunzător enunțului. *5p*
b) Arată că $EC \parallel (DOM)$. *5p*
c) Demonstrează că $AB \perp (BEC)$. *5p*
d) Știind că $AB = 6$ cm și $\sphericalangle EBC = 60^\circ$, calculează lungimea segmentului DE. *5p*

Testul 2

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

PARTEA I (40 puncte) – Pe foaia de examen se trec numai literele corespunzătoare răspunsurilor considerate corecte.

1. Rezultatul calculului $\left(21 - \frac{9}{7} \cdot \frac{14}{3}\right) : 5$ este: *5p*
A. 92; B. 1; C. 3; D. $\frac{1}{3}$.

2. Se consideră numerele $a = 1{,}234$, $b = 1{,}23(4)$, $c = 1{,}2(34)$ și $d = 1{,}(234)$.
Ordinea crescătoare a acestor numere este: *5p*
A. a, b, c, d; B. b, c, d, a; C. a, d, c, b; D. b, c, a, d.

3. Dacă 30% dintr-un număr x este 15, atunci x este egal cu: *5p*
A. 4,5; B. 45; C. 50; D. 30.

4. Media geometrică a numerelor 6 și 54 este egală cu: *5p*
A. 60; B. 18; C. $\sqrt{60}$; D. 30.

5. Aria unui triunghi echilateral cu latura de 6 cm este egală cu: *5p*
A. 18 cm^2; B. 36 cm^2; C. $3\sqrt{3}$ cm^2; D. $9\sqrt{3}$ cm^2.

6. În triunghiul dreptunghic ABC înălțimea AD $(D \in BC)$ trece prin mijlocul lui BC.
Dacă $AD = 6$ cm, atunci aria triunghiului ABC este egală cu: *5p*
A. 60 cm^2; B. 18 cm^2; C. $2\sqrt{15}$ cm^2; D. 36 cm^2.

7. Un cerc are diametrul de 8 cm. Lungimea cercului este egală cu: *5p*
A. 8π cm; B. 64π cm; C. 16π cm; D. 16 cm.

8. În tabelul de mai jos este prezentată repartiția elevilor unei clase a VIII-a, în funcție de notele obținute la un test de matematică.

Nota	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	1	1	3	6	6	8	2	1	1

Conform tabelului, media aritmetică a notelor la acest test este: *5p*
A. 29; B. 6; C. 4,4; D. 7.

PARTEA a II-a (50 puncte) – Pe foaia de examen se trec rezolvările complete.

1. Mai mulți copii vor să cumpere un obiect. Dacă fiecare participă cu 20 de lei nu ajung 5 lei. Dacă fiecare participă cu 30 de lei sunt în plus 25 de lei.
a) Câți copii sunt? *5p*
b) Câți lei costă obiectul? *5p*

2. Împărțind numărul natural x la numărul natural y obținem câtul 4 și restul 22.
Arată că $x + y \geq 137$. *10p*

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{3} + 1$.
a) Calculează $f(\sqrt{3}) - f(-\sqrt{3})$. *5p*
b) Determină măsura unghiului format de reprezentarea geometrică a graficului funcției și axa Ox a sistemului de axe ortogonale. *5p*

4. Se consideră A, B, C și D patru puncte necoplanare astfel încât $AB = AC$ și $DB = DC$, iar M este mijlocul segmentului BC.
a) Realizează un desen corespunzător enunțului. *5p*
b) Demonstrează că $BC \perp (AMD)$. *5p*
c) Determină măsura unghiului dintre dreptele BC și AD. *5p*
d) Dacă triunghiurile ABC și DBC sunt dreptunghice în A, respectiv D, demonstrează că există un punct O egal depărtat de punctele A, B, C și D. *5p*

Testul 3

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

SUBIECTUL I – Pe foaia de examen scrie numai rezultatele

1. Rezultatul calculului $12 : 3 \cdot 2$ este egal cu *5p*

2. Dintre numerele $a = 2{,}23$ și $b = \sqrt{5}$ mai mic este numărul *5p*

3. Numărul de elemente din mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \leq 3\}$ este egal cu *5p*

4. În *Figura 1* este reprezentat graficul mișcării unui mobil timp de 4 ore. *5p*

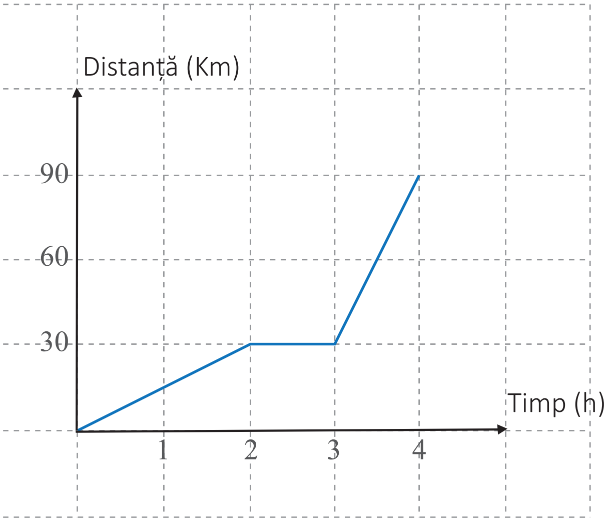


Figura 1

Viteza medie cu care s-a deplasat mobilul în ultimele două ore este egală cu .... km/h.

5. Un pătrat are diagonala egală cu $4\sqrt{2}$ cm. Perimetrul pătratului este egal cu .... cm. *5p*

6. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile 3 cm, 4 cm, respectiv 12 cm.
Lungimea diagonalei paralelipipedului este egală cu .... cm. *5p*

SUBIECTUL al II-lea – Pe foaia de examen scrie rezolvările complete

1. Desenează o piramidă triunghiulară regulată $VABC$ și apotema acesteia, VM $(M \in BC)$. *5p*

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (2a+3)x + 1$.
Pentru $a = -1$, arătă că $f(n) \cdot f(n+2) + 1$ este pătrat perfect, oricare ar fi n număr natural. *5p*

3. Numerele naturale $a,\ b$ și c sunt direct proporționale cu $2,\ 3$, respectiv 5.
Cât la sută din $b + c$ reprezintă a? *5p*

4. Într-o expediție participă de două ori mai mulți geologi decât biologi. După o săptămână pleacă 20 de geologi și sosesc 18 biologi. Astfel numărul geologilor devine egal cu numărul biologilor.
a) Câți biologi au fost la începutul expediției? *5p*
b) Câți specialiști (geologi și biologi) au participat la lucrările expediției în a doua săptămână? *5p*

5. Dacă x este număr real nenul astfel încât $x - \dfrac{1}{x} = 3$, calculează $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$. *5p*

SUBIECTUL al III-lea – Pe foaia de examen scrie rezolvările complete

1. Într-o cutie în formă de cub cu muchia de 4 dm se introduce o piramidă patrulateră regulată având baza egală cu o față a cubului și muchia laterală egală cu $2\sqrt{11}$ dm.

a) Se poate închide capacul cutiei? Justifică răspunsul dat. *5p*

b) Dacă capacul se sprijină pe vârful piramidei, determină măsura unghiului format de planul capacului cu baza piramidei (*Figura 2*). *5p*

c) În spațiul rămas liber, din cutie, se introduce apă (*Figura 3*). Câți litri de apă se introduc în cutie? *5p*

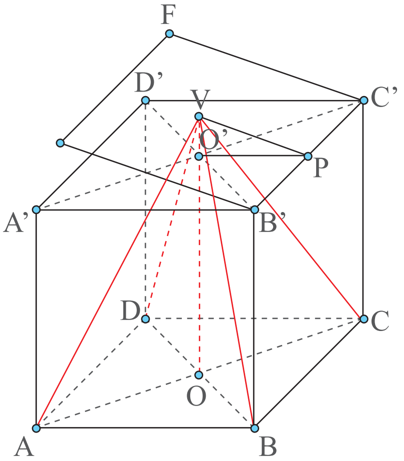


Figura 2

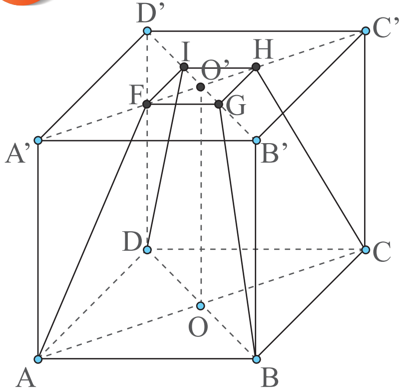


Figura 3

2. Un mobil M se deplasează în linie dreaptă, între punctul de plecare A și punctul de sosire B. Un observator aflat în punctul O vede punctele A și B sub un unghi de 90°, ca în *Figura 4*.

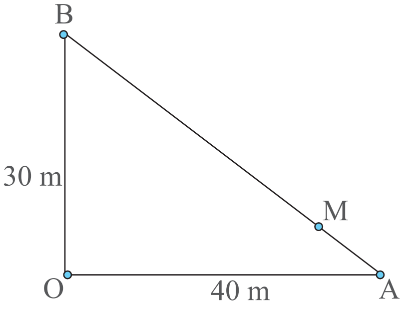


Figura 4

a) Calculează distanța dintre punctele A și B. *5p*

b) Determină poziția mobilului M când distanța dintre acesta și observatorul O este egală cu jumătate din distanța dintre A și B. Justificați răspunsul. *5p*

c) Determină cea mai mică distanță dintre observator și mobil. *5p*

Testul 4

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

SUBIECTUL I – Pe foaia de examen scrie numai rezultatele

1. Rezultatul calculului $6 + 15 : 3$ este egal cu *5p*

2. Dintre numerele $a = 4{,}2$ și $b = 4{,}12$ mai mare este numărul *5p*

3. Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 7\}$. Scrisă ca interval mulțimea A este *5p*

4. Calculând 20% din 360 se obține *5p*

5. Un triunghi echilateral are latura de 6 cm. Aria triunghiului este egală cu .... cm^2. *5p*

6. Diagonala unui cub are lungimea $4\sqrt{3}$ cm. Aria totală a cubului este egală cu .... cm^2. *5p*

SUBIECTUL al II-lea – Pe foaia de examen scrie rezolvările complete

1. Desenează o piramidă triunghiulară regulată. *5p*

2. Suma a două numere naturale este 48. Determină numerele știind că împărțind unul dintre numere la celălalt se obține câtul 3 și restul 4. *5p*

3. Simplifică fracția $\dfrac{(x^2+2x)(x^2+2x+2)+1}{(x^2-1)^2}$. *5p*

4. a) Reprezintă geometric graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$, într-un sistem de axe ortogonale; *5p*

b) Fie punctele $A\,(0, f(0))$ și $B\,(2, f(2))$. Determină coordonatele punctului C situat pe axa Ox astfel încât $AC = BC$. *5p*

5. Determină valoarea minimă a expresiei algebrice $E(x) = x^2 + 8x + 6$. *5p*

SUBIECTUL al III-lea – Pe foaia de examen scrie rezolvările complete

1. Un vas are forma unei prisme drepte $ABCDA'B'C'D'$ cu baza dreptunghi.
Dimensiunile exterioare ale vasului sunt $AB = 18$ cm, $BC = 10$ cm și $AA' = 21$ cm.
Grosimea vasului este de 1 cm.

a) Câți litri de apă intră în vas? *5p*

b) Toată suprafața vasului, atât la exterior cât și la interior, se vopsește. Câte grame de vopsea sunt necesare, dacă pentru 1 cm^2 avem nevoie de 4 g de vopsea? *5p*

c) În vasul plin cu apă se introduce un corp, apoi acesta este scos. După aceste operații în vas rămân 2 litri de apă. Ce volum are corpul introdus în apă? *5p*

2. Un steag are forma din *Figura 1*. Știm că $AB = 24$ cm, $AE = 18$ cm și $AM = MN = NB$, se cere:

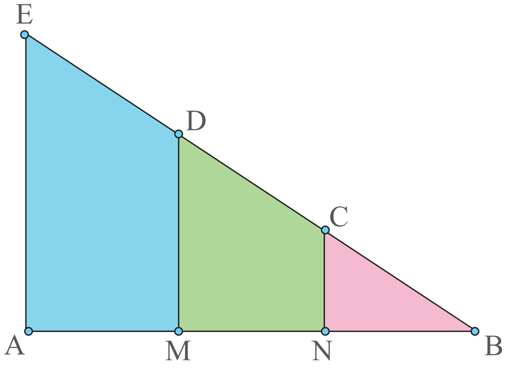


Figura 1

a) Arată că $CN = 6$ cm și $DM = 12$ cm; *5p*

b) Calculează aria suprafeței ocupată de fiecare culoare; *5p*

c) Cât la sută din suprafața totală a steagului reprezintă culoarea verde? *5p*

Testul 5

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

SUBIECTUL I – Pe foaia de examen scrie numai rezultatele

1. Rezultatul calculului $3\sqrt{3}-\sqrt{27}$ este egal cu *5p*

2. Se dau mulțimile $A=\{-1,\ 1,\ 2\}$ și $B=\{0,\ 2,\ 4,\ 6\}$. Mulțimea $A\cap B$ este egală cu *5p*

3. Se aruncă un zar. Probabilitatea ca pe fața de sus a zarului să apară un număr mai mare sau egal cu 4 este egală cu *5p*

4. În tabelul de mai jos sunt rezultatele unui test de matematică la o clasă a VIII-a.

Număr de elevi	2	3	4	5	7	4	3	2
Nota obținută	3	4	5	6	7	8	9	10

Media clasei la acest test este egală cu *5p*

5. Bazele unui trapez au lungimile de 15 cm și 7 cm. Linia mijlocie a trapezului are lungimea egală cu .... cm. *5p*

6. O piramidă regulată are apotema egală cu 10 cm și perimetrul bazei egal cu 40 cm. Aria laterală a acestei piramide este egală cu .... cm^2. *5p*

SUBIECTUL al II-lea – Pe foaia de examen scrie rezolvările complete

1. Desenează un paralelipiped dreptunghic. *5p*

2. Fie a și b două numere naturale astfel încât 20% din a reprezintă $\frac{4}{5}$ din b. Determină cele două numere știind că suma lor este 70. *5p*

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=5x+21$. Determină coordonatele punctului, aparținând reprezentării geometrice a graficului funcției, care are ordonata egală cu dublul abscisei. *5p*

4. a) Arată că $\frac{2x+6}{x^2+4x+3}=\frac{2}{x+1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,\ -3\}$. *5p*

b) Determină numerele întregi a pentru care $\frac{2a+6}{a^2+4a+3}$ este număr întreg. *5p*

5. Arătă că nu putem alege 34 de numere naturale nenule diferite și nedivizibile cu 3 a căror sumă să fie 866. *5p*

SUBIECTUL al III-lea – Pe foaia de examen scrie rezolvările complete

1. Un acoperiș are forma unei piramide patrulatere regulate $VABCD$, cu vârful V, în care muchia laterală $VA=10$ m și apotema $VM=5\sqrt{3}$ m, unde M este mijlocul lui BC.

a) Arătă că $AB=10$ m. *5p*

b) Determină măsura unghiului determinat de dreapta VB cu planul bazei (ABC). *5p*

c) O furnică pleacă din M, ajunge pe latura DC și de acolo în vârful V. Află lungimea minimă a drumului parcurs de furnică. *5p*

2. Dintr-o bucată de tablă având forma unui triunghi echilateral cu latura de 10 cm se decupează un dreptunghi $MNPQ$ după cum se vede în *Figura 1*.

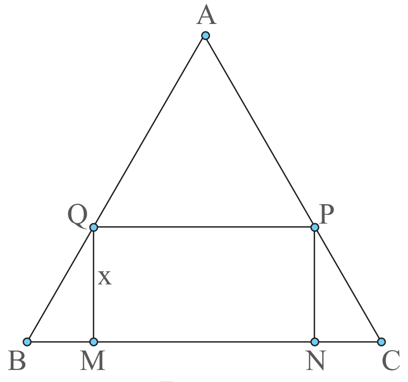


Figura 1

a) Dacă $MQ=x$, arătă că $MN=\frac{30-2x\sqrt{3}}{3}$. *5p*

b) Dacă $MNPQ$ este pătrat, arătă că $x=10(2\sqrt{3}-3)$. *5p*

c) Dacă $MN=MQ\sqrt{3}$ calculează cât la sută din aria triunghiului reprezintă aria dreptunghiului. *5p*

Testul 6

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

SUBIECTUL I – Pe foaia de examen scrie numai rezultatele

1. Rezultatul calculului $\frac{1}{2}+\frac{5}{4}:\frac{5}{2}$ este *5p*

2. Dacă $a\sqrt{3}=\sqrt{243}$, atunci $a=$.... . *5p*

3. Dintre numerele $a=5\sqrt{3}$ şi $b=6\sqrt{2}$ mai mare este *5p*

4. Perimetrul unui pătrat este egal cu 20 cm. Aria pătratului este egală cu .... cm^2 *5p*

5. Fie $ABCDEFGH$ un cub. Măsura unghiului dintre dreptele AB şi BG este egală cu ....° *5p*

6. În tabelul din *Figura 1* sunt redate temperaturile din timpul nopţii şi din timpul zilei, într-o săptămână din luna decembrie.

	Luni	Marţi	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Noaptea	2	1	−1	−1	0	1	1
Ziua	10	7	5	8	8	9	9

Figura 1

Cea mai mare diferenţă de temperatură s-a înregistrat *5p*

SUBIECTUL al II-lea – Pe foaia de examen scrie rezolvările complete

1. Desenează pe foaia de examen un tetraedru regulat şi notează-l $ABCD$. *5p*

2. Scrie ca interval mulţimea $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -2<-2x+4\leq 5\}$. *5p*

3. Se consideră $a=|1-\sqrt{2}|$ şi $b=|\sqrt{2}-2|$. Calculează media aritmetică a celor două numere. *5p*

4. Se consideră expresia algebrică $E(x,y)=x^2+4y^2-6x+4y+10$

a) Calculează $(x-3)^2$. *5p*

b) Arată că $E(x,y)=(x-3)^2+(2y+1)^2$. *5p*

c) Dacă $E(a,b)=1$, arată că $a\in[2,4]$ şi $b=[-1,0]$. *5p*

SUBIECTUL al III-lea – Pe foaia de examen scrie rezolvările complete

1. În *Figura 2*, triunghiurile ABC şi ABD sunt dreptunghice în B şi sunt situate în plane diferite. Punctele E, F, G sunt mijloacele segmentelor AB, AC, respectiv AD.

a) Stabileşte poziţia dreptei CD faţă de planul (EFG). *5p*

b) Arată că $AB\perp CD$. *5p*

c) Dacă $\mathcal{A}_{\triangle EFG}=2\ \text{cm}^2$, află aria triunghiului BCD. *5p*

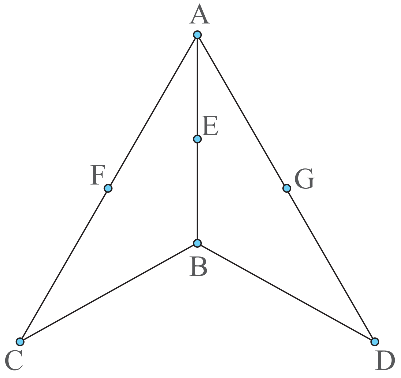


Figura 2

2. În piramida patrulateră regulată $VABCD$ muchia $VA=8$ cm şi înălţimea $VO=4\sqrt{2}$ cm, unde $\{O\}=AC\cap BD$.

a) Arată că $AB=8$ cm. *5p*

b) Calculează lungimea apotemei piramidei. *5p*

c) Determină distanţa de la punctul B la muchia VD. *5p*

Programa școlară poate fi accesată la adresa http://programe.ise.ro

Matematică

ISBN: 978-606-9030-15-8