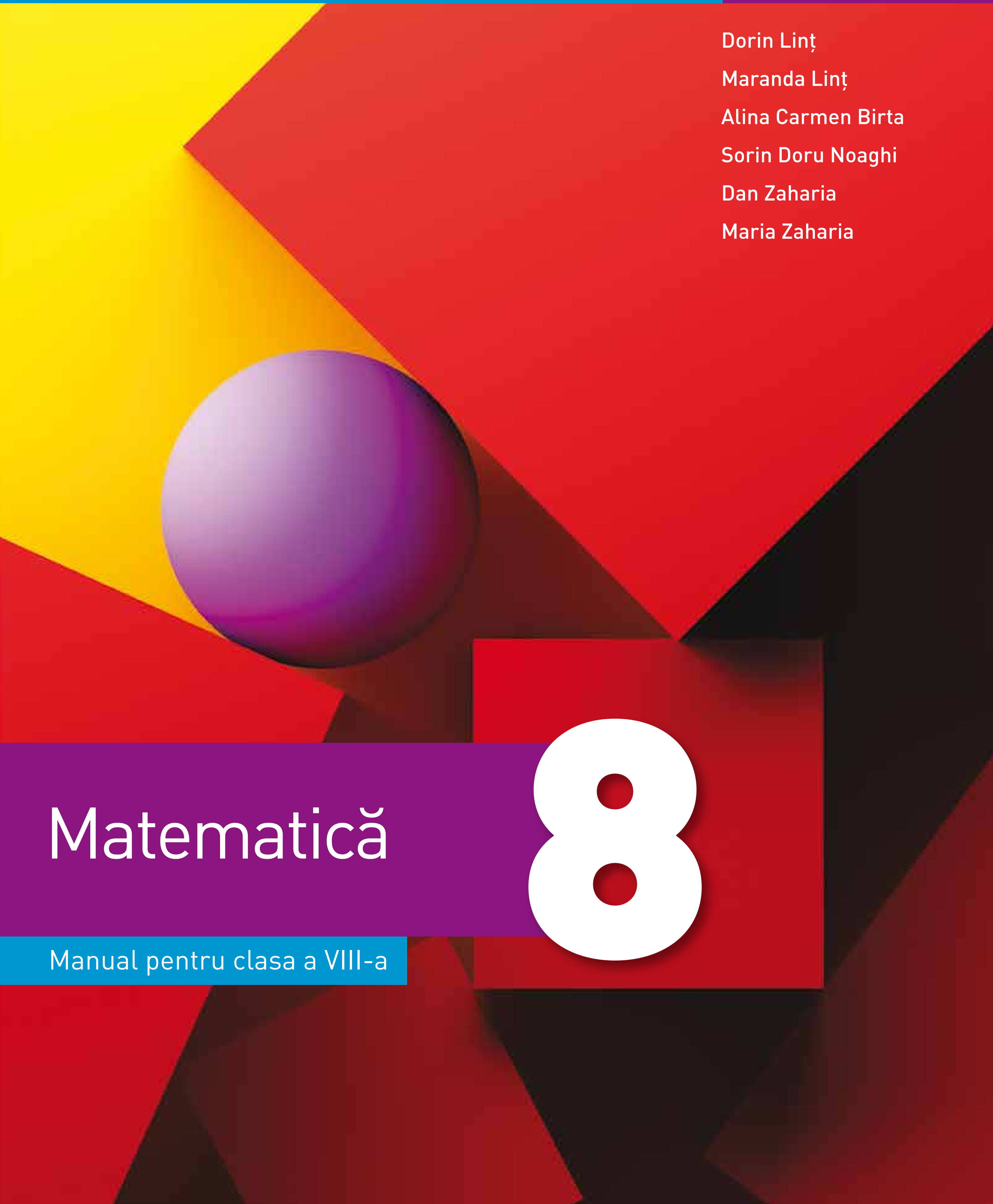
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

LITERA

Dorin Linț
Maranda Linț
Alina Carmen Birta
Sorin Doru Noaghi
Dan Zaharia
Maria Zaharia



Matematică

8

Manual pentru clasa a VIII-a

116.111 – numărul de telefon de asistență pentru copii

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

LITERA

Dorin Linț
Maranda Linț
Alina Carmen Birta
Sorin Doru Noaghi
Dan Zaharia
Maria Zaharia

Matematică

8

Manual pentru clasa a VIII-a

Manualul școlar a fost aprobat prin ordinul ministrului educației și cercetării nr. 5523/07.09.2020.

Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și digital, și este transmisibil timp de patru ani școlari, începând cu anul școlar 2020–2021.

Inspectoratul școlar ....

Școala/Colegiul/Liceul ....

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*			
				format tipărit		format digital	
				la primire	la predare	la primire	la predare
1							
2							
3							
4							

* *Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: nou, bun, îngrijit, neîngrijit, deteriorat.*

- Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Matematică. Manual pentru clasa a VIII-a
Dorin Linț, Maranda Linț, Alina Carmen Birta, Sorin Doru Noaghi, Dan Zaharia, Maria Zaharia

Referenți științifici: lector univ. dr., Marius-Nicolae Heljiu, Departamentul de Matematică-Informatică, Facultatea de Științe, Universitatea din Petroșani
prof. dr. Dan-Ștefan Marinescu, Colegiul Național „Iancu de Hunedoara”, Hunedoara

LITERA®
Editura Litera
O.P. 53; C.P. 212, sector 4, București, România
tel.: 021 319 63 90; 031 425 16 19; 0752 548 372
e-mail: comenzi@litera.ro

Ne puteți vizita pe
www.litera.ro

Editor: Vidrașcu și fiii
Redactori: Carmen Birta, Gabriela Niță
Corector: Carmen Bîtlan
Credite foto: Dreamstime, Shutterstock
Copertă: Vlad Panfilov
Tehnoredactare și prepress: Banu Gheorghe

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică : manual pentru clasa a VIII-a / Dorin Linț, Maranda Linț, Alina Carmen Birta, … – București : Litera, 2020
ISBN 978-606-33-5481-6

I. Linț, Dorin
II. Linț, Maranda
III. Birta, Alina Carmen

51

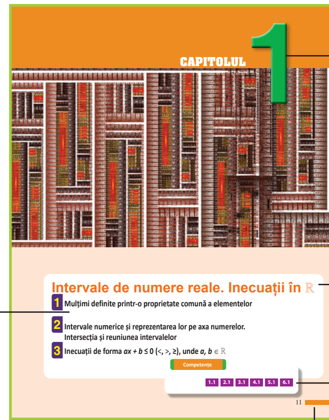
CUPRINS

Structura manualului

Varianta tipărită

Manualul de *Matematică – clasa a VIII-a* cuprinde cinci capitole, totalizând un număr de 20 de unități de învățare care respectă domeniile și conținuturile din programă. Lecțiile sunt însoțite de activități de învățare-evaluare interactive, cu caracter practic-aplicativ, care determină formarea competențelor specifice cu care acestea sunt corelate. Unitățile de învățare sunt divizate în lecții a căror parcurgere poate fi realizată în 2–6 ore de curs.

Pagina de prezentare a capitolului



Numărul capitolului

Unități de învățare

Titlul capitolului

Competențe specifice

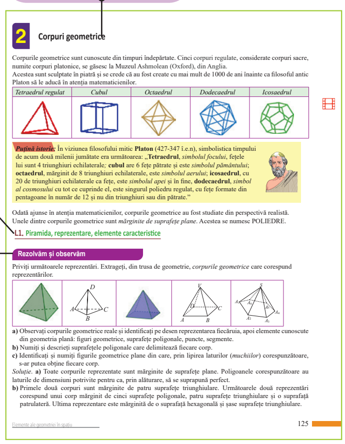
Numărul de pagină

Pagini din manual

Titlu unitate

Titlu lecție

Rezolvăm și observăm

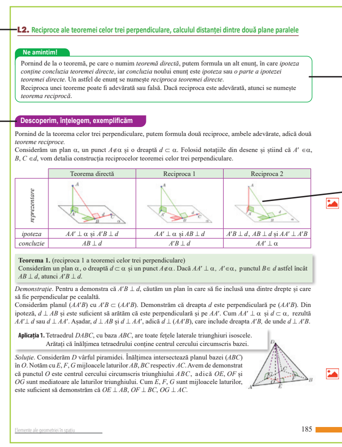


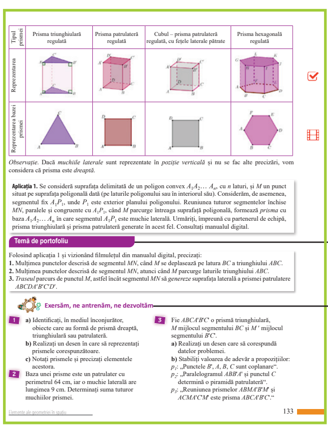
Titlu lecție

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Ne amintim

Imagini sugestive

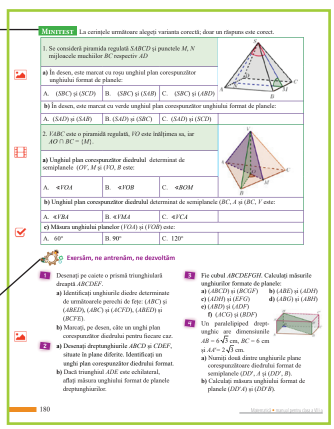




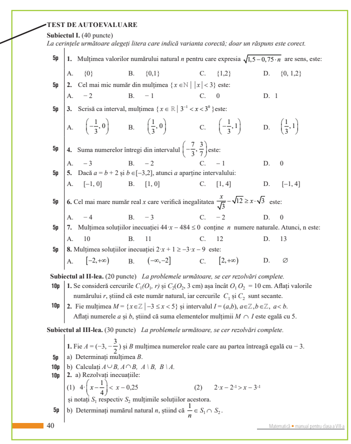
Minitest

Temă de portofoliu

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm



Test de autoevaluare



Simboluri folosite în manual

AI – Activitate individuală **AP** – Activitate în perechi **AF** – Activitate frontală **AG** – Activitate de grup

Despre rubrici

Ne amintim	concepte, cunoștințe pe care elevii le-au dobândit în lecții anterioare, în scopul valorificării achizițiilor acestora și vizând identificarea firească a noilor conținuturi prin conexiuni logice
Rezolvăm și observăm	exerciții/probleme relevante pentru *identificarea* sau *deducerea* unor elemente noi pe baza observației: proprietăți, algoritmi, implicații
Descoperim, înțelegem, exemplificăm	conținuturile prevăzute de programa școlară, însoțite de exemple concludente, comentarii, modele de rezolvare
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni	aplicații rezolvate, unele rezultate matematice remarcabile care realizează conexiuni între elementele de conținut din lecție, achiziții anterioare și viața cotidiană
Aplicație practică	activitate de grup sau individuală care presupune realizarea unor sarcini de lucru descrise
Temă de portofoliu	activitate individuală sau de grup, care constă în parcurgerea unor etape descrise, folosind modelele prezentate în manual
Să nu ne pripim!	atenționări referitoare la folosirea unor proprietăți în mod incorect/ abuziv
Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm	activități eșalonate în funcție de gradul de dificultate și de parcurgerea conținuturilor în cadrul unității de învățare
Minitest/ Test de autoevaluare	itemi de evaluare: obiectivi, semiobiectivi, subiectivi

Varianta digitală

Varianta digitală cuprinde integral conținutul manualului în variantă tipărită, având în plus exerciții interactive, jocuri educaționale, animații, filme și simulări.

Toate acestea au obiectivul de a aduce un plus de valoare cognitivă.

Paginile din manual pot fi vizionate pe desktop, laptop, tabletă, telefon, oferind o experiență excelentă de navigare.

La finalul fiecărei unități veți găsi în varianta digitală a manualului câte o fișă cu un test de autoevaluare, precum și o fișă cuprinzând indicații și răspunsuri aferente unității.

Manualul digital oferă filmulețe pentru vizualizarea generării corpurilor geometrice, simulări ale pozițiilor elementelor unor configurații spațiale, identificarea unor distanțe și a unor unghiuri folosind geometria dinamică.

AMII static	Cuprinde desene, demonstrații, fișe de răspunsuri și indicații, diagrame statice.
AMII animat	Cuprinde animații sau filme.
AMII interactiv	Cuprinde elemente educaționale cu grad înalt de interactivitate (simulări de procese, rezolvare de probleme, experiment și descoperire, prin care elevul reușește să adauge o valoare cognitivă superioară.

Competențe generale și competențe specifice conform OMEN 3393/28.02.2017

1. **Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar**
   - **1.1.** Recunoașterea apartenenței unui număr real la o mulțime
   - **1.2.** Identificarea componentelor unei expresii algebrice
   - **1.3.** Identificarea unor dependențe funcționale în diferite situații date
   - **1.4.** Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configurații spațiale
   - **1.5.** Identificarea corpurilor geometrice și a elementelor metrice necesare pentru calcularea ariei sau a volumului acestora
2. **Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale**
   - **2.1.** Efectuarea unor operații cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulțimi
   - **2.2.** Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere
   - **2.3.** Descrierea unei dependențe funcționale într-o situație dată, folosind diagrame, tabele sau formule
   - **2.4.** Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configurații spațiale date
   - **2.5.** Prelucrarea unor date caracteristice ale corpurilor geometrice studiate în vederea calculării unor elemente ale acestora
3. **Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice**
   - **3.1.** Utilizarea unor procedee matematice pentru operații cu intervale și rezolvarea inecuațiilor în R
   - **3.2.** Utilizarea formulelor de calcul prescurtat și a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuațiilor și a inecuațiilor
   - **3.3.** Reprezentarea în diverse moduri a unor funcții cu scopul caracterizării acestora
   - **3.4.** Folosirea unor proprietăți de paralelism sau perpendicularitate pentru analizarea pozițiilor relative ale dreptelor și planelor
   - **3.5.** Alegerea metodei adecvate pentru calcularea unor caracteristici numerice ale corpurilor geometrice
4. **Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată**
   - **4.1.** Folosirea terminologiei aferente noțiunilor de mulțime, de interval numeric și de inecuații
   - **4.2.** Exprimarea matematică a unor situații concrete prin calcul algebric
   - **4.3.** Utilizarea unui limbaj specific pentru formularea unor opinii referitoare la diferite dependențe funcționale
   - **4.4.** Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configurații geometrice
   - **4.5.** Utilizarea unor termeni și expresii specifice pentru descrierea proprietăților figurilor și corpurilor geometrice
5. **Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date**
   - **5.1.** Interpretarea unei situații date utilizând intervale și inecuații
   - **5.2.** Interpretarea unei situații date utilizând calcul algebric
   - **5.3.** Analizarea unor funcții în context intra și interdisciplinar
   - **5.4.** Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configurații spațiale și a calculării unor elemente metrice
   - **5.5.** Analizarea condițiilor necesare pentru ca o configurație geometrică spațială să verifice anumite cerințe date
6. **Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii**
   - **6.1.** Rezolvarea unor situații date, utilizând intervale numerice sau inecuații
   - **6.2.** Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuațiilor sau a formulelor de calcul prescurtat
   - **6.3.** Modelarea cu ajutorul funcțiilor a unor fenomene din viața reală
   - **6.4.** Modelarea unor situații practice în limbaj geometric, utilizând configurații spațiale
   - **6.5.** Interpretarea informațiilor referitoare la distanțe, arii și volume după modelarea printr-o configurație spațială a unei situații date din cotidian

Probleme recapitulative

1 Se consideră numerele:

$a = \frac{12}{\sqrt{6}} + \sqrt{(1-\sqrt{6})^2} + |-1|$ și

$b = |2-\sqrt{12}| + 2 \cdot \sqrt{(-1+\sqrt{3}-3\sqrt{6})^2}$.

a) Efectuați calculele necesare și aflați numărul $m = min\{a; b\}$, adică cel mai mic dintre numerele a și b, apoi aflați numărul $M = max\{a; b\}$, adică cel mai mare dintre numerele a și b.

b) Notând cu m_a media aritmetică, cu m_g media geometrică a numerelor a și b, și folosind formulele $m_a = \frac{a+b}{2}$, $m_g = \sqrt{a \cdot b}$, calculați cele două medii, pentru numerele a și b date.

c) Verificați șirul de inegalități $m \le m_g \le m_a \le M$, folosind rezultatele obținute la subpunctul anterior.

2 Arătați că:

a) $\sqrt{225^2 - 224 \cdot 225}$ și $\sqrt{1+3+5+7+....+35+37}$ sunt numere raționale.

b) $\sqrt{499 \cdot 500}$ și $\sqrt{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot 35 \cdot 37}$ sunt numere iraționale.

c) oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{4^n + 2^{2n+3}}$ este număr rațional, iar $\sqrt{5 \cdot n + 7}$ este număr irațional.

3 Se consideră numerele: $x = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$, $y = \sqrt{98} - \sqrt{128} + \sqrt{50}$ și

$z = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}$.

a) Calculați numerele și scrieți-le în ordine crescătoare.

b) Aflați numărul $x \cdot \sqrt{3} + |z| - y \cdot \sqrt{2}$.

4 Dacă $a = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ și $b = \sqrt{4} + \sqrt{8} - \sqrt{12}$, calculați $2 \cdot a - b$.

5 Scrieți în ordine descrescătoare numerele:

$\left(\frac{\sqrt{3}}{18}\right)^{-1}$, $3\sqrt{27}$, $|-\sqrt{75}|$.

6 Aflați numărul a care verifică egalitatea $\frac{a}{3} = \frac{a+5}{4}$.

7 Aflați numărul b știind că $b \ge 0$ și $\sqrt{4b^2} + 3 = b + \sqrt{(-5)^2}$.

8 Aflați numărul c știind că $c < 0$ și $\sqrt{\frac{9c^2}{16}} + 0,25 = c + 2$.

9 Dacă $a = \sqrt{52} + \sqrt{208}$, arătați că $a - 19 > 0$.

10 Aflați media aritmetică a nouă numere naturale nenule $a_1, a_2, ..., a_9$, știind că media aritmetică a numerelor a_1 și a_2 este 1,5, media aritmetică a numerelor a_3, a_4, a_5 este 4, iar media aritmetică a numerelor a_6, a_7, a_8, a_9 este 7,5.

11 După o reducere cu 8% din preț, un televizor se poate cumpăra cu 1288 lei.

a) Aflați prețul televizorului înainte de reducere.

b) Determinați cel mai mic număr natural p, așa încât dacă reducerea de preț ar fi fost cu p%, atunci prețul televizorului ar fi scăzut sub 1000 lei.

12 Din numărul cărților aflate în biblioteca unui liceu, 52% sunt utile pentru studiul disciplinelor umaniste, 44% sunt utile pentru studiul disciplinelor realiste, iar restul, în număr de 864, sunt albume sau dicționare.

a) Aflați numărul cărților din bibliotecă.

b) Determinați numărul minim de cărți ce trebuie achiziționate pentru ca disciplinele umaniste și cele realiste să poată utiliza același număr de cărți.

13 Se consideră numărul $A = 2^n \cdot 25^{n+1} - 9 \cdot 5^n \cdot 20^n$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Aflați numărul A pentru $n \in \{0, 1\}$.

b) Determinați valorile lui n pentru care $A < 10^6$.

14 Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemele:

a) $\begin{cases} x + \frac{y}{2} = 10 \\ \frac{x}{2} + y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2 \cdot \left(x + \sqrt{2}\right) + 3 \cdot \left(y - \sqrt{2}\right) = 10\sqrt{2} \\ \frac{x}{y} = 0,(3) \end{cases}$

15 Pe laturile triunghiului echilateral ABC se iau punctele $D \in AB$, $E \in BC$, $F \in AC$, astfel încât $DE \parallel AC$, $EF \parallel AB$ și fie P punctul de intersecție a dreptelor AE și DF. Demonstrați că:
a) $ADEF$ este paralelogram.
b) $CD = 2 \cdot AP$.
c) $BC = AD + AF$.
d) $\sphericalangle AEB - \sphericalangle CAE = 60°$.

16 În triunghiul ABC cu $\sphericalangle BAC = 90°$, cunoaștem $BC = 13$ cm și $\text{tg}\sphericalangle ACB = \frac{5}{12}$. Calculați:
a) lungimea proiecţiei catetei AC pe ipotenuză.
b) lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.
c) lungimea cercului înscris în triunghiul ABC.

17 În exteriorul triunghiului ABC se construiesc triunghiurile dreptunghice ABD și ACE astfel încât $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACE = 90°$ și $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAD$. Demonstrați că:
a) triunghiurile ABD și ACE sunt asemenea.
b) dacă $AD = AE$, atunci triunghiul ABC este isoscel.

18 Fie triunghiul ABC isoscel, cu $AB = AC$, AD bisectoarea unghiului BAC, $D \in BC$și punctul E mijlocul laturii AB. Dreapta DE intersectează paralela prin A la dreapta BC în punctul F, iar punctul G este simetricul punctului F față de A.
a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.
b) Demonstrați că: b_1) $ADBF$ este dreptunghi; b_2) $ABDG$ este paralelogram.
c) Stabiliți o relație între $AB = a$ și $BC = b$ așa încât $BCGF$ să fie poligon regulat.

19 Pe laturile AB și BC ale pătratului $ABCD$, se consideră punctele E, respectiv F, astfel încât $\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC}$.
Calculați măsura unghiului (DE, AF).

20 Se consideră trapezul isoscel ortodiagonal (are diagonalele perpendiculare), în care B este lungimea bazei mari, b este lungimea bazei mici, h reprezintă lungimea înălțimii trapezului, iar d este lungimea diagonalelor trapezului. Demonstrați că $h = \frac{B+b}{2}$ și că $h = \frac{d\sqrt{2}}{2}$.

21 În trapezul $ABCD$, cu $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, $AB = 8$ cm, $CD = 2$ cm, $AD = 4$ cm. Paralela prin D la BC intersectează AB în E, $AC \cap DE = \{F\}$, iar P este proiecția punctului F pe dreapta AD.
a) Calculați raportul dintre aria patrulaterului $BCDE$ și aria trapezului.
b) Calculați lungimea segmentului AP.
c) Demonstrați că dreptele BD și EP sunt paralele.

22 În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle C = 90°$, D este un punct pe latura AB, așa încât $AD = 10$ cm și $BD = 20$ cm.
a) Calculați raportul ariilor triunghiurilor ACD și BCD.
b) Dacă $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$, calculați lungimile segmentelor AC, BC și DC.

23 O coardă a unui cerc are lungimea de 48 cm și se află la distanța de 18 cm față de centrul cercului. Calculați lungimea cercului și aria discului în care este înscrisă coarda.

24 Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$, $r = 6$ cm, se consideră punctele A, B, cu $\sphericalangle AOB = 120°$. Pe tangenta în punctul B la cerc se ia, interiorul unghiului AOB, punctul D astfel încât $BD = 6$ cm. Cercul de centru D și rază DB intersectează a doua oară cercul $\mathcal{C}(O, r)$ în punctul P. Calculați măsurile arcelor mici $\overset{\frown}{AP}$ și $\overset{\frown}{BP}$.

25 În cercul $\mathcal{C}(O, r)$, coarda AB este paralelă cu diametrul CD și determină patrulaterul $ABCD$, iar $BO \parallel AD$. Știind că $AB = 4$ cm, calculați aria patrulaterului $ABCD$ și lungimea arcelor $\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{BC}$.

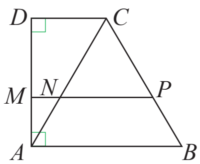
26 În triunghiul MNP, $MP = 8$ cm, $PN = 6$ cm, $\sphericalangle MPN = 60°$ și MA înălțime a triunghiului, $A \in NP$. Se construiește dreptunghiul $AMBN$. Calculați:
a) perimetrul dreptunghiului $AMBN$;
b) sinusul unghiului BPM.
c) valoarea raportului $\frac{AQ}{QM}$, Q fiind punctul de intersecție al dreptelor AM și BP.

27 Se consideră B un punct interior segmentului AC. De aceeași parte a dreptei AC se construiesc pătratele $ABMN$ și $BCEF$. Demonstrați că:
a) $AF = MC$ **b)** $AM \perp FC$.

28 În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AD = CD = BC$, $\sphericalangle B = 60°$ și $CD = 4$ cm.
a) Calculați lungimea bazei mari AB.
b) Dacă $AD \cap BC = \{P\}$, calculați valoarea raportului $\frac{PD}{PA}$.

29 Semidreapta AA' este bisectoarea unghiului BAC, $A' \in BC$, iar $A'D \parallel AC$ și $A'E \parallel AB$, $D \in AB$, $E \in AC$. Se cunoaște că $AB = 24$ cm, $AC = 36$ cm, $BC = 30$ cm.
a) Stabiliți natura patrulaterului $ADA'E$.
b) Calculați perimetrele patrulaterelor $ADA'E$ și $ADA'C$.

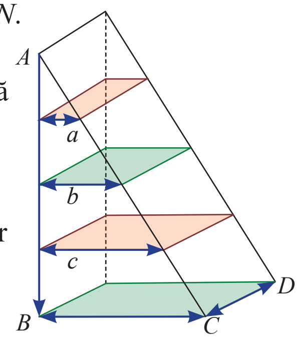
30 $ABCD$ este un trapez dreptunghic, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$ și $AB \parallel CD \parallel MN$.



a) Observă desenul și scrie un șir de rapoarte egale, justificând alegerea făcută.
b) Dacă triunghiul CNP este echilateral, iar $AD = 7\sqrt{3}$ cm, calculați aria trapezului $ABCD$.

31 Pe laturile MN și MP ale triunghiului MNP se iau punctele A, respectiv B, astfel încât $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle MPN$.
a) Demonstrați că $\Delta MAB \sim \Delta MPN$.
b) Pentru $MN = 10$ cm, $NP = 15$ cm, $MP = 12$ cm și $AB = 9$ cm, calculați perimetrul patrulaterului $ABPN$.

32 Cele patru etajere de formă dreptunghiulară din desenul alăturat sunt situate la aceeași distanță una de alta. Dacă $AB = 1{,}80$ m, iar dimensiunile etajerei de jos sunt $BC = 0{,}80$ m și $CD = 0{,}30$ m, aflați dimensiunile celorlalte etajere.



33 În rombul $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$, punctul M este proiecția punctului O pe dreapta AB. Se cunosc $AM = 1{,}8$ cm și $MB = 3{,}2$ cm. Calculați:
a) lungimea segmentului OM.
b) aria rombului.

TEST DE AUTOEVALUARE 1

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I. *Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor.*

5p **1.** Dacă $\frac{1}{x} = 0,(3)$, atunci $x = 3$.

5p **2.** Dacă $(3 - y)^2 \leq 0$, atunci $y = -3$.

5p **3.** Numărul $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^3} \cdot \sqrt{2^4}$ este rațional.

5p **4.** Numărul $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10}$ este irațional.

5p **5.** Dintre numerele $-4\sqrt{3}$ și $-5\sqrt{2}$, este mai mic $-4\sqrt{3}$.

5p **6.** Un pătrat cu diagonala de 6 cm are perimetrul de $12\sqrt{3}$ cm.

5p **7.** Segmentul MN este linie mijlocie în triunghiul ABC, $M \in AB$, $N \in AC$. Raportul dintre ariile triunghiurilor AMN și ABC este $\frac{1}{6}$.

5p **8.** Dacă $ABCDEF$ este hexagon regulat și $AD = 20$ cm, atunci $AB = 10$ cm.

Subiectul al II-lea

10p **1.** Prețul unui stilou s-a redus în două etape. În prima etapă s-a redus cu 10 lei, iar în etapa a II-a s-a redus cu 10%. Prețul final al stiloului este 27 lei. Aflați prețul inițial al stiloului.

10p **2.** $ABCD$ este un dreptunghi, $AB = 12$ cm, $BC = 9$ cm. Paralela prin punctul C la dreapta BD intersectează AD în punctul E. Calculați lungimea segmentului CE.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră ecuația $\frac{x+2}{3}-\frac{x-a}{4}=1$, $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Rezolvați ecuația pentru $a = 1$.

5p **b)** Determinați valoarea lui a astfel încât numărul 2 să fie soluție a ecuației.

2. Punctele A și B aparțin cercului $\mathcal{C}(O,r)$, distanța de la centrul cercului la dreapta AB este $\frac{r}{2}$, iar T este situat pe mediatoarea segmentului AB, în interiorul unghiului AOB, astfel încât $TO = 2 \cdot r$.

5p **a)** Calculați măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$.

5p **b)** Pentru $r = 8$ cm, calculați lungimea segmentului TA și distanța de la T la dreapta AB.

10p **c)** Demonstrați că TB este tangentă la cercul $\mathcal{C}(O, r)$.

TEST DE AUTOEVALUARE 2

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I. *Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:*

5p **1.** Numărul $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2^2}}}$ este egal cu … .

5p **2.** Rădăcina pătrată a numărului $2^2 \cdot (-3)^2 \cdot 5^4$ este … .

5p **3.** Dacă $n \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{7-2\cdot n}$ este rațional, atunci n este egal cu … .

5p **4.** Numerele care verifică egalitatea $-2 = 7 - x^2$ sunt … .

5p **5.** Raza cercului circumscris unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 8,4 cm este … cm

5p **6.** Dreptunghiul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, are $AB = 10$ cm și $BC = 3{,}2$ cm. Aria triunghiului AOD este … cm².

5p **7.** Un romb cu aria de 24 cm² și o diagonală de 6 cm, are perimetrul de … cm.

5p **8.** Dacă $ADCDEF$ este hexagon regulat, $AB = 12$ cm și $AE \cap CF = \{T\}$, atunci CT = … cm.

Subiectul al II-lea

10p **1.** Se consideră mulțimea $M = \left\{\sqrt{4}, \sqrt{14}, \sqrt{24}, \sqrt{34}, ..., \sqrt{384}, \sqrt{394}\right\}$.

a) Precizați numărul elementelor mulțimii M.

b) Determinați mulțimea $M \cap \mathbb{N}$.

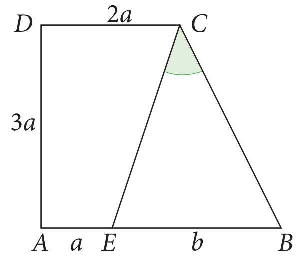
c) Stabiliți numărul elementelor mulțimii $M \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

10p **2.** Diagonalele rombului $ABCD$ sunt exprimate în centimetri, prin numere pare consecutive, $AC < BD$, iar $\mathrm{tg}\sphericalangle ABD = 0{,}75$. Calculați latura rombului.

Subiectul al III-lea

5p **1. a)** Determinați numerele reale a și b știind că $\sqrt{(\sqrt{2}-a)^2}+\sqrt{(b-\sqrt{3})^2}=0$.

10p **b)** Rezolvați în numere reale sistemul $\begin{cases} x+|y|=9 \\ 3\cdot x-(2+|y|)=-3 \end{cases}$



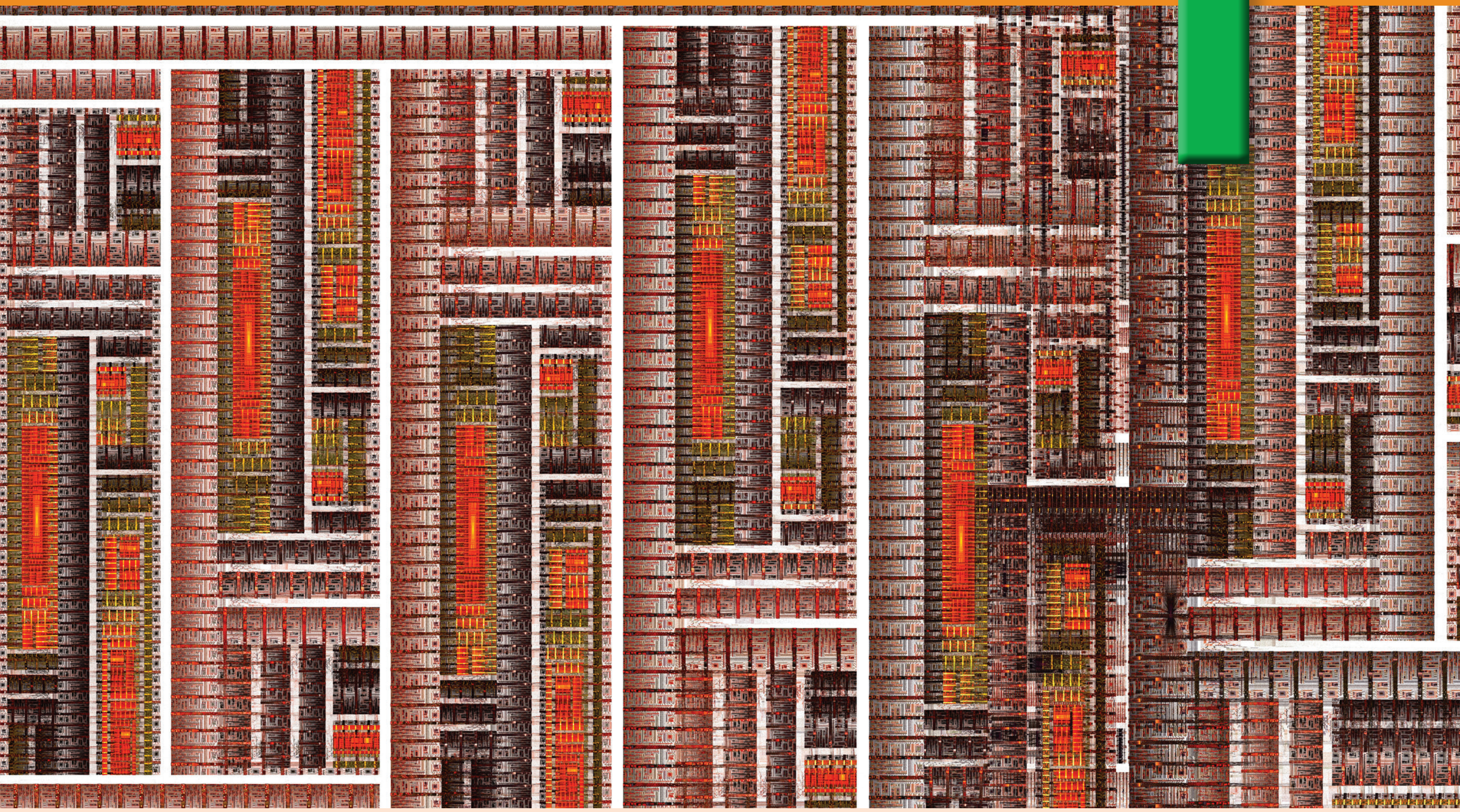
2. În figura alăturată, $ABCD$ este un trapez dreptunghic; iar $E \in AB$.

5p **a)** Calculați în funcție de a lungimea segmentului CE.

5p **b)** Stabiliți o relație între a și b așa încât $A_{BCE} = A_{AECD}$.

5p **c)** Pentru $a = 4$ cm și $b = 10$ cm, calculați măsura unghiului BCE.

CAPITOLUL 1



Intervale de numere reale. Inecuații în $\mathbb{R}$

1 Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor

2 Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor. Intersecția și reuniunea intervalelor

3 Inecuații de forma $ax + b \leq 0$ ($<, >, \geq$), unde $a, b \in \mathbb{R}$

Competențe specifice

1.1 2.1 3.1 4.1 5.1 6.1

1 Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor

L1. Mulțimi

Puțină istorie Studiul sistematic al mulțimilor a condus la **teoria mulțimilor**, devenită ulterior fundamentală în studiul matematicii. Teoria mulțimilor oferă tuturor ramurilor matematicii o bază comună. Mai mult, metodele raționamentului matematic sunt o combinație de argumente logice și de teoria mulțimilor.
Fondatorul **teoriei mulțimilor** este ***Georg Cantor***, matematician german (184–-1918).

Ne amintim!

O mulțime este o colecție de obiecte bine determinate și distincte (elementele mulțimii), considerată ca entitate.

Dacă A este o mulțime și x este un element al său, vom spune că x *aparține* mulțimii A și vom scrie $x \in A$.
Dacă x nu este element al mulțimii A, vom scrie $x \notin A$.

Pentru $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, vom scrie:
$1 \in A, 3 \in A, 5 \in A, 7 \in A, 9 \in A$.
$0 \notin A, 2 \notin A$.

Mulțimea care nu are niciun element se notează cu simbolul $\varnothing$ și se numește *mulțimea vidă*.

Mulțimea elevilor din clasa a VIII-a, care nu au absolvit clasa a VII-a, nu conține niciun element, deci este mulțimea vidă.

O mulțime care are un număr finit de elemente se numește *mulțime finită*, iar numărul elementelor sale se numește *cardinalul mulțimii*.

A = {Ana, Alexandra, Adrian} este o mulțime finită și cardinalul său este 3.
Vom scrie card $A = 3$.

O mulțime *numerică* este o mulțime ale cărei elemente sunt numere.

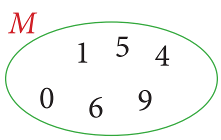
$B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ este o mulțime numerică, iar C = {alb, albastru, auriu, argintiu} este o mulțime *nenumerică*.

O mulțime poate fi definită (descrisă, dată, scrisă) astfel:

1) *enumerând elementele mulțimii*

$M = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$

2) *prin diagrame Venn-Euler*



3) *enunțând o proprietate comună a elementelor mulțimii*

$M = \{x \mid x$ poate fi ultima cifră a unui pătrat perfect$\}$

Rezolvăm și observăm

1 **AI** Se notează cu M mulțimea literelor din care este format cuvântul „*cale*”.
a) Decideți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. $l \in M$; $a \in M$; $e \in M$; $m \in M$.
b) Descrieți mulțimea M, enumerând elementele acesteia.
c) Reprezentați mulțimea M cu ajutorul unei diagrame Venn-Euler.
d) Folosind observația că **dacă *x* este un element oarecare al mulțimii *M*, atunci *x* este literă a cuvântului „cale”**, descrieți mulțimea M prin proprietatea comună a tuturor elementelor sale.

2 **AP** Se consideră mulțimile: $A = \{x \mid x$ este literă a cuvântului „*succes*”$\}$ și $B = \{x \mid x$ este cifră impară$\}$.
a) Identificați elementele mulțimilor A și B, apoi scrieți mulțimile, enumerând elementele.
b) Decideți care dintre cele două mulțimi este numerică.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1. Se consideră mulțimile:

$A = \{a \in \mathbb{Z} \mid -10 < a \leq 30\}$,

$B = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = \sqrt{a}, a \in A\}$.

a) Determinați cardinalul mulțimii A.

b) Scrieți mulțimea B, enumerându-i elementele.

Soluție. **a)** Mulțimea A conține 9 numere întregi negative, numărul 0 și 30 de numere întregi pozitive, deci card $A = 40$. **b)** Din $b \in \mathbb{Z}$ și $b = \sqrt{a}$, rezultă că a este pătrat perfect. Cum $a \in A$, obținem $a \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$, deci $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Aplicația 2. Decideți care dintre mulțimile următoare este finită și care este infinită:

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ este divizor al numărului $50\}$;

$D = \{y \in \mathbb{N} \mid 50$ este divizor al numărului $y\}$;

$E = \{t \in \mathbb{N} \mid t = 7n + 1, n \in \mathbb{N}\}$.

Soluție. $C = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$ este mulțime finită.
$D = \{0, 50, 100, 150, ...\}$ este mulțime infinită.
Pentru fiecare număr natural n, se obține un număr t, unic. Cum mulțimea $\mathbb{N}$ este infinită, rezultă că E este mulțime infinită.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Se consideră mulțimile, date prin enumerarea elementelor: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; $B = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$; $C = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$. Scrieți fiecare mulțime printr-o proprietate caracteristică a elementelor sale.

2 Scrieți mulțimile, enumerând elementele fiecăreia:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $2 \leq x < 7\}$;

$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $-3 \leq x < 2\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ și $-3 \leq x < 2\}$;

$D = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $11 < x^2 \leq 50\}$;

$E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ și $12 \leq x^2 \leq 47\}$;

$F = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ și $14 \leq 3x^2 < 122\}$.

3 Se consideră mulțimea

$$M = \left\{-7; -\frac{1}{3}; -\sqrt{4}; 0; \sqrt{2}; \sqrt{3}; 0,5; 7\right\}.$$

Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimile:

$A = \{x \in M \mid x \in \mathbb{N}\}$; $B = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}\}$;

$C = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q}\}$; $D = \{x \in M \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$.

4 Se consideră mulțimile $A = \{2, 3, 4\}$ și $B = \{1, 2, 3, 6\}$. Determinați mulțimea

$$C = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in A, b \in B\right\}.$$

5 Gândiți-vă la o mulțime care are cardinalul 5, apoi scrieți-o în cele trei forme învățate: enumerând elementele mulțimii, printr-o diagramă Venn-Euler, enunțând o proprietate comună a elementelor mulțimii.

6 Fie mulțimea $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 13 < 31\}$. Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor, folosind modelul dat:

Propoziția	*Justificare și răspuns*
$13 \in M$	$13 \in \mathbb{N}$, $13 - 13 = 0$ și $0 < 31$, deci propoziția este adevărată.
$31 \notin M$	
$44 \in M$	
$3^3 \notin M$	
$-13 \in M$	

7 Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 4 < 25$ și $2x > 10\}$.

a) Determinați elementele mulțimii.

b) Precizați, pentru fiecare dintre numerele 2; 4; 5; 11; 25; 30, dacă aparține sau nu mulțimii A.

8 Fie mulțimea $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5x^2 < 225\}$.

a) Determinați elementele mulțimii B.

b) Precizați care dintre elementele mulțimii B este cub perfect.

9 Fie mulțimea $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x^3 < 600\}$.

a) Determinați elementele mulțimii C.

b) Precizați care dintre elementele mulțimii C este pătrat perfect.

c) Precizați care sunt elementele mulțimii $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3a + 2, a \in C\}$.

L2. Relații între mulțimi. Operații cu mulțimi

A. Relații între mulțimi

Ne amintim!

1. Două mulțimi care au aceleași elemente se numesc *mulțimi egale*.
Dacă mulțimile A și B *sunt egale*, scriem $A = B$.
Dacă mulțimile A și B *nu sunt egale*, scriem $A \neq B$.

Pentru
$A = \{3, 4\}$,
$B = \{x \mid x$ este cifră a numărului $43\}$,
$C = \{2, 4\}$, au loc relațiile: $A = B$, $A \neq C$ și $B \neq C$.

2. Mulțimea A *este inclusă* în mulțimea B dacă orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B.
Dacă mulțimea A *este inclusă* în mulțimea B, scriem $A \subset B$. Se mai spune că B include pe A și scriem $B \supset A$.
Dacă mulțimea A *nu este inclusă* în mulțimea B, scriem $A \not\subset B$.

Pentru
$A = \{3, 9\}$ și $B = \{x \mid x$ este cifră în baza $10\}$, elementele 3 și 9 ale mulțimii A sunt cifre în baza 10, deci $A \subset B$ sau $B \supset A$.
Mulțimea $B = \{x \mid x$ este cifră în baza $10\}$ conține, de exemplu, elementul $x = 1$, care nu aparține mulțimii $A = \{3, 9\}$, deci $B \not\subset A$.

3. Dacă $A \subset B$, atunci mulțimea A se numește *submulțime* a mulțimii B, sau *parte* a mulțimii B.
Mulțimea vidă, notată $\varnothing$, este submulțime a oricărei mulțimi, adică: $\varnothing \subset A$ oricare ar fi mulțimea A.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, deci $\mathbb{N}$ este submulțime a mulțimii $\mathbb{Z}$, care este submulțime a mulțimii $\mathbb{Q}$, care este submulțime a mulțimii $\mathbb{R}$.
Problemă: Scrieți și alte exemple de submulțimi care rezultă din aceste incluziuni. Justificați răspunsul dat.

Rezolvăm și observăm

1 AI Se consideră mulțimile: $A = \{3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $E = \{x \mid x$ este cifră, $x \neq 9$ și $x \neq 0\}$.

a) Scrieți mulțimea E, enumerându-i elementele.

b) Copiați pe caiete, apoi completați spațiile libere astfel încât să obțineți o afirmație adevărată: „*Mulțimile … și … sunt egale deoarece au aceleași elemente*.”

c) Copiați pe caiete, apoi scrieți în dreptul fiecărui enunț (A), dacă enunțul este adevărat sau (F), dacă enunțul este fals. $B \subset C$; $C \subset B$; $B \subset D$; $A \subset B$.

2 AF Considerăm mulțimile A, B, C, D, E de la exercițiul anterior.

a) Identificați mulțimea care le include pe celelalte patru. Scrieți relațiile care justifică răspunsul dat.

b) Identificați mulțimea care este submulțime a celorlalte patru. Scrieți relațiile care justifică răspunsul dat.

Soluție. **a)** Valorificăm rezultatele obținute la exercițiul 1: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Observăm că $A \subset E$, $B \subset E$, $C \subset E$, $D = E$, deci avem $D \subset E$, deci mulțimea E este o mulțime care le include pe celelalte patru mulțimi. Cum $D = E$, rezultă că și mulțimea D le include pe toate celelalte patru.
b) Observăm că $A \subset B$, $A \subset C$, $A \subset D$, $A \subset E$, deci mulțimea A este submulțime a celor patru mulțimi.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1. AI **a)** Folosind rezultatele obținute la exercițiile 1 și 2, scrieți toate relațiile (de incluziune sau de egalitate) care au loc între mulțimile D și E.

b) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
p_1: $A \subset A$, oricare ar fi mulțimea A; p_2: $A = B \Leftrightarrow (A \subset B$ și $B \subset A)$.

Soluție.

a) $D = E$; $E = D$; $D \subset E$; $E \subset D$;

b) Orice element al mulțimii A aparține mulțimii A, deci propoziția p_1 este adevărată.

$A = B$ *dacă și numai dacă* A și B au aceleași elemente, *adică* elementele mulțimii A sunt elemente ale mulțimii B și elementele mulțimii B sunt elemente ale mulțimii A, afirmație *echivalentă* cu ($A \subset B$ și $B \subset A$). Prin urmare, $A = B \Leftrightarrow$ ($A \subset B$ și $B \subset A$), deci p_2 este propoziție adevărată.

Aplicația 2. Se notează cu E mulțimea elevilor clasei a VIII-a a unei școli gimnaziale. Se consideră mulțimile:

AF $A = \{x \in E \mid x$ participă la cercul de robotică$\}$; $B = \{x \in E \mid x$ îndrăgește fizica$\}$; $C = \{x \in E \mid x$ îndrăgește matematica$\}$. În această școală, dacă un elev participă la cercul de robotică, atunci el îndrăgește fizica, iar dacă un elev îndrăgește fizica, atunci acesta îndrăgește și matematica. Stabiliți incluziunile care au loc între mulțimile A, B, C, E.

Soluție. Se observă că, dacă $x \in A$, atunci $x \in E$, prin urmare $A \subset E$. Analog: $B \subset E$ și $C \subset E$.
Fie x un elev al clasei a VIII-a ($x \in E$):

Limbaj cotidian	*Limbaj matematic*	*Concluzie*
Dacă x participă la cercul de robotică, atunci x îndrăgește fizica.	Dacă $x \in A$, atunci $x \in B$.	$A \subset B$
Dacă x îndrăgește fizica, atunci x îndrăgește matematica.	Dacă $x \in B$, atunci $x \in C$.	$B \subset C$
Dacă x participă la cercul de robotică, atunci x îndrăgește fizica, iar dacă x îndrăgește fizica, atunci x îndrăgește și matematica.	Dacă $x \in A$, atunci $x \in B$. Din $x \in B$, rezultă $x \in C$. Deci, dacă $x \in A$, atunci $x \in C$.	$A \subset C$

Prin urmare, $A \subset B \subset C \subset E$.

B. Operații cu mulțimi

Ne amintim!

Reuniunea mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele care aparțin cel puțin uneia dintre ele: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$.

Pentru $A = \{x \mid x$ este cifră nenulă$\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$, obținem $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

Intersecția mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele comune celor două mulțimi: $A \cap B = \{x \mid x \in A$ și $x \in B\}$.

Pentru $A = \{x \mid x$ este cifră nenulă$\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$, obținem $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Dacă $A \cap B = \varnothing$, atunci A și B se numesc mulțimi *disjuncte*.

Mulțimile $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sunt disjuncte.
$\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \varnothing$.

Diferența mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele care aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B: $A - B = \{x \mid x \in A$ și $x \notin B\}$.

Pentru $A = \{x \mid x$ este cifră nenulă$\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$, obținem $A - B = \{7, 8, 9\}$.
Mulțimea numerelor iraționale este $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Aplicația 3. Fie mulțimile $A = \{x \mid x$ este cifră pară$\}$, $B = \{2, 4, 5, 7\}$ și $C = \{4, 6, 7, 9\}$.

AF **a)** Scrieți mulțimea A, enumerându-i elementele.

b) Calculați: $A \cup B$; $A \cup C$; $B \cup C$; $A - B$; $B - C$; $A \cup B \cup C$; $A \cap B \cap C$; $(A \cup C) - B$.

Soluție. **a)** $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

b) $A \cup B = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\} = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$;

$A \cup C = \{x \mid x \in A$ sau $x \in C\} = \{0, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}$; $B \cup C = \{x \mid x \in B$ sau $x \in C\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 9\}$;

$A - B = \{x \mid x \in A$ și $x \notin B\} = \{0, 6, 8\}$; $B - C = \{x \mid x \in B$ și $x \notin C\} = \{2, 5\}$;

$A \cup B \cup C = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B$ sau $x \in C\} = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

$A \cap B \cap C = \{x \mid x \in A$ și $x \in B$ și $x \in C\} = \{4\}$; $(A \cup C) - B = \{x \mid x \in A \cup C$ și $x \notin B\} = \{0, 6, 8, 9\}$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Pentru mulțimile $M = \{0, 2, 6, 12, 20\}$ și $P = \{a \mid a = x \cdot (x + 1), x \in \mathbb{N}$ și $x < 5\}$, determinați numărul afirmațiilor corecte:

a) $M \subset P$; **b)** $M = P$;

c) $P \subset M$; **d)** $M \neq P$.

2 **a)** Scrieți toate submulțimile mulțimii $A = \{a, b\}$.

b) Deduceți numărul submulțimilor unei mulțimi cu două elemente.

c) Determinați numărul submulțimilor unei mulțimi cu trei elemente.

3 Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\{-1; 0; 2\} \subset \mathbb{Z}$; **b)** $\{-\sqrt{3}; \sqrt{5}; -\sqrt{2}\} \not\subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

c) $\{-1; 3\} \subset \mathbb{N}$; **d)** $\{-4\} \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

e) $\sqrt{7} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; **f)** $\{-\sqrt{9}; 2\} \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

4 Fie mulțimile $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ și $B = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}$ și $x \leq 4\}$. Calculați: $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$ și $B - A$.

5 Fie mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $-4 \leq x < 3\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ și $-4 \leq x < 3\}$.

a) Calculați: $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$ și $B - A$.

b) Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor: $A \subset B$; $B \subset A$; $A \subset (A \cup B)$; $A \subset (B - A)$.

6 Calculați: $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$ și $B - A$ dacă:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $3 < x \leq 6\}$;

$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ și $-3 \leq x < \sqrt{5}\}$;

b) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $-2\sqrt{3} \leq x < 3\sqrt{2}\}$;

$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ și $-2\sqrt{3} \leq x < 3\sqrt{2}\}$.

7 Scrieți mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ca reuniune a două mulțimi disjuncte X și Y, astfel încât suma elementelor mulțimii X să fie egală cu suma elementelor mulțimii Y.

8 Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

$\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} \in \mathbb{N}$; $\sqrt{9^2 + 12^2} \in \mathbb{Z}$;

$\sqrt{3^3 \cdot 12} \in \mathbb{N}$; $\sqrt{225} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; $\sqrt{2\frac{1}{4}} \in \mathbb{Q}$.

9 Dacă $x = \sqrt{221 + 2 + 4 + 6 + ... + 440}$, stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

$\sqrt{x} \in \mathbb{N}$; $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$; $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{x} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$.

10 Fie mulțimea

$$A = \left\{3^2; (-1)^2; (-2)^{-3}; \sqrt{2\frac{7}{9}}; \sqrt{12}; \sqrt{0,(2)}; (-2)^3\right\}.$$

Calculați: $A \cap \mathbb{N}$; $A - \mathbb{N}$; $A \cap \mathbb{Z}$; $A - \mathbb{Z}$; $A \cap \mathbb{Q}$; $A \cap \mathbb{R}$; $A \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$; $A \cap (\mathbb{Q} - \mathbb{Z})$.

11 Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ și $C = \{3, 6, 7\}$.

Verificați dacă au loc egalitățile:

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

12 Determinați mulțimile A și B care îndeplinesc simultan condițiile:

1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

2) $A \cap B = \{3, 4, 5\}$;

3) $1 \in (A \setminus B)$;

4) $2 \in (B \setminus A)$.

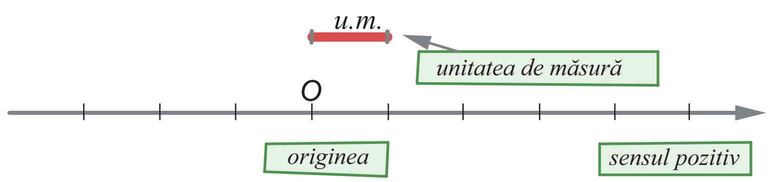
2 Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor. Intersecția și reuniunea intervalelor

L1. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor. Submulțimi ale unei drepte

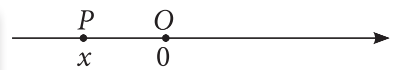
Ne amintim!

A. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor

(1) Axa numerelor este o *dreaptă* pe care am fixat un punct O, numit *origine*, un *sens pozitiv* și o *unitate de măsură.*

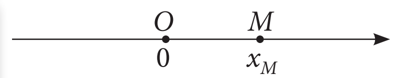


(2) Oricărui număr real îi corespunde pe axa numerelor un punct unic. Numărului real 0 îi corespunde punctul O. Dacă numărului real x îi corespunde punctul P, atunci spunem că punctul P are *coordonata* x și scriem $P(x)$.



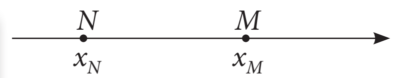
Prin definiție, $|x| = OP$.

(3) Reciproc, oricărui punct M de pe axa numerelor îi corespunde un număr real unic, notat x_M.



Din (2) și (3) rezultă că *mulțimea numerelor reale se identifică cu mulțimea punctelor unei drepte*.

(4) Dacă M și N sunt două puncte oarecare pe axa numerelor, având coordonatele x_M și x_N, atunci $MN = |x_N - x_M|$.



(5) De regulă, pentru reprezentarea numerelor *iraționale* pe axa numerelor, se folosesc aproximări zecimale ale acestora.

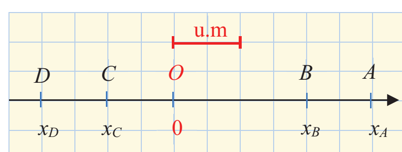
B. Submulțimi ale unei drepte

Două puncte oarecare A și B, situate pe o dreaptă d, determină segmentul AB.

Un punct oarecare A, situat pe o dreaptă d, determină două semidrepte opuse. Dacă punctele M și N aparțin dreptei d și sunt de o parte și de alta a punctului A, atunci cele două semidrepte vor fi AM, respectiv AN.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

1 **AI** Pe axa numerelor reale, considerăm punctele A, B, C, D, ca în desenul alăturat.



a) Stabiliți coordonatele punctelor A, B, C, D.

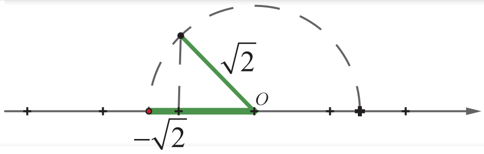
b) Folosind formula $MN = |x_N - x_M|$, calculați lungimile segmentelor AB, AC, AD, CB, DB, DC și DO.

c) Verificați rezultatele de la subpunctul precedent, *numărând pe desen unitățile de măsură* corespunzătoare lungimii fiecărui segment.

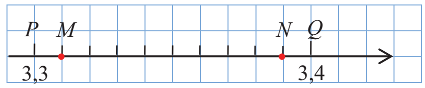
Soluție. **a)** Coordonatele punctelor A, B, C, respectiv D, sunt numerele reale $x_A = 3$, $x_B = 2$, $x_C = -1$ și $x_D = -2$.
b) Folosind formula $MN = |x_N - x_M|$, se obțin lungimile: $AB = 1$, $AC = 4$, $AD = 5$, $CB = 3$, $DB = 4$, $DC = 1$ și $DO = 2$.

2 Reprezentați pe axă numărul $-\sqrt{2}$, folosind unitatea de măsură 1 cm.

Soluție. Așa cum ați aflat în clasa a VII-a, acest număr se poate reprezenta cu fidelitate folosind compasul și considerând $\sqrt{2}$ lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic isoscel cu catetele de lungime 1.



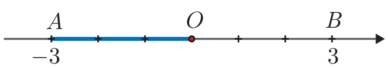
3 Copiați pe caiet desenul alăturat, folosind rețeaua de pătrățele.



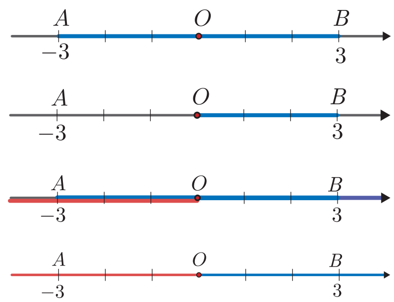
a) Determinați valoarea raportului $\dfrac{MP}{PQ}$.
b) Folosind coordonatele punctelor $P(3{,}3)$ și $Q(3{,}4)$, calculați lungimea segmentelor OM și ON, unde O este originea axei numerelor.
c) Folosind datele aflate la subpunctul precedent, precizați coordonatele punctelor M și N.
d) Aproximați numărul $\sqrt{11}$, folosind calculatorul, la sutimi, prin lipsă și prin adaos, apoi reprezentați-l pe axa numerelor, pe același desen.

Indicații. b) $PQ = OQ - OP = 3{,}4$ u.m. $- 3{,}3$ u.m. $= 0{,}1$ u.m.; $PM = \dfrac{1}{10} \cdot PQ = \dfrac{1}{100}$ u.m. $= 0{,}01$ u.m.
Atunci $OM = OP + PM = 3{,}3$ u.m. $+ 0{,}01$ u.m. $= 3{,}31$ u.m.; $ON = OP + 9 \cdot PM = 3{,}3$ u.m. $+ 9 \cdot 0{,}01$ u.m. $= 3{,}39$ u.m. (sau $ON = OQ - NQ$); c) $M(3{,}31)$ și $N(3{,}39)$.

4 Considerăm punctele $A(-3)$ și $B(3)$, pe axa numerelor reale.
a) Reprezentați segmentele AB, OA, OB, pe desene diferite.



b) Reprezentați semidreptele AB și OA pe același desen, folosind culori diferite.
c) Reprezentați semidreptele OA și OB, pe același desen, folosind culori diferite.



MINITEST La cerințele următoare, alegeți varianta corectă; doar un răspuns este corect.

1. Observă desenul alăturat.
Reprezentarea pe axă a numărului $-\sqrt{2}$ este un punct situat:

A. între M și P	**B.** între P și Q	**C.** pe semidreapta PM	**D.** pe semidreapta QN

2. Pentru $\sqrt{6}$ este adevărată relația:

A. $5 < \sqrt{6} < 6$	**B.** $2 < \sqrt{6} < 3$	**C.** $3 < \sqrt{6} < 4$	**D.** $4 < \sqrt{6} < 5$

3. Cardinalul mulțimii $M = \{\overline{ab} \mid 8 < \sqrt{\overline{ab}} < 9\}$ este:

A. 13	**B.** 14	**C.** 15	**D.** 16

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Pe axa numerelor reale, cu originea O, se consideră punctele $A(1)$, $B(2)$.

a) Desenați pătratul $OACD$. Notați cu M punctul în care cercul $\mathcal{C}(O, OC)$ intersectează semidreapta OA. Determinați coordonata punctului M.

b) Desenați pătratul $OBEF$ și notați N, P punctele în care cercul $\mathcal{C}(O, OE)$ intersectează axa. Determinați coordonatele punctelor N și P, apoi calculați lungimea segmentului NP.

2 Pe axa numerelor, cu originea O, se consideră punctele $A(1)$, $B(2)$. Împărțim segmentul AB în segmentele congruente $AP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4B$.

a) Alegeți o unitate de măsură potrivită și realizați un desen corespunzător.

b) Stabiliți coordonatele punctelor P_1, P_2, P_3, P_4.

c) Reprezentați pe axă punctele $M(\sqrt{2})$ și $N(\sqrt{3})$.

d) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor și completați tabelul de mai jos.

Propoziția	**A/F**
Punctul M aparține segmentului P_2P_3	
Punctul N aparține segmentului P_4B	
$P_2P_3 > MN$	
Mijlocul segmentului MN are coordonata un număr irațional mai mare decât 1,5.	

3 Copiați pe caiete și completați spațiile libere astfel încât să obțineți relații de forma $\overline{a,b} < x < \overline{a,(b+1)}$, unde a este un număr natural, iar b este cifră în baza 10.

a) $\ldots < \sqrt{2} < \ldots$

b) $\ldots < \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 6} < \ldots$

4 **a)** Scrieți trei numere raționale pozitive, de forma $\dfrac{a}{10}$, $a \in \mathbb{N}$, mai mici decât 1. Alegeți o unitate convenabilă și reprezentați numerele pe axă.

b) Scrieți două numere iraționale negative, de forma $-\sqrt{b}$, $b \in \mathbb{N}$, mai mari decât -2. Alegeți o unitate convenabilă și reprezentați numerele pe axă.

c) Scrieți toate numerele iraționale pozitive de forma $3-\sqrt{a}$, $a \in \mathbb{N}$. Alegeți o unitate de măsură convenabilă și reprezentați pe axă cel mai mic și cel mai mare dintre aceste numere.

5 Determinați cardinalul mulțimii
$M = \{\overline{ab} \mid -6 < -\sqrt{\overline{ab}} < -5{,}5\}$.

6 Punctele $A(1)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(7)$ sunt reprezentate pe axa numerelor, în această ordine, $b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

a) Găsiți o valoare pentru b și o valoare pentru c astfel încât $AB > CD$.

b) Arătați că nu există $b \in \mathbb{Q}$ și $c \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, astfel încât $AD = 2 \cdot BC$.

L2. Intervale de numere reale și reprezentarea lor pe axa numerelor

Comentariu interdisciplinar. Conceptul de *interval*, cu sensuri distincte, apare în multe domenii ale științei: fizică, istorie, geografie, chimie, astronomie, statistică, muzică și evident, matematică. Acest termen apare des și în limbajul cotidian al fiecăruia dintre noi, având în vedere că ne raportăm frecvent la valori ale unor mărimi situate între anumite limite.

Câteva tipuri de *intervale*

1) Un *interval de timp* este timpul scurs între două fenomene, între două evenimente, între două momente consecutive sau între momentul în care începe și cel în care se încheie un fenomen sau un eveniment. *Secolul* este un *interval* de timp cu durata de 100 de ani.

2) În muzică, *intervalele* sunt determinate de înălțimile a două sunete muzicale.
De exemplu, în gama Do Major, distanța între sunetele Do_1 și Do_2 este o octavă.

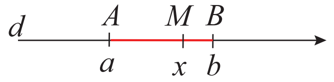
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Pe o dreaptă d oarecare, stabilim *sensul pozitiv*, *originea* și *unitatea de măsură*. Fiecărui punct de pe dreaptă îi corespunde un număr real și fiecărui număr real îi corespunde un punct pe dreapta d. În acest fel, dreapta d se identifică cu mulțimea numerelor reale și vom spune că *dreapta d este reprezentarea geometrică a mulțimii numerelor reale.*

A. Intervale mărginite

Două puncte oarecare A și B determină pe dreapta d un segment. Acestora le corespund coordonatele a și b.

Pentru $a < b$, considerăm un număr real x astfel încât $a < x < b$. Numărului real x îi va corespunde pe axa numerelor un punct M, situat între punctele A și B.



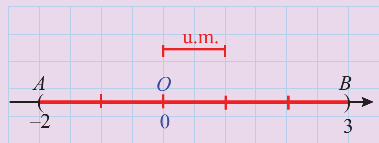
1) Pentru a și b numere reale, cu $a < b$, mulțimea tuturor numerelor reale cuprinse între a și b, adică $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $a < x < b\}$, se numește *interval deschis* determinat de numerele a și b și se notează (a, b).

Mulțimea tuturor punctelor dreptei d situate între A și B, adică $\{M \mid M \in d$ și M este situat între A și $B\}$ se numește *segment deschis* și se notează (AB).

$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $a < x < b\}$

$(-2, 3) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $-2 < x < 3\}$

$(AB) = \{M \mid M \in d$ și M este între A și $B\}$.



În desenul alăturat este reprezentat segmentul deschis (AB), cu capetele $A(-2)$ și $B(3)$.

a) Segmentul (AB) este format din totalitatea reprezentărilor geometrice ale numerelor conținute de intervalul (a, b). Vom spune că segmentul deschis (AB) este reprezentarea pe axa numerelor a intervalului deschis (a, b).

b) Intervalul (a, b) este mulțimea tuturor numerelor reale, care sunt coordonate ale punctelor situate pe segmentul (AB).

Convenție. Vom reprezenta pe axa numerelor intervalul deschis (a, b) prin segmentul deschis (AB), corespunzător acestuia.

Observație. Pentru $a = b$, $(a, b) = \varnothing$.

2) Pentru $a \le b$, mulțimea $(a, b) \cup \{a, b\}$, adică $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $a \le x \le b\}$, se numește *interval închis* determinat de numerele a și b și se notează $[a, b]$.

Mulțimea $(AB) \cup \{A, B\}$ se numește *segment închis* și se notează $[AB]$.

Convenție. Vom reprezenta pe axa numerelor intervalul închis $[a, b]$ prin segmentul închis $[AB]$, corespunzător acestuia.

Observație. Pentru $a = b$, $[a, b] = \{a\}$.

3) Mulțimea de numere $(a, b) \cup \{a\}$, adică $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $a \le x < b\}$, se notează $[a, b)$, iar mulțimea $(a, b) \cup \{b\}$, adică $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $a < x \le b\}$, se notează $(a, b]$.

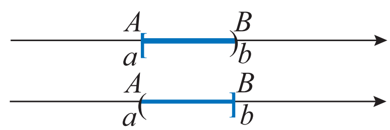
Mulțimea de puncte $(AB) \cup \{A\}$ se notează $[AB)$, iar mulțimea $(AB) \cup \{B\}$ se notează $(AB]$. Aceste mulțimi se numesc *segmente semideschise*.

Intervalul semideschis $[a, b)$ se reprezintă geometric prin segmentul semideschis $[AB)$.

Intervalul semideschis $(a, b]$ se reprezintă geometric prin segmentul semideschis $(AB]$.

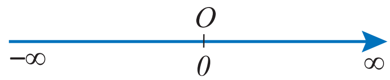
$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $a \le x < b\}$

$(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $a < x \le b\}$.



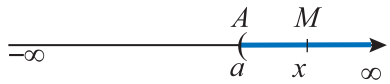
B. Intervale nemărginite

Pentru a evidenția nemărginirea dreptei reale, vom folosi simbolurile $-\infty$ (minus infinit) și $+\infty$ (plus infinit), iar axa numerelor se va reprezenta ca în desenul alăturat.



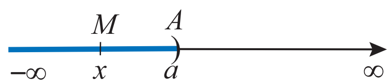
Pe dreapta d, axa numerelor reale, considerăm punctele $A(a)$ și $M(x)$.

1. Dacă punctul M este situat pe axă în dreapta punctului A, atunci mulțimea tuturor numerelor reale $x > a$, adică $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $x > a\}$, se notează $(a, +\infty)$ și se numește *interval deschis nemărginit la dreapta,* determinat de numărul real a.
Reprezentarea intervalului $(a, +\infty)$ pe axa reală este semidreapta deschisă $(AM$.



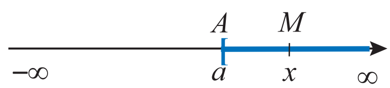
$(a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $x > a\}$

2. Dacă punctul M este situat pe axă în stânga punctului A, atunci mulțimea tuturor numerelor reale $x < a$, adică $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $x < a\}$, se notează $(-\infty, a)$ și se numește *interval deschis nemărginit la stânga,* determinat de numărul real a.
Reprezentarea intervalului $(-\infty, a)$ pe axa reală este semidreapta deschisă $(AM$.



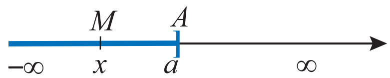
$(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $x < a\}$

3. Mulțimea $(a, +\infty) \cup \{a\}$, adică $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $x \geq a\}$, se notează $[a, +\infty)$ și se numește *interval închis nemărginit la dreapta,* determinat de numărul real a.
Reprezentarea intervalului $[a, +\infty)$ pe axa reală este semidreapta închisă $[AM$.



$[a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $x \geq a\}$

4. Mulțimea $(-\infty, a) \cup \{a\}$, adică $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $x \leq a\}$, se notează $(-\infty, a]$ și se numește *interval închis nemărginit la stânga,* determinat de numărul real a.
Reprezentarea intervalului $(-\infty, a]$ pe axa reală este semidreapta închisă $[AM$.



$(-\infty, a\,] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $x \leq a\}$

Observație. Intervalele de numere reale sunt submulțimi ale mulțimii numerelor reale.

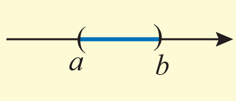
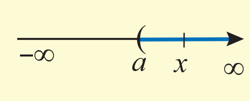
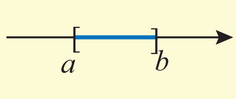
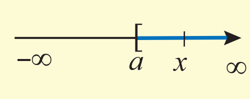
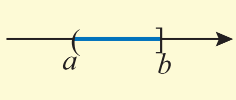
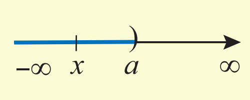
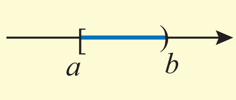
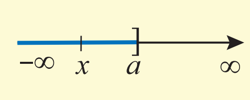
5. Mulțimea numerelor reale este un interval nemărginit atât la stânga, cât și la dreapta.

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Rezolvăm și observăm

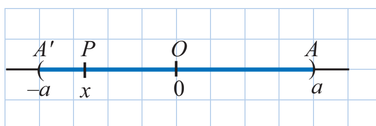
AP Studiați împreună cu partenerul de echipă tabelul următor, apoi identificați alte numere reale care aparțin, respectiv care nu aparțin intervalului, pentru fiecare exemplu.

Interval	Descrierea intervalului	Două numere reale care aparțin intervalului	Justificare	Două numere reale care nu aparțin intervalului	Justificare
$[2, 3]$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $2 \leq x \leq 3\}$	$2,(4) \in [2, 3]$ $3 \in [2, 3]$	$2 \leq 2,(4) \leq 3$ $2 \leq 3 \leq 3$	$1,9 \notin [2, 3]$ $4 \notin [2, 3]$	$1,9 < 2$ $4 > 3$
$[1, +\infty)$	$[1, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $x \geq 1\}$	$\sqrt{2} \in [1, +\infty)$ $1 \in [1, +\infty)$	$\sqrt{2} \geq 1$ $1 \geq 1$	$0 \notin [1, +\infty)$ $-\sqrt{2} \notin [1, +\infty)$	$0 < 1$ $-\sqrt{2} < 1$
$(-\infty, -3]$	$(-\infty, -3] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $x \leq -3\}$	$-4 \in (-\infty, -3]$ $-3 \in (-\infty, -3]$	$-4 < -3$ $-3 = -3$	$-2 \notin (-\infty, -3]$ $0 \notin (-\infty, -3]$	$-2 > -3$ $0 > -3$

INTERVALE MĂRGINITE		INTERVALE NEMĂRGINITE	
Intervalul	**Reprezentarea geometrică**	**Intervalul**	**Reprezentarea geometrică**
interval deschis (a, b) $(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $a < x < b\}$		interval deschis nemărginit la dreapta (a, ∞) $(a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $x > a\}$	
interval închis $[a, b]$ $[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $a \le x \le b\}$		interval închis la stânga, nemărginit la dreapta $[a, \infty)$ $[a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $x \ge a\}$	
interval semideschis $(a, b]$ $(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $a < x \le b$		interval deschis, nemărginit la stânga $(-\infty, a)$ $(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $x < a\}$	
interval semideschis $[a, b)$ $[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $a \le x < b\}$		interval închis la dreapta, nemărginit la stânga $(-\infty, a]$ $(-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $x \le a\}$	
Oricare ar fi $a > 0$, au loc echivalențele: 1) $x \in \mathbb{R}$ și $\lvert x \rvert < a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$ 2) $x \in \mathbb{R}$ și $\lvert x \rvert \le a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$		Oricare ar fi $a > 0$, au loc echivalențele: 1) $x \in \mathbb{R}$ și $\lvert x \rvert > a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a)$ sau $x \in (a, \infty)$ 2) $x \in \mathbb{R}$ și $\lvert x \rvert \ge a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a]$ sau $x \in [a, \infty)$	

Aplicație. Demonstrați, folosind reprezentarea geometrică a numerelor reale și a intervalelor de numere reale, că pentru $a \in \mathbb{R}$ și $a > 0$ au loc egalitățile:

a) $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $|x| < a\} = (-a, a)$;   **b)** $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $|x| \le a\} = [-a, a]$.



Demonstrație. **a)** Vom folosi reprezentarea intervalului $(-a, a)$ pe axa numerelor și definiția modulului unui număr real.
Reprezentarea geometrică a intervalului $(-a, a)$ este segmentul deschis $(A'A)$ cu $a = OA = OA'$. Oricare ar fi $x \in (-a, a)$, imaginea sa geometrică este $P \in (A'A)$ cu $OP < OA' = a$, adică $x \in \mathbb{R}$, și $|x| < a$, deci $x \in \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $|x| < a\}$. (1)
Fie acum $x \in \mathbb{R}$, cu $|x| < a$. Notăm cu A imaginea geometrică a numărului a și cu A' imaginea geometrică a numărului $-a$. Fie P imaginea geometrică a numărului x.
Deoarece $|x| = OP$, rezultă $OP < a$. Dar $a = OA = OA'$, deci $OP < OA$ și $OP < OA'$, ceea ce înseamnă că P aparține segmentului deschis $(A'A)$, adică $x \in (-a, a)$.
Folosind (1), se obține egalitatea mulțimilor $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $|x| < a\} = (-a, a)$. (2)
b) $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $|x| \le a\} = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $|x| < a\} \cup \{-a, a\}$ și $[-a, a] = (-a, a) \cup \{-a, a\}$; folosind egalitatea (2), rezultă $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $|x| \le a\} = [-a, a]$.

MINITEST La cerințele următoare, alegeți varianta corectă; doar un răspuns este corect.

1. Mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4\}$, scrisă ca interval, este:			
A. $(-3; 4]$	**B.** $(-3; 4)$	**C.** $(-2; 3)$	**D.** $[-2; 3]$
2. Dacă $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$, atunci B este intervalul:			
A. $(-\infty; 1)$	**B.** $(-\infty; 1]$	**C.** $[1; +\infty)$	**D.** $(1; +\infty)$
3. Intervalul $C = (-1; 7]$, scris ca mulțime de elemente cu o proprietate caracteristică, este:			
A. $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 7\}$	**B.** $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x < 7\}$	**C.** $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \le 7\}$	**D.** $\{x \in \mathbb{Q} \mid -1 < x \le 7\}$

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 **a)** Descrieți următoarele intervale, folosind proprietatea caracteristică elementelor fiecăruia dintre ele: $(-\infty,-6)$; $(-4,-2)$; $[-1, 1]$; $(2, 4]$; $[5, 7)$; $[8, \infty)$.

b) Alegeți unitatea de măsură de 0,5 cm și reprezentați pe axa numerelor intervalele de mai sus.

2 Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $2 \in [0, 3]$ **b)** $-\sqrt{2} \in (-2, -1)$

c) $5 \in (3, 5)$ **d)** $-2 \notin (-2, 0)$

e) $\sqrt{3} \in [1{,}71; 1{,}72]$ **f)** $6{,}7 \in (6; \sqrt{49})$

g) $\sqrt{169} \notin [12;13]$ **h)** $\pi \in (3; +\infty)$

3 Scrieți ca interval de numere reale mulțimile:
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x < 1\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le \sqrt{3}\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 3\}$.

4 Se consideră intervalul $I = [-2, 2]$.

a) Verificați dacă numărul rațional $-\dfrac{11}{5}$ aparține intervalului I.

b) Scrieți patru numere iraționale care aparțin intervalului. Justificați răspunsul dat.

5 Dați exemplu de un interval pentru fiecare din situațiile următoare:

a) conține numere naturale;

b) nu conține niciun număr întreg;

c) conține exact două numere naturale;

d) conține numere oricât de mari;

e) conține numere oricât de mici.

6 Folosind noțiunea de interval, descrieți următoarele enunțuri:

a) distanța d, până la școală, este cel mult 300 m;

b) masa unui pachet este de 500 g ± 10 g;

c) viteza unui avion aflat în zbor este cel puțin 100 km/h.

7 Se consideră mulțimile
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 4\}$ și $B = (-3, -\sqrt{2})$.

a) Stabiliți dacă numărul 0 este element al mulțimii A.

b) Arătați că $a > b$, oricare ar fi $a \in A$ și $b \in B$.

8 Scrieți ca intervale, apoi reprezentați pe axa numerelor, fiecare dintre mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x \le 5\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} < x < 6\}$;

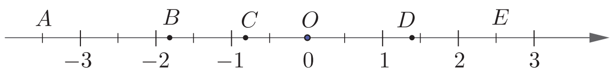
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le -3\}$;

d) $D = x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{2^{16} - 2^{15}}{4^7}\}$;

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x - \sqrt{2} \le \sqrt{8}\}$;

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -3\}$.

9 În figura de mai jos, sunt reprezentate numerele întregi $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ și punctele
$A(-\dfrac{7}{2})$, $B(-\sqrt{3})$, $C(-\dfrac{4}{5})$, $D(\sqrt{2})$, $E(\dfrac{5}{2})$.



a) Reprezentați pe caiete axa numerelor și cele 12 numere reale.

b) Scrieți mulțimea numerelor reprezentate pe axă care au abscisa în intervalul $[-1, 2]$.

c) Scrieți mulțimea numerelor reprezentate pe axă care au abscisa în intervalul $(-\infty, 0)$.

d) Scrieți mulțimea numerelor iraționale, reprezentate pe axă, care au abscisa în intervalul $(-3, 2)$.

10 Calculați suma dintre cel mai mic și cel mai mare număr întreg din intervalul:

a) $[-8, 6)$.

b) $(-\dfrac{31}{13}, \dfrac{148}{841})$.

11 Scrieți ca intervale următoarele mulțimi:
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < \dfrac{3x+8}{2} < 4\}$ și

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{6} < \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2}\}$.

12 Fie numărul $a = 7\sqrt{3} - \sqrt{75}$. Arătați că $a \in (3; 4)$.

13 Arătați că: **a)** $\dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $\dfrac{k}{n \cdot (n+k)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+k}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ și $k \in \mathbb{N}^*$.

c) Fie numărul $b = \dfrac{5}{3 \cdot 8} + \dfrac{7}{8 \cdot 15} + \dfrac{9}{15 \cdot 24}$.

Stabiliți dacă $b \in (\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{3})$.

14 Fie x un număr real din intervalul $(-1; 1)$. Arătați că $x^2 \in [0; 1)$ și $x^3 \in (-1; 1)$.

L3. Operații cu intervale de numere reale

Ne amintim!

Fie A și B două mulțimi.

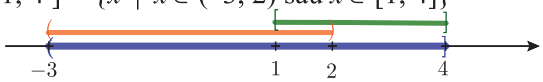
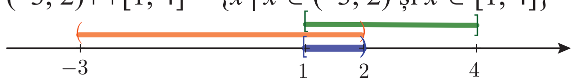
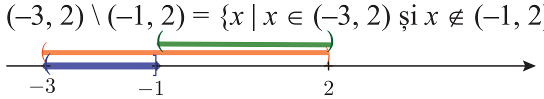
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$. $A - B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$.

Intervalele de numere reale sunt submulțimi ale mulțimii numerelor reale. În consecință, între intervale de numere reale vom defini aceleași operații ca între mulțimi.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Pentru efectuarea operațiilor cu intervale, reprezentarea pe axă a acestora este un suport intuitiv foarte util.

Aplicația 1. Calculați: **a)** $(-3, 2) \cup [1, 4]$; **b)** $(-3, 2) \cap [1, 4]$; **c)** $(-3, 2) \setminus (-1, 2)$; **d)** $(-3, \sqrt{2}) \cap (\sqrt{2}, 4]$.

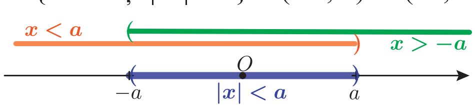
	Descriere și reprezentare geometrică	Rezultat
a)	$(-3, 2) \cup [1, 4] = \{x \mid x \in (-3, 2) \text{ sau } x \in [1, 4]\}$ 	$(-3, 2) \cup [1, 4] = (-3, 4]$
b)	$(-3, 2) \cap [1, 4] = \{x \mid x \in (-3, 2) \text{ și } x \in [1, 4]\}$ 	$(-3, 2) \cap [1, 4] = [1, 2)$
c)	$(-3, 2) \setminus (-1, 2) = \{x \mid x \in (-3, 2) \text{ și } x \notin (-1, 2)\}$ 	$(-3, 2) \setminus (-1, 2) = (-3, -1]$
d)	$(-3, \sqrt{2}) \cap (\sqrt{2}, 4] = \{x \mid x \in (-3, \sqrt{2}) \text{ și } x \in (\sqrt{2}, 4]\}$ 	$(-3, \sqrt{2}) \cap (\sqrt{2}, 4] = \varnothing$
Observație. Reuniunea, intersecția, diferența a două intervale nu au ca rezultat neapărat un interval.		

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

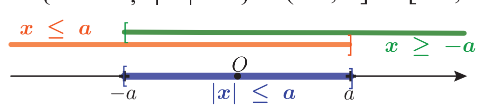
Aplicația 2.

a) Demonstrați că oricare ar fi numărul real $a > 0$, au loc egalitățile:

1. $\{x \in \mathbb{R} \text{ și } |x| < a\} = (-\infty; a) \cap (-a, \infty)$

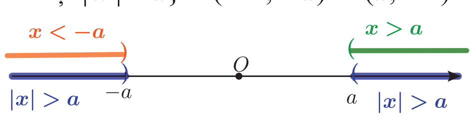


2. $\{x \in \mathbb{R} \text{ și } |x| \leq a\} = (-\infty; a] \cap [-a, \infty)$

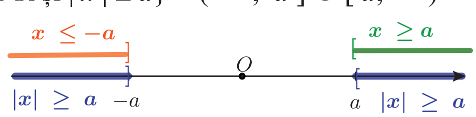


b) Demonstrați că oricare ar fi $a > 0$, au loc echivalențele:

1. $\{x \in \mathbb{R} \text{ și } |x| > a\} = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$



2. $\{x \in \mathbb{R} \text{ și } |x| \geq a\} = (-\infty; -a] \cup [a, +\infty)$



c) Demonstrați că $\{x \in \mathbb{R} \text{ și } |x| \geq 0\} = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Din b) 2, pentru $a = 0$, $\{x \in \mathbb{R} \text{ și } |x| \geq 0\} = (-\infty; 0] \cup [0, \infty) = (-\infty, +\infty)$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Scrieți sub formă de interval:

a) $[2, 5) \cup \{5\}$; **b)** $(-3, 1) \cup \{-3, 1\}$;
c) $[-2, 2] - \{-2, 2\}$; **d)** $[-4, 3] \cap [-2, 3]$;
e) $[-4, 3] \cup [-2, 3]$; **f)** $[-4, 3] - [-2, 3]$.

2 Definiți fiecare mulțime, enumerând elementele ei:

a) $[-3, 5) \cap \mathbb{N}^*$; **b)** $[-3, 5) \cap \mathbb{Z}^*$;
c) $(-3, 3) \cap \mathbb{Z}$; **d)** $[-4, 4] \cap (\mathbb{Z} - \mathbb{N})$.

3 Se dau mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $-3 < x \leq 1\}$ și $B = \{y \mid y \in \mathbb{R}$ și $-2 \leq y < 3\}$.
Dintre mulțimile $A, B, A \cup B, A \cap B, A - B, B - A, A \cap \mathbb{N}, B \cap \mathbb{Z}$, alegeți:
a) mulțimile care se pot scrie ca interval și reprezentați-le pe axa reală;
b) mulțimile finite și scrieți-le, prin enumerarea elementelor.

4 Definiți fiecare mulțime, enumerându-i elementele:

a) $[-3, 2] \cap \mathbb{N}$; **c)** $[-2, 2] \cap \mathbb{Z}^*$;
b) $\left[-5, -1\frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{Z}$; **d)** $\left(-\infty, \frac{17}{5}\right) \cap \mathbb{N}$.

5 Calculați:
a) $[-3{,}4; 2] \cap \left[-2\sqrt{3}; 1\right]$;
b) $[-2, 3] \cap [-3, 2] \cap \mathbb{Z}^*$.

6 Calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ pentru fiecare dintre perechile de intervale:
a) $A = (-2, 4)$, $B = [0, 5]$;
b) $A = (-7, 3]$, $B = [3, 6)$;
c) $A = (-\sqrt{3}, 2)$, $B = (0, \sqrt{5}]$;
d) $A = (-\infty, 3)$, $B = (\sqrt{6}, 4]$.

7 **a)** Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a < b$ și $[a, b] \cup [-2, 3] = [-4, 5]$.
b) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a < b$ și $[a, b] \cap [-3, 2] = [-2, 1]$.

8 Stabiliți dacă $1{,}2 \in A \cap B$, unde $A = (-5, \infty)$ și $B = \left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

9 Se consideră mulțimile
$C = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid -3 < x < 2\}$,
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2\}$.
Calculați $C \cup D$, $D \cup C$, $C \cap D$, $D \cap C$, $C - D$, $D - C$.

10 Găsiți două intervale I și J astfel încât $I \cup J = [1; 6]$ și $I \cap J = [2; 5]$.

11 Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $0 < a < b$, stabiliți dacă:
a) $\frac{a+b}{2} \in (a, b)$; **b)** $\sqrt{ab} \in (a, b)$.

12 Dacă $0 < a < b$, calculați $(a, \sqrt{ab}) \cap \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$.

13 **a)** Determinați numerele întregi a și b, știind că $(a, b) \cap \mathbb{Z} = \{-2\}$.
b) Determinați numerele întregi c și d, știind că $[c, d] \cup (-1, 10) = [-1, 11]$.
c) Determinați numerele întregi e și f, știind că $[e, f] \cap [8, 11] = [9, 10]$.

14 Se consideră mulțimile
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{5}{4}\}$;
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{5}{2}\}$;
$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \geq x \geq -1\}$.
a) Scrieți mulțimile A, B, C sub formă de intervale de numere reale.
b) Calculați $(A \cap B) \cup C$, $(A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cup B) \cap C$, $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.

15 Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.
a) Scrisă sub formă de interval, mulțimea $[-3, 3] - \{-\sqrt{9}, \sqrt{9}\}$ este … .
b) Dacă $A = [-4\sqrt{2}, 7]$ și $B = (-5, 2^3)$, atunci $A \cap B$ este ... .
c) Rezultatul reuniunii $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$ este ... .
d) Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ și mulțimea $(a, 14) \cup [7, b)$ conține șase numere naturale, atunci $a = $ ... și $b = $ ... .
e) Dacă $a > 2$, atunci $(3, a + 3) - (5, a + 5)$ este ... .

3 Inecuații de forma $ax + b \leq 0$ (<, >, ≥), unde $a, b \in \mathbb{R}$

L1. Relațiile de inegalitate pe mulțimea numerelor reale: ≤, ≥, <, >. Proprietăți

Ne amintim!

Pentru a **compara** două numere (naturale, întregi, raționale, reale), folosim reprezentarea lor pe axa numerelor, relația de egalitate „=” sau relația de ordine „≤” (relația mai mic sau egal).
$a = b$ dacă și numai dacă se reprezintă pe axa reală prin puncte identice.
Fie A și B două puncte pe axa numerelor, cu abscisele $x_A = a$, respectiv $x_B = b$, numere reale.

$a < b$ (a este mai mic decât b) dacă și numai dacă, pe axa numerelor, punctul A este reprezentat în stânga punctului B.

$a > b$ (a este mai mare decât b) dacă și numai dacă, pe axa numerelor, punctul A este reprezentat în dreapta punctului B.

$1 < 5$ pentru că A (1) se reprezintă în stânga punctului B (5).
$7{,}2 > 5{,}4$ pentru că $B(7{,}2)$ se reprezintă în dreapta punctului $A(5{,}4)$.

$a \leq b \Leftrightarrow (a < b$ sau $a = b)$
$a \geq b \Leftrightarrow (a > b$ sau $a = b)$

$-2 \leq -1{,}8$ pentru că $-2 < -1{,}8$, iar $\sqrt{4} \leq 2$ pentru că $\sqrt{4} = 2$.
$-1{,}8 \geq -2$ pentru că $-1{,}8 > -2$, iar $\sqrt{4} \geq 2$ pentru că $\sqrt{4} = 2$.

Observație. $(a < b$ sau $a > b) \Leftrightarrow a \neq b$.

Proprietăți ale relațiilor de inegalitate ≤, ≥, <, >

Pe mulțimea numerelor reale, relația „≤” are proprietățile:
- $a \leq a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$ (reflexivitate)
- Dacă $a \leq b$ și $b \leq a$, atunci $a = b$. (antisimetrie)
- Dacă $a \leq b$ și $b \leq c$, atunci $a \leq c$. (tranzitivitate)

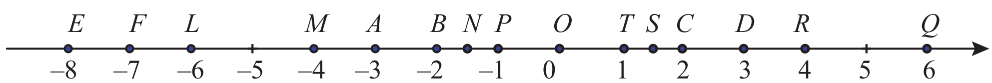
Proprietățile relației „≤” rămân valabile și pentru relația „≥”.

Pe mulțimea numerelor reale, relațiile „<, >” sunt *tranzitive*.
$(a < b$ și $b < c) \Rightarrow a < c$
$(a > b$ și $b > c) \Rightarrow a > c$

Rezolvăm și observăm

În clasa a VII-a, am rezolvat ecuații de forma $ax + b = 0$ cu $a, b \in \mathbb{R}$, apoi ecuații reductibile la acestea. Pentru rezolvare, am folosit *proprietățile relației de egalitate* și *proprietățile operațiilor cu numere reale*, în scopul obținerii unor *egalități echivalente* care să ne conducă la soluțiile ecuației.
Ne propunem să aflăm dacă proprietățile operațiilor cu numere reale ne oferă posibilitatea obținerii unor inegalități echivalente și în cazul *relațiilor de inegalitate* ≤, ≥, <, >,

Aplicația 1. Pe axa numerelor, considerăm punctele: $A(-3)$, $B(-2)$, $C(2)$, $D(3)$, $E(-8)$, $F(-7)$, $L\,(-6)$, $M\,(-4)$, $N\,(-1{,}5)$, $P\,(-1)$, $Q\,(6)$, $R\,(4)$, $S\,(1{,}5)$, $T\,(1)$.



Completați spațiile punctate cu unul din simbolurile ≤, ≥, >, <, =, folosind modelele prezentate, astfel încât să obțineți afirmații adevărate.

a) $x_A < x_B$	$x_C < x_D$	$x_A + 5 = x_C$	$x_B + 5 = x_D$	$x_A + 5 < x_B + 5$
	$x_E \ldots x_F$	$x_A - 5 \ldots x_E$	$x_B - 5 \ldots x_F$	$x_A - 5 \ldots x_B - 5$
b) $x_A < x_B$	$x_L \ldots x_M$	$x_A \cdot 2 \ldots x_L$	$x_B \cdot 2 \ldots x_M$	$x_A \cdot 2 \ldots x_B \cdot 2$
	$x_N \ldots x_P$	$x_A : 2 \ldots x_N$	$x_B : 2 \ldots x_P$	$x_A : 2 \ldots x_B : 2$
c) $x_A < x_B$	$x_Q \ldots x_R$	$x_A \cdot (-2) \ldots x_C$	$x_B \cdot (-2) \ldots x_D$	$x_A \cdot (-2) \ldots x_B \cdot (-2)$
	$x_S > x_T$	$x_A : (-2) = x_E$	$x_B : (-2) = x_F$	$x_A : (-2) > x_B : (-2)$

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Adunarea și *scăderea* ambilor membri ai unei inegalități cu un număr real *păstrează relația de inegalitate.*

1. Dacă a, b și c sunt numere reale și $a < b$, atunci $a + c < b + c$.
2. Dacă a, b și c sunt numere reale și $a < b$, atunci $a - c < b - c$.

Adunăm numărul 5 la *ambii membri* ai inegalității $-3 < -2$.
Vom scrie: $-3 < -2 \mid (+5) \Rightarrow -3 + 5 < -2 + 5 \Rightarrow 2 < 3$
Scădem numărul 5 din *ambii membri* ai inegalității $-3 < -2$.
Vom scrie: $-3 < -2 \mid (-5) \Rightarrow -3 - 5 < -2 - 5 \Rightarrow -8 < -7$

Înmulțirea cu un număr *pozitiv* și împărțirea la un număr *pozitiv*, a ambilor membri ai unei inegalități, *păstrează relația de inegalitate.*

3. Dacă a, b sunt numere reale cu $a < b$ și $c > 0$, atunci $a \cdot c < b \cdot c$.
4. Dacă a, b sunt numere reale cu $a < b$ și $c > 0$, atunci $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Înmulțim cu 2 *ambii membri* ai inegalității $-3 < -2$.
Vom scrie: $-3 < -2 \mid (\cdot\, 2) \Rightarrow -3 \cdot 2 < -2 \cdot 2 \Rightarrow -6 < -4$
Împărțim la 3 *ambii membri* ai inegalității $-3 < -2$.
Vom scrie: $-3 < -2 \mid (:3) \Rightarrow \frac{-3}{3} < \frac{-2}{3} \Rightarrow -1 < -0{,}(6)$

Înmulțirea cu un număr *negativ* și împărțirea la un număr *negativ*, a ambilor membri ai unei inegalități, *inversează relațiile*.

5. Dacă a, b sunt numere reale cu $a < b$ și $c < 0$, atunci $a \cdot c > b \cdot c$.
6. Dacă a, b sunt numere reale cu $a < b$ și $c < 0$, atunci $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Înmulțim cu -1 *ambii membri* ai inegalității $-3 < -2$.
Vom scrie: $-3 < -2 \mid \cdot\, (-1) \Rightarrow -3 \cdot (-1) > -2 \cdot (-1) \Rightarrow 3 > 2$
Împărțim prin $-2 < 0$ *ambii membri* ai inegalității $-3 < -2$.
Vom scrie: $-3 < -2 \mid : (-2) \Rightarrow \frac{-3}{-2} > \frac{-2}{-2} \Rightarrow 1{,}5 > 1$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 2. Folosind proprietățile **1 – 6**, prezentate mai sus, demonstrați că:

AG

1′. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a + c < b + c$, atunci $a < b$.
2′. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a - c < b - c$, atunci $a < b$.
3′. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $c > 0$ și $a \cdot c < b \cdot c$, atunci $a < b$.
4′. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $c > 0$ și $a : c < b : c$, atunci $a < b$.
5′. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $c < 0$ și $a \cdot c > b \cdot c$, atunci $a < b$.
6′. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $c < 0$ și $a : c > b : c$, atunci $a < b$.

Observație. Proprietățile enumerate mai sus pentru relația „<" sunt valabile pentru toate relațiile de inegalitate, adică: >, ≤, ≥.

Temă de portofoliu

Folosind modelul de mai jos, formulați echivalențele rezultate din perechile de propoziții (2, 2′), (3, 3′), (4, 4′), (5, 5′), (6, 6′).

Afirmația directă	*Afirmația reciprocă*	*Concluzia*
1. Dacă a, b și $c \in \mathbb{R}$ și $a < b$, atunci $a + c < b + c$.	**1′.** Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a + c < b + c$, atunci $a < b$.	Dacă a, b și $c \in \mathbb{R}$, atunci $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$.

Adunarea, scăderea, înmulțirea cu un număr *pozitiv* și împărțirea la un număr *pozitiv* a ambilor membri ai unei inegalități *păstrează* relația de inegalitate.

Dacă la ambii membri ai unei inecuații se *adună* sau se *scade* același număr real, păstrând relația de inegalitate inițială, se obține o inegalitate echivalentă cu prima.

Dacă ambii membri ai unei inegalități se înmulț*esc* sau se *împart* cu același număr *pozitiv*, păstrând relația de inegalitate inițială, se obține o inegalitate echivalentă cu prima.

Înmulțirea cu un număr *negativ* și împărțirea la un număr *negativ* a ambilor membri ai unei inegalități *inversează* inegalitatea.

Dacă ambii membri ai unei inegalități se înmulț*esc* sau se *împart* cu același număr *negativ*, *inversând* relația de inegalitate inițială, se obține o inegalitate echivalentă cu prima.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Se consideră inegalitatea $4 < 7$. Formulați inegalitățile care se obțin făcând următoarele transformări:
a) La ambii membri se adună 6.
b) Din ambii membri se scade 7.
c) Se înmulțesc ambii membri cu 3.
d) Se împart ambii membri la 2.
e) Se înmulțesc ambii membri cu –3.
f) Se împart ambii membri la – 2.

2 Copiați pe caiete și completați cu ajutorul simbolurilor <, ≤, > sau ≥ următoarele enunțuri:
a) Dacă $x \leq -7$, atunci $3x \ldots -21$.
b) Dacă $x < -2$, atunci $-3x \ldots 6$.
c) Dacă $x \geq -4$, atunci $-2x \ldots 8$.
d) Dacă $x > -5$, atunci $4x \ldots -20$.
e) Dacă $x \geq -2$, atunci $-5x \ldots 10$.
f) Dacă $-2x \leq -14$, atunci $x \ldots 7$.
g) Dacă $x < 19$, atunci $-3x \ldots -57$.
h) Dacă $-x > -10$, atunci $3x \ldots 30$.

3 Fie $a > \frac{3}{7}$. Demonstrați că numărul $-7a + 3$ este un număr negativ.

4 Se știe că $-\frac{7}{2} \leq 2b - \frac{1}{2} \leq \frac{5}{2}$.

Demonstrați că $|b| \leq \frac{3}{2}$.

5 Se consideră $a \geq \frac{2}{3}$ și $b \geq -\frac{3}{2}$.

Demonstrați că $9a + 4b \geq 0$.

6 **a)** Demonstrați că dacă $a < b$, atunci

$$\left(\frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}\right) \subset (a, b).$$

b) Demonstrați că dacă $-c > -d$, atunci

$$\left(\frac{3c+d}{4}, \frac{c+3d}{4}\right) \subset (c, d).$$

L2. Inecuații de forma $ax + b \leq 0$ ($<, >, \geq$), unde $a, b \in \mathbb{R}$

Ne amintim!

Adunarea, scăderea, înmulțirea cu un număr *pozitiv*, împărțirea la un număr *pozitiv*, a ambilor membri ai unei inegalități, conservă (*păstrează*) *relațiile* $\leq, \geq, >, <$.
Înmulțirea cu un număr negativ, împărțirea la un număr negativ, a ambilor membri ai unei inegalități, *inversează inegalitatea*.

Rezolvăm și observăm

Problemă. O familie de meșteri populari cheltuiește pentru a produce și pentru a vinde obiecte de artizanat, în total, 450 de lei. Din materialele achiziționate, meșteșugarii pot confecționa cel puțin 20 și cel mult 40 de obiecte artizanale, pe care le vând cu prețul de 15 lei bucata.

AF

a) Stabiliți dacă familia își recuperează banii cheltuiți confecționând și vânzând 20 de obiecte de artizanat.
b) Decideți dacă meșteșugarii realizează *profit* confecționând și vânzând 30 de obiecte de artizanat.
c) Calculați *profitul* obținut de meșteșugari confecționând și vânzând 32 de obiecte de artizanat.
d) Determinați numărul obiectelor care trebuie confecționate, pentru ca, din vânzarea lor, familia de meșteșugari să obțină un *profit* de cel puțin 105 lei.

Dicționar
profit = diferența dintre încasările rezultate din vânzări și totalul cheltuielilor.

Soluție. **a)** Din vânzarea a 20 de obiecte, se încasează $20 \cdot 15 = 300$ (lei) și $300 < 450$. Prin urmare, nu se recuperează banii cheltuiți. Mai au de recuperat $450 - 300 = 150$ (lei).
b) Din vânzarea a 30 de obiecte se încasează $30 \cdot 15 = 450$ (lei), deci meșteșugarii își recuperează banii cheltuiți, dar nu obțin profit (diferența dintre încasările rezultate din vânzări și totalul cheltuielilor este: $450 - 450 = 0$ (lei).
c) Dacă meșteșugarii confecționează și vând 32 de obiecte, se încasează $32 \cdot 15 = 480$ (lei). Profitul obținut este de $480 - 450 = 30$ (lei).
d) Dacă notăm cu x numărul de obiecte artizanale confecționate și vândute, atunci profitul obținut de meșteșugari va fi $15 \cdot x - 450$, cu $x > 30$. Astfel, problema se reduce la aflarea elementului x din mulțimea de numere naturale $M = \{20, 21, \ldots, 40\}$ pentru care $15 \cdot x - 450 \geq 105$.

Comentariu. Modelarea matematică a situației date a condus la următoarea problemă:
„Determinați x din mulțimea $M = \{20, 21, \ldots, 40\}$, pentru care $15 \cdot x - 450 \geq 105$”. Problema poate fi reformulată, în limbaj matematic, astfel: „Rezolvați în mulțimea $M = \{20, 21, \ldots, 40\}$ inecuația $15 \cdot x - 450 \geq 105$.”

Un element x *din mulțimea* $M = \{20, 21, \ldots, 40\}$, *pentru care* $15 \cdot x - 450 \geq 105$, se numește *soluție* a inecuației.

Exemple: Prin verificări, găsim: $15 \cdot 20 - 450 = -150 < 105$; $15 \cdot 30 - 450 = 0 < 105$;
$15 \cdot 32 - 450 = 30 < 105$, $15 \cdot 36 - 450 = 90 < 105$, deci numerele 20, 30, 32, 36 nu sunt soluții ale inecuației $15 \cdot x - 450 \geq 105$. Observăm că $15 \cdot 40 - 450 = 150 > 105$, deci numărul 40 este soluție a inecuației $15 \cdot x - 450 \geq 105$. De asemenea, 39 este soluție a inecuației.

A rezolva inecuația $15 \cdot x - 450 \geq 105$, în mulțimea M, înseamnă a găsi toate soluțiile ei.

Rezolvarea inecuației

$15 \cdot x - 450 \geq 105$	
$15 \cdot x - 450 + 450 \geq 105 + 450$	• Adunăm 450 în fiecare membru al inegalității.
$15 \cdot x \geq 555$	• Efectuăm calculele.
$\dfrac{15 \cdot x}{15} \geq \dfrac{555}{15}$	• Împărțim fiecare membru al inegalității prin 15.
$x \geq 37$	• Efectuăm calculele.
Soluțiile inecuației $15 \cdot x - 450 \geq 105$ sunt numerele din mulțimea $M = \{20, 21, \ldots, 40\}$, cel puțin egale cu 37, adică $S = \{37, 38, 39, 40\}$.	• Scriem mulțimea soluțiilor.

Suntem acum în măsură să spunem că, pentru un profit de cel puțin 105 lei, meșteșugarii trebuie să confecționeze *cel puțin* 37 de obiecte artizanale.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

A. Inecuații de forma $ax + b \leq 0$ ($<, >, \geq$), $a, b \in \mathbb{R}$

Problema determinării valorilor lui x, aparținând mulțimii $M \subset \mathbb{R}$ pentru care $ax + b \leq 0$ ($<, >, \geq$), unde $a, b \in \mathbb{R}$, se numește *inecuație liniară* cu necunoscuta x și cu coeficienții reali a *și* b.

$ax + 7 \leq 0$, $a \in \mathbb{R}$ este inecuație liniară cu necunoscuta x și cu coeficienții reali a și 7.

Numărul a este coeficientul necunoscutei, iar numărul b este termenul liber al inecuației.

Coeficientul necunoscutei este numărul real a, iar termenul liber este 7.

Pentru $a \neq 0$, inecuația $ax + b \leq 0$ ($<, >, \geq$) se numește *inecuație de gradul* I cu necunoscuta x și cu coeficienți reali.

$-2x + 3 > 0$, $x \in \mathbb{N}$ este o inecuație de gradul I, cu necunoscuta x, număr natural.
Coeficientul necunoscutei este -2, iar termenul liber este 3.

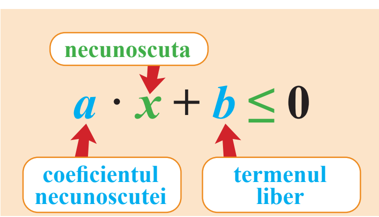
Observații

1. Atunci când mulțimea M nu este specificată, se va considera că aceasta este mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale.

$2m + 1 < 0$ este inecuație cu necunoscuta m, număr real.

2. Necunoscutele unei inecuații se pot nota și cu alte litere.

$-y + 5 < 0$, $y \in \mathbb{Q}$ este inecuație cu necunoscuta y, număr rațional.



A. Problemă	**B. Inecuație**
1. Determinați numărul *natural* x pentru care $15 \cdot x - 10 \leq 0$.	1. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{N}$ inecuația $15 \cdot x - 10 \leq 0$.
2. Determinați numerele *reale* x, pentru care $15 \cdot x - 10 \leq 0$.	2. Rezolvați inecuația $15 \cdot x - 10 \leq 0$.

B. Soluții ale inecuației de forma $ax + b \leq 0$ (<, >, ≥). Mulțimea soluțiilor unei inecuații

Se numește *soluție* a inecuației $ax + b \leq 0$ (<, >, ≥) cu $a, b \in \mathbb{R}$ și cu necunoscuta $x \in M$, fiecare element al mulțimii M pentru care inegalitatea $ax + b \leq 0$ (<, >, ≥) este adevărată.

Exemple: Pentru $M = \mathbb{Z}$ și inecuația $-2 \cdot x + 3 > 0$, cu necunoscuta x:

a) Înlocuind în inecuație $x = -3$, obținem: $(-2) \cdot (-3) + 3 > 0$ sau $9 > 0$, afirmație adevărată. Vom spune că numărul întreg -3 *verifică inecuația* sau că numărul întreg -3 *este soluție* a inecuației.

b) Înlocuind în inecuație $x = 3$, obținem: $(-2) \cdot 3 + 3 > 0 \Leftrightarrow -3 > 0$, care este o afirmație falsă. Vom spune că numărul întreg 3 *nu verifică inecuația* sau că numărul întreg 3 *nu este soluție a inecuației*.

c) numărul $-0{,}25$ nu este soluție a inecuației de mai sus, deși $(-2) \cdot (-0{,}25) + 3 > 0$, pentru că $-0{,}25$ *nu este număr întreg*.

Observație. Valorile necunoscutei care verifică inegalitatea, dar nu sunt elemente ale mulțimii M, *nu sunt soluții* ale inecuației.

Mulțimea tuturor soluțiilor unei inecuații se notează cu S și se numește *mulțimea soluțiilor* inecuației.

C. Rezolvarea inecuației de forma $ax + b \leq 0$ (<, >, ≥), unde $a, b \in \mathbb{R}$

A *rezolva* o inecuație $a \cdot x + b \leq 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, înseamnă a determina mulțimea S, a soluțiilor acesteia.

Folosind transformări echivalente, obținem: $a \cdot x + b \leq 0 \,|\, -b \Leftrightarrow a \cdot x \leq -b$.

Pentru $a \neq 0$:

a) $a > 0$	$a \cdot x \leq -b \,\big|\, :a \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{b}{a}$.	Sunt soluții toate numerele reale cel mult egale cu $-\dfrac{b}{a}$. Vom scrie $S = \left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right]$.
b) $a < 0$	$a \cdot x \leq -b \,\big|\, :a \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{b}{a}$.	Sunt soluții toate numerele reale cel puțin egale cu $-\dfrac{b}{a}$. Vom scrie $S = \left[-\dfrac{b}{a}, \infty\right)$.

În practică, întâlnim situații în care unele inecuații se reduc, prin transformări echivalente, la inecuații de forma $a \cdot x + b \leq 0$, iar despre a nu știm că este nenul.

Pentru $a = 0$, inecuația $a \cdot x + b \leq 0$ devine $0 \cdot x + b \leq 0$, $b \in \mathbb{R}$.

a) Dacă $b \leq 0$, inegalitatea are loc pentru orice valoare reală a lui x, deci $S = \mathbb{R}$.

b) Dacă $b > 0$, inegalitatea nu are loc pentru nicio valoare reală a necunoscutei, deci $S = \varnothing$.

Observație: Dacă se cere rezolvarea într-o mulțime $M \subset \mathbb{R}$, mulțimea soluțiilor este intersecția mulțimii obținute pe $\mathbb{R}$ cu mulțimea M.

Exemplu: Se consideră inecuația $-2x + 3 > 0$. **a)** Rezolvați inecuația în mulțimea $\mathbb{Z}$; **b)** Rezolvați inecuația.

$$-2x + 3 > 0 \,|\, -3 \Leftrightarrow -2x + 3 - 3 > 0 - 3 \Leftrightarrow -2x > -3 \,|\, :(-2) \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} < \frac{-3}{-2} \Leftrightarrow x < 1{,}5$$

a) $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 1{,}5\} = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$ sau $S = (-\infty, 1{,}5] \cap \mathbb{Z}$.

b) Pentru că *nu se specifică* mulțimea M, inecuația se rezolvă în mulțimea numerelor reale, deci mulțimea soluțiilor este $S = (-\infty, 1{,}5]$.

Să nu ne pripim!

Atunci când înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei inecuații cu un număr negativ, se inversează relația de inegalitate.

$-2x > -3 \,|\, :(-2) \qquad \dfrac{-2x}{-2} < \dfrac{-3}{-2}$

D. Reprezentarea geometrică a mulțimii soluțiilor unei inecuații de forma $ax + b \leq 0$ (<, >, ≥)

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1. a) Modelați matematic, printr-o inecuație, fiecare enunț.

AG

a$_1$. Triplul opusului numărului real x este cel puțin egal cu 21.

a$_2$. O treime din numărul întreg x are modulul mai mic decât 1.

b) Rezolvați inecuațiile formulate.

c) Reprezentați pe axa numerelor mulțimea soluțiilor pentru fiecare inecuație.

Soluție.

a) **a$_1$** $3 \cdot (-x) \geq 21, x \in \mathbb{R}$.

a$_2$ $\left|\frac{1}{3} \cdot x\right| < 1, x \in \mathbb{Z}$.

b) $-3x \geq 21 \mid : (-3)$

$$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{21}{-3}$$

$x \leq -7$

Concluzie: Soluțiile inecuației sunt numerele reale x cu proprietatea $x \leq -7$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -7\} = (-\infty, -7)$, se reprezintă pe axa numerelor printr-o semidreaptă.

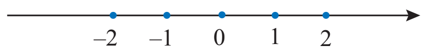
$$-1 < \frac{x}{3} < 1 \mid \cdot 3$$

$-3 < x < 3$

Concluzie: Soluțiile inecuației sunt numerele întregi x cu proprietatea $-3 < x < 3$.

$S = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 3\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. care se reprezintă pe axă prin 5 puncte.

c)



Aplicația 2. Se consideră inecuațiile: $x + 3 < 5$, $2x - 1 > 1$, $5x + 3 \geq -2$, $-7x + 3 \geq -11$.

a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile date.

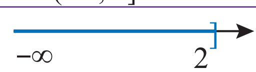
b) Reprezentați geometric mulțimea soluțiilor, pentru fiecare din cele patru inecuații.

c) Rezolvați în mulțimea $M = [2, \infty)$ inecuațiile date.

d) Reprezentați geometric mulțimile de soluții obținute la subpunctul c).

e) Folosind subpunctele anterioare, rezolvați, în $M \cap \mathbb{Q}$, aceleași inecuații.

f) Stabiliți dacă mulțimile de soluții ale inecuațiilor corespunzătoare subpunctului e) se pot reprezenta geometric.

	$x + 3 < 5$	$2x - 1 > 1$	$5x + 3 \geq -2$	$-7x + 3 \geq -11$
a)	$x < 2$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$ $S = (-\infty, 2)$	$2x > 2$ $x > 1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ $S = (1, +\infty)$	$5x \geq -5$ $x \geq -1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ $S = [-1, +\infty)$	$-7x \geq -14$ $x \leq 2$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$ $S = (-\infty, 2]$
b)				
c)	$S = (-\infty, 2) \cap [2, \infty)$ $S = \varnothing$	$S = (1, +\infty) \cap [2, \infty)$ $S = [2, \infty)$	$S = [-1, +\infty) \cap [2, \infty)$ $S = [2, \infty)$	$S = (-\infty, 2] \cap [2, \infty)$ $S = \{2\}$
d)	Inecuația nu are nicio soluție			
e)	$S = \varnothing \cap \mathbb{Q}$	$S = [2, \infty) \cap \mathbb{Q}$	$S = [2, \infty) \cap \mathbb{Q}$	$\{2\} \cap \mathbb{Q} = \{2\}$
f)	Inecuația nu are nicio soluție.	Nu se pot reprezenta pe axă toate elementele mulțimii S.		

Concluzii.

1. Pe mulțimea numerelor reale, mulțimea soluțiilor unei inecuații de forma $ax + b \leq 0$ ($<, >, \geq$), unde $a, b \in \mathbb{R}$, este un interval.
2. Dacă inecuația se cere a fi rezolvată într-o mulțime infinită care nu este interval, atunci este posibil ca mulțimea soluțiilor să nu poată fi reprezentată geometric.

Inecuațiile de forma $ax + b \leq 0$ ($<, >, \geq$), unde a și b sunt numere reale date, $a \neq 0$, se numesc *inecuații de gradul I*, cu o necunoscută.
Numerele reale a și b sunt *coeficienții*, iar x este *necunoscuta* inecuației.
Pe mulțimea numerelor reale, mulțimea soluțiilor unei inecuații de forma $ax + b \leq 0$ ($<, >, \geq$), unde $a, b \in \mathbb{R}$, este un interval.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Copiați pe caiete și completați tabelul, folosind modelul prezentat.

Inecuația	Coeficienții inecuației		Necunoscuta
$ax + b \leq 0$	a	b	x
$\sqrt{2}\,y + 4 \leq 0$	$\sqrt{2}$	4	y
$-6{,}2\,m + 3{,}6 \leq 0$			
$-0{,}6\,x - 1{,}5 \leq 0$			

2 Determinați:

a) Numerele naturale mai mici decât 5.

b) Numerele întregi negative mai mari decât –4.

c) Elementele care verifică relația $x \leq 10$, din mulțimea

$$M = \left\{-2000; -1; 0{,}75; \sqrt{2}; 17; \sqrt{199}\right\}$$

d) Numerele de forma $\overline{ab}$, cu proprietatea $-\dfrac{72}{\overline{ab}} < -6$.

3 Verificați dacă –1 este soluție a inecuației:

a) $4 \cdot x + 3 < 1$; **b)** $x + 4 \geq 3$; **c)** $\dfrac{1}{x+2} < 0$.

4 **A.** Se consideră următorul enunț: „Perimetrul unui dreptunghi, având lungimea egală cu x cm și lățimea de 1,5 cm, este cel mult 10 cm”.

a) Arătați că x nu poate lua niciuna dintre valorile: –2; –1,5; 0; 4; 6,5.

b) Decideți dacă numărul x poate fi egal cu 2 sau cu 3.

c) Reformulați enunțul dat, cu ajutorul unei inecuații.

B. Se consideră inecuația $2x + 3 \leq 10$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Justificați de ce numerele –2; –1,5; 0; 4; 6,5 nu sunt soluții ale inecuației.

b) Justificați de ce numerele 2 și 3 sunt soluții ale inecuației.

c) Copiați pe caiete, apoi completați spațiile libere, urmând pașii necesari rezolvării inecuației $2x + 3 \leq 10$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$2 \cdot x + 3 \leq 10$	
$2 \cdot x + 3 - 3 \leq 10 - 3$	• *Scădem 3 din fiecare membru al inegalității.*
$2 \cdot x \leq 7$	• …
$\dfrac{2 \cdot x}{2} \leq \dfrac{7}{2}$	• Împărțim …
$x \leq \ldots$	• ...
Soluțiile inecuației sunt numerele din mulțimea $\mathbb{R}_+^*$, cel mult egale cu 3,5.	

C. Se notează cu S mulțimea soluțiilor inecuației $2x + 3 \leq 10$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Scrieți mulțimea S, enunțând o proprietate caracteristică elementelor ei.

b) Stabiliți dacă numerele 0, respectiv 3,5 sunt soluții ale inecuației.

c) Reprezentați pe axa numerelor mulțimea S.

D. Reluați cerințele de la subpunctul **C**, pentru inecuația $2x + 3 \geq 10$, $x \in \mathbb{R}$.

5 Se consideră inecuațiile: $2x + 4 < 0$; $5x - 10 < 0$; $-6x + 12 < 0$; $-0{,}8x + 2{,}4 < 0$.

a) Rezolvați fiecare inecuație și reprezentați pe axa numerelor, pentru fiecare, mulțimea soluțiilor.

b) În inecuațiile date, înlocuiți, pe rând, simbolul $<$ cu fiecare dintre simbolurile $\le$, $>$, $\ge$, rezolvați inecuația obținută și reprezentați pe axa numerelor mulțimea soluțiilor.

6 Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile următoare și reprezentați pe axă mulțimea soluțiilor.

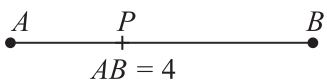
a) $x + 3 < 0$; **b)** $2{,}3 + x \ge 0$;

c) $0 > -x + \sqrt{2}$; **d)** $\frac{1}{4} \cdot x - 1 \le 0$;

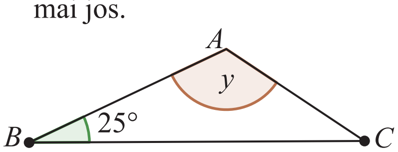
e) $\frac{x+5}{-3} \le 0$; **f)** $-7 \cdot x > 0$.

7 Folosind informațiile oferite de desenele date, scrieți inecuațiile corespunzătoare necunoscutelor în condițiile precizate:

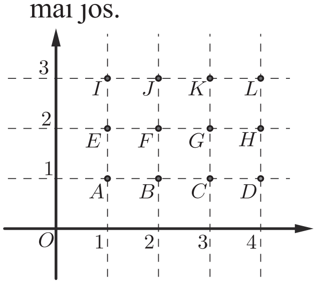
a) x este lungimea segmentului AP, punctul P fiind situat pe segmentul AB.



b) y este măsura unghiului A din desenul de mai jos.



c) Determinați cel mai mare număr natural m și cel mai mic număr natural n astfel încât $m < x < n$, pentru oricare x, abscisă a unuia dintre punctele reprezentate în desenul de mai jos.



d) Determinați cel mai mare număr natural p și cel mai mic număr natural q astfel încât $p < y < q$, pentru oricare y, ordonată a unuia dintre punctele reprezentate în desenul de mai sus.

8 Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $3 \cdot x + 6 \ge 0$; **b)** $-4 \cdot x + 2 \le 0$;

c) $-5 \cdot (x + 2) > 0$; **d)** $4 \cdot (x - 1) > 0$;

e) $x : 6 + 0{,}1(6) < 0$; **f)** $\frac{5}{6} \cdot (3 - x) \le 0$;

g) $-10 \cdot (x - 0{,}25) > 0$;

h) $0 \cdot x + 1 \ge 0$; **i)** $-5 + x < 0$.

9 Rezolvați inecuațiile:

a) $\sqrt{3} \cdot x + \sqrt{15} < 0$;

b) $-\sqrt{2} \cdot x + \sqrt{32} > 0$;

c) $(1 - \sqrt{5}) \cdot x - 1 + \sqrt{5} \le 0$.

10 Determinați valorile numărului real x pentru care:

a) numărul $-1{,}5 \cdot x + 4{,}5$ este pozitiv;

b) numărul $\frac{2}{3} \cdot x - \frac{4}{9}$ este negativ;

c) numărul $\sqrt{10} \cdot x + 10$ este nenegativ;

d) numărul $-3^2 \cdot x - 3^3$ este cel puțin egal cu 0.

11 Stabiliți valorile numărului real y pentru care au sens radicalii:

a) $\sqrt{y-5}$ **b)** $\sqrt{2 \cdot y - 3}$

c) $\sqrt{5{,}4 - 3 \cdot y}$ **d)** $\sqrt{\frac{1}{2 \cdot y - 7}}$

12 Stabiliți dacă există numere reale x astfel încât numerele $5 \cdot x - 3$ și $5 - 3 \cdot x$ să fie simultan pozitive.

13 Rezolvați, în mulțimea numerelor naturale, inecuațiile:

a) $3 \cdot x - \frac{9}{2} \le 0$;

b) $-x + 2 \ge 0$;

c) $\frac{2 \cdot x - 11}{-5} \le 0$.

d) $0 \cdot x \ge x$.

14 Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuațiile:

a) $-2 \cdot x + 3 \le 0$;

b) $\frac{x}{2} - 2^{-1} > 0$;

c) $x : (-2)^3 < 0$;

d) $(2^{15} - 2^{14} - \ldots - 2^9) \cdot (-x) \le 8^3$.

L3. Inecuații reductibile la inecuații de forma $ax + b \leq 0$ (<, >, ≥), unde $a, b \in \mathbb{R}$

Rezolvăm și observăm

Unele probleme practice pot fi rezolvate cu ajutorul unor inecuații care pot fi aduse la forma $ax + b \leq 0$, unde a și b sunt numere reale și pe care le vom numi *inecuații reductibile* la această formă.

Problema 1. La un institut de cercetare lucrează, în prezent, 27 de informaticieni și 15 matematicieni. Institutul organizează un concurs în urma căruia vor mai fi angajați matematicieni și tot atâția informaticieni. Ne propunem să aflăm câți matematicieni vor fi angajați, astfel încât numărul total al matematicienilor institutului să fie cel mult egal cu două treimi din numărul total al informaticienilor aceluiași institut.

AI

Soluție. **1**. *Modelarea matematică*: Considerăm x numărul de matematicieni care vor fi angajați în urma concursului. Vor fi angajați „tot atâția informaticieni”, adică x informaticieni. Atunci, *numărul total al matematicienilor* este $x + 15$, iar *numărul total al informaticienilor* este $x + 27$.
Deoarece „numărul total al matematicienilor institutului este cel mult egal cu două treimi din numărul total al informaticienilor” rezultă inecuația: $x + 15 \leq \frac{2}{3}(x + 27)$.

Comentariu. Modelarea matematică a situației date a condus la următoarea problemă:

Determinați numerele naturale x pentru care

$$x + 15 \leq \frac{2}{3}(x + 27).$$

Reformulare: *Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuația* $x + 15 \leq \frac{2}{3}(x + 27)$.

Efectuarea corectă a unor calcule prin aplicarea proprietățile operațiilor cu numere reale și a altor reguli de calcul transformă inecuația $x + 15 \leq \frac{2}{3}(x + 27)$ într-o inecuație echivalentă cu ea, de forma $ax + b \leq 0$, unde a și b sunt numere reale.

Din acest motiv, vom spune că inecuația $x + 15 \leq \frac{2}{3}(x + 27)$ este o *inecuație reductibilă* la o inecuație de forma $ax + b \leq 0$.

2. *Rezolvarea inecuației* $x + 15 \leq \frac{2}{3}(x + 27)$ în mulțimea numerelor reale:

Înmulțim fiecare membru al inecuației cu 3:	$x + 9 \leq \frac{2}{3}(x + 15) \mid \cdot 3$
Scriem inecuația echivalentă rezultată:	$3 \cdot (x + 9) \leq 2 \cdot (x + 15)$
În inecuația precedentă, aplicăm distributivitatea înmulțirii față de adunare și rezultă inecuația:	$3 \cdot x + 27 \leq 2 \cdot x + 30$
Din fiecare membru al inecuației anterioare, scădem cel de-al doilea membru:	$3 \cdot x + 27 - (2 \cdot x + 30) \leq 2 \cdot x + 30 - (2 \cdot x + 30)$
Efectuând calculele, rezultă inecuația echivalentă:	$x - 3 \leq 0$
Scriem mulțimea soluțiilor inecuației:	$S = (-\infty, 3]$

3. *Formularea răspunsului*: Pentru a răspunde corect cerinței vom alege dintre soluțiile inecuației pe cele care corespund restricțiilor date de situația reală care a fost modelată matematic. Institutul „va mai angaja matematicieni”, adică numărul matematicienilor angajați este un număr natural nenul. Suntem acum în măsură să oferim răspunsul corect: *Institutul de cercetare va angaja 1, 2 sau 3 matematicieni*.

Problema 2. În două silozuri, au fost depozitate 2800 t de furaje, respectiv 1300 t de furaje. Din primul depozit se livrează către ferme zootehnice 100 t furaje pe zi, iar din al doilea depozit se livrează 25 t furaje pe zi. Determinați numărul de zile în care, după livrare, cantitatea de furaje rămasă în primul siloz este cel puțin dublă față de cea rămasă în cel de-al doilea.

AG

Soluție. **1.** *Modelare matematică*: Notăm cu x numărul de zile în care, după livrare, cantitatea de furaje din primul depozit este cel puțin dublă față de cea rămasă în cel de-al doilea depozit. Atunci, cantitatea de furaje *rămasă în primul siloz* este $2800 - 100\,x$ (tone), iar cantitatea de furaje *rămasă în cel de-al doilea siloz* este $1300 - 25x$ (tone). Deoarece după x zile „cantitatea de furaje rămasă în primul siloz este cel puțin dublă față de cea rămasă în cel de-al doilea”, se obține inecuația $2800 - 100\,x \geq 2(1300 - 25x)$, reductibilă la o inecuație de forma $ax + b \geq 0$.

2. *Rezolvarea inecuației*: $2800 - 100\,x \geq 2(1300 - 25x) \Leftrightarrow 2800 - 100\,x \geq 2600 - 50x \mid -(2600 - 50x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2800 - 100\,x - 2600 + 50x \geq 0 \Leftrightarrow -50\,x + 200 \geq 0 \Rightarrow S = (-\infty, 4]$.

3. *Formularea răspunsului*: $2800 > 1300 \cdot 2$. Cantitatea de furaje din primul depozit este cel puțin dublă față de cea rămasă în cel de-al doilea siloz înainte de prima livrare și rămâne cu această proprietate timp de 4 livrări, deci timp de 4 zile. De exemplu, după 3 zile, cantitatea rămasă în primul siloz este de 2500 t, cea rămasă în al doilea siloz este de 1225 t și $2500 \geq 2 \cdot 1225$.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Aplicația 1. Scrieți inecuația $\dfrac{a}{bx+c} < 0$ ($>, \leq, \geq$), $a, b \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}$ sub forma $mx + n < 0$ ($>$).

Observație. Din studiul inecuațiilor de această formă, excludem posibilitatea ca $bx + c$ să fie 0, deoarece raportul $\dfrac{a}{bx+c}$ nu ar avea sens.

Inecuația	Tehnica de folosire a regulii semnelor	Transformarea inecuației
1) $\dfrac{3}{-2x+5} < 0.$	$a > 0$ și $\dfrac{a}{bx+c} < 0 \Rightarrow bx + c < 0$	$3 > 0$, deci $\dfrac{3}{-2x+5} < 0 \Leftrightarrow -2x + 5 < 0$
2) $\dfrac{-8}{-2x+5} < 0.$	$a < 0$ și $\dfrac{a}{bx+c} < 0 \Rightarrow bx + c > 0$	$-8 < 0$, deci $\dfrac{-8}{-2x+5} < 0 \Leftrightarrow -2x + 5 > 0$
3) $\dfrac{12}{-2x+5} > 0.$	$a > 0$ și $\dfrac{a}{bx+c} > 0 \Rightarrow bx + c > 0$	$12 > 0$, deci $\dfrac{12}{-2x+5} > 0 \Leftrightarrow -2x + 5 > 0$
4) $\dfrac{-7}{-2x+5} > 0.$	$a < 0$ și $\dfrac{a}{bx+c} > 0 \Rightarrow bx + c < 0$	$-7 < 0$, deci $\dfrac{7}{-2x+5} > 0 \Leftrightarrow -2x + 5 < 0$

Observație. Folosind faptul că a este nenul, deducem ușor că inecuația $\dfrac{a}{bx+c} \leq 0$ este echivalentă cu inecuația

$$\frac{a}{bx+c} < 0\text{, iar inecuația } \frac{a}{bx+c} \geq 0 \text{ este echivalentă cu inecuația } \frac{a}{bx+c} > 0.$$

Concluzie: Toate inecuațiile de forma $\dfrac{a}{bx+c} < 0$ ($>, \leq, \geq$), unde $a, b \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}$, sunt reductibile la inecuații de forma $mx + n < 0$ ($>$), unde, m și n sunt numere reale, $m \neq 0$.

Aplicația 2. Inecuații de forma $|ax+b|< c$ ($\leq$), unde $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$

Problema 3	*Reformulare*
Determinați numerele reale x pentru care $\lvert 2x + 7 \rvert < 5$	Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\lvert 2x + 7 \rvert < 5$

Temă de portofoliu

Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $| 2x + 7 | < 0$

b) $| 2x + 7 | < -5$.

Soluție. $| 2x + 7 | < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x + 7 < 5$. Adunăm la ambii membri -7, efectuăm calculele și obținem $-12 < 2x < -2$, care prin împărțirea ambilor membri la 2, devine $-6 < x < -1$. Mulțimea soluțiilor inecuației date este $S = (-6, -1)$.

Generalizarea problemei 3	*Reformulare*
Determinați numerele reale x pentru care $\lvert ax + b \rvert < c$, unde $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$	Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\lvert ax + b \rvert < c$, unde $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$.

Soluție. **1)** Dacă $c > 0$, $| ax + b | < c \Leftrightarrow -c < ax + b < c$. Adunăm la ambii membri $-b$, efectuăm calculele și obținem $-c - b < ax < c - b$. Împărțind ambii membri la a, rezultă $\frac{-c-b}{a} < x < \frac{c-b}{a}$. Mulțimea soluțiilor inecuației date este $S = \left(\frac{-c-b}{a}, \frac{c-b}{a}\right)$.

2) Dacă $c \leq 0$, inecuația $| ax + b | < c$ nu are nicio soluție, deoarece modulul niciunui număr real nu este negativ.

Problema 4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $| ax + b | \leq c$, unde $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$.

Soluție. **1)** Dacă $c > 0$, $| ax + b | \leq c \Leftrightarrow -c \leq ax + b \leq c$. Adunăm la ambii membri $-b$, efectuăm calculele și obținem $-c - b \leq ax \leq c - b$. Împărțind ambii membri la a, rezultă $\frac{-c-b}{a} \leq x \leq \frac{c-b}{a}$. Mulțimea soluțiilor inecuației date este $S = \left[\frac{-c-b}{a}, \frac{c-b}{a}\right]$.

2) Dacă $c = 0$, inecuația devine $| ax + b | \leq 0$, deci $ax + b = 0$, cu $a \neq 0$, adică $x = -\frac{b}{a}$ și $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

3) Dacă $c < 0$, inecuația $| ax + b | \leq c$ nu are nicio soluție, deoarece modulul niciunui număr real nu este negativ.

Știm să aplicăm. Identificăm conexiuni

1. Rezolvați inecuația $\frac{3}{-2x+5} < 0$.

Soluție. $\frac{3}{-2x+5} < 0 \Leftrightarrow -2x + 5 < 0 \Leftrightarrow -2x + 5 < 0 \mid -5 \Leftrightarrow$
$-2x < -5 \mid : (-2) \Leftrightarrow x > 2{,}5$ și $S = (2{,}5; \infty)$.

---

2. Rezolvați inecuația $\frac{-4}{\sqrt{3}x - \sqrt{12}} \geq 0$.

Soluție. $\frac{-4}{\sqrt{3}x - \sqrt{12}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x - \sqrt{12} < 0$.
$\sqrt{3}x - \sqrt{12} < 0 \mid + \sqrt{12} \Leftrightarrow \sqrt{3}x < \sqrt{12} \mid : \sqrt{3} \Leftrightarrow x < 2$
și $S = (-\infty, 2)$.

3. Un pătrat are lungimea laturii egală cu x cm, unde x este un număr natural. Dimensiunile unui dreptunghi, exprimate în centimetri, sunt egale cu $5x - 14$, respectiv 8.

Notăm cu $\mathcal{P}_1$ și $\mathcal{P}_2$ perimetrul pătratului, respectiv al dreptunghiului. Raportul dintre $5 \cdot \frac{\mathcal{P}_1}{2}$ și $\mathcal{P}_2$ este cel puțin egal cu 1.

Determinați cel mai mic număr natural x prin care se poate exprima lungimea laturii pătratului, în centimetri.

Soluție. Semiperimetrul pătratului, exprimat în cm, este $2x$. Perimetrul dreptunghiului, exprimat în centimetri, este $2(5x - 14 + 8)$, deci $10x - 12$. Cum „Raportul dintre $5 \cdot \frac{\mathcal{P}_1}{2}$ și $\mathcal{P}_2$ este cel puțin egal cu 1”, obținem inecuația $\frac{5x}{5x-6} \geq 1$.

Rezolvăm inecuația în mulțimea numerelor reale:

$$\frac{5x}{5x-6} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(5x-6)+6}{5x-6} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{5x-6}{5x-6} + \frac{6}{5x-6} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$1 + \frac{6}{5x-6} \geq 1 \,|\, -1 \Leftrightarrow \frac{6}{5x-6} \geq 0$, deci $5x - 6 > 0$, cu mulțimea soluțiilor $(1{,}2; \infty)$.

Dimensiunile pătratului și cele ale dreptunghiului sunt numere pozitive, deci $x > 0$ și $5x - 14 > 0$, cu mulțimile soluțiilor $(0; \infty)$, respectiv $(2{,}8; \infty)$.

Atunci, valorile căutate ale lui x aparțin intersecției $(1{,}2; \infty) \cap (0; \infty) \cap (2{,}8; \infty)$, deci $x \in (2{,}8; \infty)$.

Cel mai mic număr natural x din acest interval, prin care se exprimă lungimea laturii pătratului în cm, este 3.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Verificați dacă printre elementele mulțimii $A = \{-3, -1, 0, 2, 5\}$ sunt soluții ale inecuației $5 \cdot x - 2 < x + 6$, $x \in \mathbb{R}$.

2 Determinați elementele mulțimii $B = \{-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{4}{3}, \sqrt{5}\}$, care nu sunt soluții ale inecuației $4 \cdot x > 2 + x$.

3 Rezolvați în numere reale următoarele inecuații:

a) $2 \cdot x + 3 < x + 1$;

b) $-3 \cdot y + 7 > -5 \cdot y + 3$;

c) $-10 \geq 2 \cdot (z + 1) + z$;

d) $0{,}5 \cdot t + \frac{1}{2} \leq 1{,}5 \cdot t + 4$.

4 Rezolvați inecuațiile:

a) $\frac{2}{3} \cdot x - \frac{1}{5} > \frac{7}{15}$;

b) $1{,}3 \cdot x - 13 < 2 \cdot x + 8$;

c) $\frac{-2 \cdot x + 1}{5} \geq \frac{-5 \cdot x + 1}{2}$;

d) $\frac{4(x+3)}{-3} \leq \frac{2 \cdot x - 2}{9}$.

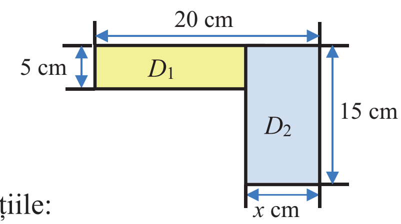
5 Punctele O, A, B, C sunt reprezentate pe axa numerelor. Aflați valorile întregi ale numărului x pentru care $A(x - 1)$ și $B(x + 2)$ sunt situate pe segmentul OC, $O(0)$ și $C(6)$.

6 În figura de mai jos sunt reprezentate suprafețele dreptunghiulare D_1 și D_2. Notăm cu $\mathcal{A}_1$, respectiv $\mathcal{A}_2$, aria suprafețelor dreptunghiulare D_1, respectiv D_2. Aflați x pentru fiecare din situațiile:

a) $\mathcal{A}_1 < \mathcal{A}_2$

b) $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$

c) $\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_2$



7 Rezolvați inecuațiile:

a) $\frac{4}{9x-18} < 0$;

b) $\frac{6}{-2x-5} > 0$;

c) $\frac{3}{-5x-2} \leq 0$;

d) $\frac{\sqrt{2}}{1{,}6x - 3{,}2} \leq 0$;

e) $\frac{15}{0{,}(3)x - 0{,}(6)} \geq 0$;

f) $\frac{10}{-2x+1} \geq 0$.

8 **a)** Demonstrați că

$-8x+17=-2(4x-7)+3$;

b) Rezolvați inecuația $\frac{-8x+17}{4x-7} \le -2$.

9 Rezolvați inecuațiile:

a) $|-4x+3|<2$;

b) $|-3x-5| \le 3$;

c) $-\sqrt{2}\,|0{,}5x-0{,}2| \ge -\frac{\sqrt{18}}{10}$;

d) $\left|x-\frac{3x+2}{5}\right| \le 0$;

e) $\left|5-\frac{x+6}{2}\right| < 0$;

f) $\left|5-\frac{x+6}{2}\right| < 1$.

10 Calculând $2 \cdot (z+1) - 3 \cdot (z-2)$, obținem un număr mai mic decât 10. Aflați z știind că este un număr întreg negativ.

11 Determinați valorile numărului natural n, pentru care $\frac{0{,}1}{5-1{,}2 \cdot n}$ este număr pozitiv.

12 **a)** Scrieți numerele întregi care au valoarea absolută cel mult 3.

b) Scrieți patru numere iraționale care au valoarea absolută mai mică decât 1,8.

13 Rezolvați inecuațiile:

a) $|x|<2$;

b) $|x-2| \le 3$;

c) $|1-x| \le 0$;

d) $-15 \cdot |x-1| > -105$;

e) $3-|4 \cdot x-1| \ge 0$;

f) $|x| \cdot (x-4) > 0$.

14 În triunghiul ABC, $AB = 8$ cm, $BC = (3 \cdot x - 10)$ cm, $AC = (10 - x)$ cm. Aflați valorile numărului natural x pentru care triunghiul este isoscel.

15 Trei caiete și patru pixuri costă 27 lei. Aflați prețul minim posibil și prețul maxim posibil al unui caiet, știind că acesta este exprimat în lei, printr-un număr natural.

16 Sandu a avut de rezolvat, în numere reale, inecuația $\frac{x-2}{-6} \le 0,(6)$. El scrie pe caiet următoarele:

$\frac{x-2}{-6} \le {}^{-2)}\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x-2}{-6} \le \frac{-4}{-6} \Leftrightarrow x \le -4+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \le -2$,

$S = (-\infty, -2]$

Analizați rezolvarea inecuației și stabiliți dacă Sandu a rezolvat corect inecuația. Justificați răspunsul dat.

17 **a)** Dacă $a \in \left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$, arătați că $15 \cdot a - 3 > 0$.

b) Dacă $\frac{2 \cdot b - 1}{3} \in (-\infty, 3)$, arătați că $-3 \cdot b + 16 > 1$.

18 Rezolvați inecuațiile:

a) $\frac{x+1}{3} - \frac{1}{2} \ge \frac{x}{6}$;

b) $x\sqrt{2} - 1 < x\sqrt{8} + |-1|$;

c) $\frac{2 \cdot x}{-3} + \frac{1}{-4} < -\frac{x}{-6} + \frac{5}{-12}$;

d) $3 \cdot (x - \frac{1}{3}) - 2 \cdot (x + \frac{1}{2}) \le 4 \cdot (x - \frac{1}{4})$.

19 **a)** Determinați mulțimile

$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^1+1}{4 \cdot x - 12} > 0\right\}$,

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \cdot x + 8 \ge 4 \cdot x + 5 \ge 2 \cdot x - 1\}$ și

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le \frac{3 \cdot x + 1}{4} \le 4\}$.

b) Arătați că $C \setminus A = B$.

20 Aflați cărui interval aparțin numerele de forma $1 - a\sqrt{6}$, dacă $a \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

21 Determinați $x \in \mathbb{R}$ știind că $3 - 2x \in (-1, 1]$.

22 Se consideră intervalele: $I_1 = \left(-\infty, \frac{1+a}{2}\right]$ și $I_2 = [a-1, +\infty)$.

a) Determinați a astfel încât $I_1 \cap I_2 \ne \varnothing$.

b) Aflați pentru ce valori ale lui a intersecția intervalelor $(I_1 \cap I_2)$ conține numai numere naturale.

TEST DE AUTOEVALUARE

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I.

La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

5p **1.** Mulțimea valorilor numărului natural n pentru care expresia $\sqrt{1,5-0,75\cdot n}$ are sens, este:

A. $\{0\}$; B. $\{0, 1\}$; C. $\{1, 2\}$; D. $\{0, 1, 2\}$.

5p **2.** Cel mai mic număr din mulțimea $\{x \in \mathbb{N} \mid |x| < 3\}$ este:

A. -2; B. -1; C. 0; D. 1.

5p **3.** Scrisă ca interval, mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid 3^{-1} < x < 3^0\}$ este:

A. $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$; B. $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$; C. $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$; D. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

5p **4.** Suma numerelor întregi din intervalul $\left(-\frac{7}{3}, \frac{3}{7}\right)$ este:

A. -3; B. -2; C. -1; D. 0.

5p **5.** Dacă $a = b + 2$ și $b \in [-3,2]$, atunci a aparține intervalului:

A. $[-1, 0]$; B. $[1, 0]$; C. $[1, 4]$; D. $[-1, 4]$.

5p **6.** Cel mai mare număr real x care verifică inegalitatea $\frac{x}{\sqrt{3}} - \sqrt{12} \geq x \cdot \sqrt{3}$ este:

A. -4; B. -3; C. -2; D. 0.

5p **7.** Mulțimea soluțiilor inecuației $44\cdot x - 484 \leq 0$ conține n numere naturale. Atunci, n este:

A. 10; B. 11; C. 12; D. 13.

5p **8.** Mulțimea soluțiilor inecuației $2 \cdot x + 1 \geq -3 \cdot x - 9$ este:

A. $[-2,+\infty)$; B. $(-\infty,-2]$; C. $[2,+\infty)$; D. $\varnothing$.

Subiectul al II-lea. *La problemele următoare, se cer rezolvări complete.*

10p **1.** Se consideră cercurile $\mathcal{C}_1(O_1, r)$ și $\mathcal{C}_2(O_2, 3\text{ cm})$ așa încât $O_1O_2 = 10$ cm. Aflați valorile numărului r, știind că este număr natural, iar cercurile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt secante.

10p **2.** Fie mulțimea $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 5\}$ și intervalul $I = (a, b)$, $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$. Aflați numerele a și b, știind că suma elementelor mulțimii $M \cap I$ este egală cu 5.

Subiectul al III-lea. *La problemele următoare, se cer rezolvări complete.*

1. Fie $A = \left(-3, -\frac{3}{2}\right)$ și B mulțimea numerelor reale care au partea întreagă egală cu -3.

5p **a)** Determinați mulțimea B.

10p **b)** Calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

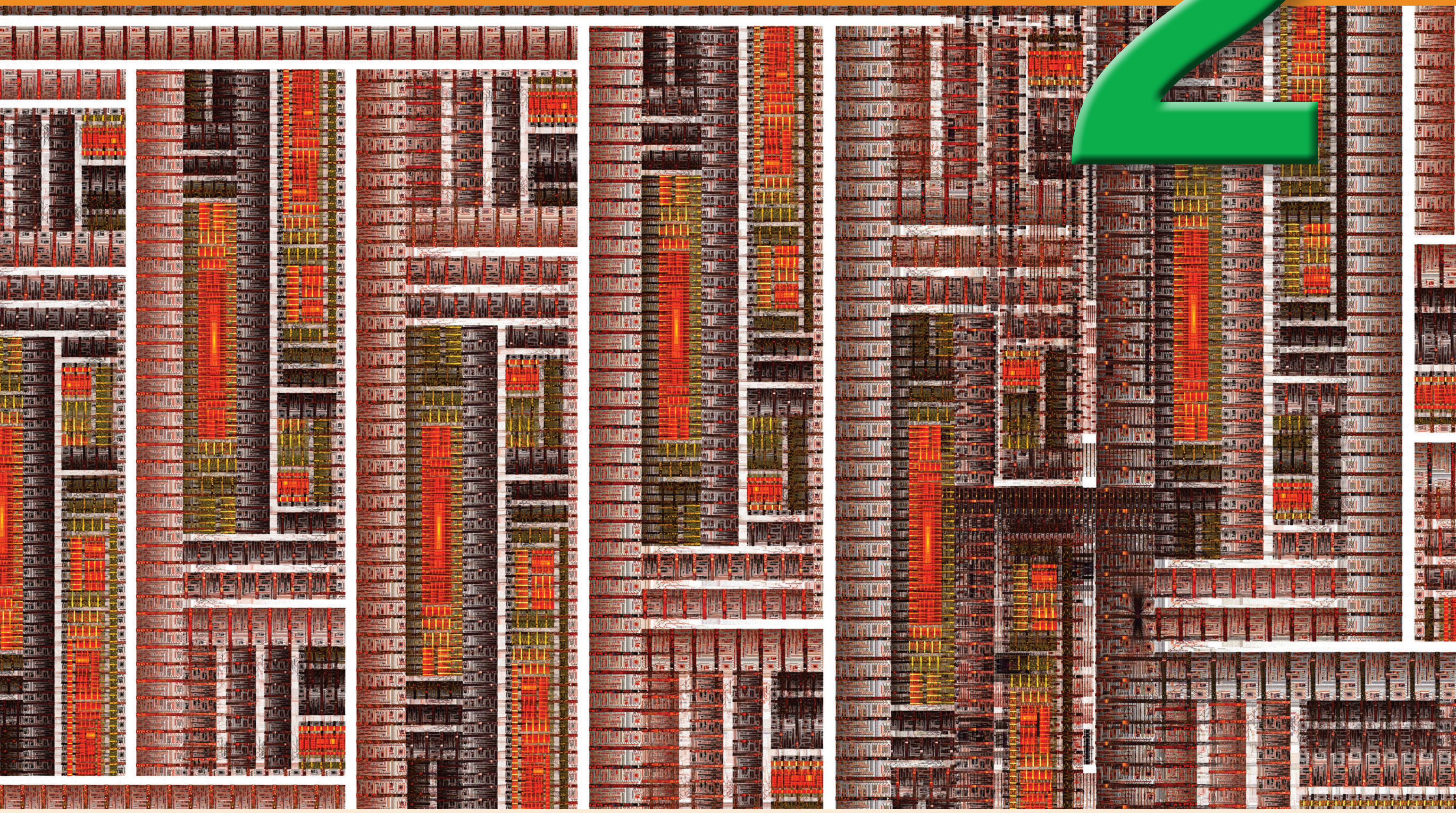
10p **2. a)** Rezolvați inecuațiile:

(1) $4 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) < x - 0,25$ (2) $2 \cdot x - 2^{-1} > x - 3^{-1}$

și notați S_1 respectiv S_2 mulțimile soluțiilor acestora.

5p **b)** Determinați numărul natural n, știind că $\frac{1}{n} \in S_1 \cap S_2$.

CAPITOLUL 2



Calcul algebric în $\mathbb{R}$

1. Operații cu numere reale
2. Formule de calcul prescurtat
3. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul
4. Fracții algebrice. Operații cu fracții algebrice
5. Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$

Competențe specifice

1.2 | 2.2 | 3.2 | 4.2 | 5.2 | 6.2

1 Operații cu numere reale

L1. Operații cu numere reale

Puțină istorie Cuvântul *algebră* provine din limba arabă (*al-jabr*). Rădăcinile algebrei provin din Babilonul antic. Babilonienii au dezvoltat un sistem aritmetic avansat, lucru evident mai ales în modalitatea algoritmică de a efectua calculele. Metodele algebrice standard au apărut datorită matematicianului *Al-Horezmi* (Muhammad ibn Musa Khwārizmī), care aproximativ între anii 780 și 850, a elaborat celebra sa lucrare, *Cartea adunării și scăderii după metodele indiene*.

Pe mulțimea numerelor reale, am studiat următoarele operații: *adunarea*, *scăderea*, *înmulțirea*, *împărțirea*, cărora li s-au adăugat *ridicarea la putere* și *rădăcina pătrată a unui număr real*.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

1 Efectuați calculele următoare. Precizați proprietățile folosite în fiecare etapă de calcul.

AF **a)** $\left(-\sqrt{7}+5\right)+\sqrt{7}$. **b)** $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 5\right)\cdot\sqrt{3}$.

a) *Rezolvare* / *Justificări*

Rezolvare	*Justificări*
$\left(-\sqrt{7}+5\right)+\sqrt{7}=$	Start
$=\left[5+\left(-\sqrt{7}\right)\right]+\sqrt{7}=$	Folosim comutativitatea adunării numerelor reale.
$=5+\left[\left(-\sqrt{7}\right)+\sqrt{7}\right]=$	Folosim asociativitatea adunării numerelor reale.
$=5+0=$	Opusul numărului $-\sqrt{7}$ este $\sqrt{7}$ și $\left(-\sqrt{7}\right)+\sqrt{7}=0$.
$=5$	0 este element neutru în raport cu adunarea numerelor reale.
$\left(-\sqrt{7}+5\right)+\sqrt{7}=5$	Finalizare

b) *Rezolvare* / *Justificări*

Rezolvare	*Justificări*
$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 5\right)\cdot\sqrt{3}=$	Start
$=\left(5\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\sqrt{3}=$	Folosim comutativitatea înmulțirii numerelor reale.
$=5\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}\right)=$	Folosim asociativitatea înmulțirii numerelor reale.
$=5\cdot 1=$	Inversul numărului $\sqrt{3}$ este $\frac{1}{\sqrt{3}}$ și $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}=1$.
$=5$	1 este element neutru în raport cu înmulțirea.
$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 5\right)\cdot\sqrt{3}=5$	Finalizare

2 Se consideră suma de numere reale $S=\frac{7}{6}+\left(-\frac{2}{3}\right)+\sqrt{14}+\left(-\sqrt{27}\right)$.

AI **a)** Fără a utiliza un calculator, aproximați la zecimi, prin lipsă, numărul: $\frac{7}{6}+\left(-\frac{2}{3}\right)$.

b) Utilizând un calculator, aproximați prin lipsă, la zecimi, fiecare dintre numerele $\sqrt{14}$ și $\sqrt{27}$.
c) Utilizând aproximările anterioare, *estimați*[1] valoarea sumei S.

[1] Dacă pentru efectuarea unui calcul folosim aproximări ale numerelor care intervin, atunci vom obține o estimare a rezultatului corect.

Rezolvare: **a)** $\frac{7}{6}+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{6}-\,^{2)}\frac{4}{3}=\frac{7}{6}-\frac{8}{6}=-\frac{1}{3}\approx-0{,}4$. **b)** $\sqrt{14}\approx3{,}7$ și $\sqrt{27}\approx5{,}1$.

Deci $S\approx-0{,}4+3{,}7-5{,}1=-5{,}5+3{,}7=-1{,}8$. Rezultă $S\approx-1{,}8$.

Temă de portofoliu

1. Descrieți ordinea efectuării operațiilor cu numere reale și modul de folosire a parantezelor în operațiile cu numere reale.

2. Compuneți două exerciții de calcul. Rezolvați-le, descriind fiecare etapă și explicând ordinea efectuării operațiilor.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Calculați:

a) $5\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}$;

b) $4\sqrt{2}-5\sqrt{2}+3\sqrt{2}$;

c) $-2\sqrt{5}+10\sqrt{5}-6\sqrt{5}$

d) $3\sqrt{7}-\left(2\sqrt{7}-5\sqrt{7}+\sqrt{7}\right)-4\sqrt{7}$;

e) $4+\sqrt{4}$; **f)** $9+\sqrt{9}$.

2 Copiați pe caiete, apoi completați tabelul:

a	$2\sqrt{3}$	$7\sqrt{2}$	$4\sqrt{5}$			$-9\sqrt{6}$
b		$-4\sqrt{2}$			$3\sqrt{7}$	$4\sqrt{6}$
$a+b$			$11\sqrt{5}$			
$a-b$				$4\sqrt{11}$	$-5\sqrt{7}$	
$-b$	$-5\sqrt{3}$			$14\sqrt{11}$		

3 Copiați și completați tabelul:

a	$3\sqrt{3}$	$5\sqrt{2}$			$6\sqrt{7}$	
b	$2\sqrt{2}$		$-4\sqrt{5}$			$-8\sqrt{3}$
$a\cdot b$		$10\sqrt{10}$		$36\sqrt{2}$		
$a:b$			$2\sqrt{2}$		2	$2\sqrt{3}$
b^{-1}				$\frac{1}{9}$		

4 Calculați:

a) $2\sqrt{3}\cdot3\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$; **b)** $4\sqrt{5}\cdot3\sqrt{5}$;

c) $6\sqrt{11}:2\sqrt{11}$; **d)** $108\sqrt{19}:36\sqrt{19}$.

5 Calculați:

a) $6\sqrt{12}:3\sqrt{2}$; **b)** $-10\sqrt{18}:5\sqrt{6}$;

c) $27\sqrt{9}:9\sqrt{3}$; **d)** $4\sqrt{3}\cdot5\sqrt{2}$;

e) $-2\sqrt{10}\cdot5\sqrt{5}$; **f)** $8\sqrt{8}\cdot4\sqrt{2}$.

6 Calculați:

a) $\left(\sqrt{2}\right)^4\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3$; **b)** $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{10}}{\left(\sqrt{3}\right)^8}$;

c) $\left[\left(\sqrt{5}\right)^2\right]^3$; **d)** $\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\right)^3$;

e) $\left(\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}\right)^2$; **f)** $\sqrt{27^2}$.

7 Calculați:

a) $\left(2\sqrt{3}\right)^2$; **b)** $\left(-3\sqrt{2}\right)^2$;

c) $\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2$; **d)** $\left(-2\sqrt{5}\right)^3$.

8 Copiați pe caiete și completați tabelul:

a	$\sqrt{2}$				
$-a$		$-\sqrt{3}$			
a^{-1}			$\sqrt{5}$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
a^2					
a^3				$16\sqrt{2}$	

9 Calculați $a+b-c$ pentru:

a) $a=2\sqrt{3}-5$, $b=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$, $c=-5+3\sqrt{2}$.

b) $a=2-\sqrt{5}$, $b=-4\sqrt{7}+2\sqrt{5}$, $c=\sqrt{5}-4\sqrt{7}$.

10 Calculați: **a)** $12\sqrt{6}:2\sqrt{3}$; **b)** $-20\sqrt{27}:4\sqrt{9}$; **c)** $72\sqrt{63}:\left(-4\sqrt{7}\right):\left(-\sqrt{3}\right)$.

11 Comparați numerele:

a) $7 + 3\sqrt{2}$ și $7 + 2\sqrt{3}$;

b) $-5\sqrt{2} + 11$ și $-\sqrt{49} + 11$.

12 Raționalizați numitorii și simplificați, dacă este posibil:

a) $-\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; **b)** $\dfrac{10}{2\sqrt{5}}$;

c) $\dfrac{-4\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}$; **d)** $\dfrac{15}{2\sqrt{15}}$.

13 Calculați:

a) $\left(-2\sqrt{6}\right)^2$; **b)** $\left(\dfrac{1}{5}\cdot\sqrt{10}\right)^2$;

c) $\left(\dfrac{7}{\sqrt{7}}\right)^2$; **d)** $\left(\dfrac{12\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)^2$.

14 Calculați în două moduri:

a) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{6} - \left(\dfrac{2}{\sqrt{12}}-\dfrac{3}{\sqrt{6}}\right)\cdot\sqrt{24} - 6$;

b) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}-\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{10} + \left(\dfrac{5}{\sqrt{10}}-\dfrac{2}{5}\right)\cdot\sqrt{50}$.

15 Efectuați:

a) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}} + \dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$;

b) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}} + \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$.

16 Determinați x din egalitățile:

a) $\dfrac{x}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$; **b)** $\dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$;

c) $\dfrac{x}{\sqrt{10}} + \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}}$.

17 Calculați:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}\right):\sqrt{6}$;

b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}-\dfrac{3}{\sqrt{90}}+\dfrac{5}{\sqrt{98}}-\dfrac{4}{\sqrt{32}}\right):\left(\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}-1\right)$.

18 Se consideră numerele $a = 4\sqrt{2}-\sqrt{32}+\sqrt{128}$ și $b = 5\sqrt{3} + \sqrt{27} - 6\sqrt{12}$. Calculați:

a) $a - b$; **b)** $a \cdot b$; **c)** $a : b$; **d)** $a^2 + b^2$.

19 Arătați că următoarele numere sunt raționale:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}$; **b)** $\dfrac{2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}$;

c) $\dfrac{14}{\sqrt{7}} - \sqrt{28}$.

20 Dacă $a = 0{,}1(6) + \sqrt{0{,}36} + 1\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{0{,}09}$, calculați $\sqrt{\dfrac{6}{7}\cdot a}$.

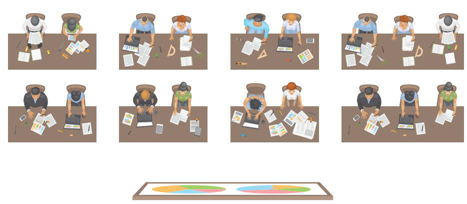
L2. Calcule cu numere reale reprezentate prin litere

Rezolvăm și observăm

1 AF

a) Într-o clasă sunt 3 rânduri de câte două bănci, cu câte 2 elevi în fiecare bancă și un rând de două bănci cu câte 3 elevi în fiecare bancă. Determinați numărul elevilor care sunt în clasă.

b) Determinați numărul elevilor dacă în clasă sunt x rânduri de câte y bănci cu câte 2 elevi în fiecare bancă și un rând cu z bănci, cu câte 3 elevi în fiecare bancă.



Soluție. **a)** $(3 \cdot 2) \cdot 2 + (1 \cdot 2) \cdot 3 = 18$

În clasă sunt 18 elevi.

b) $(x \cdot y) \cdot 2 + (1 \cdot z) \cdot 3 = 2xy + 3z$

În clasă sunt $2xy + 3z$ elevi.

2 AF

Un dreptunghi are lățimea $a = 3$ metri și lungimea $b = 6$ metri. Un alt dreptunghi, de aceeași arie, are lățimea cu $c = 2$ metri mai mică decât lungimea primului dreptunghi. Calculați lungimea celui de-al doilea dreptunghi.

Soluție. Cele două dreptunghiuri au aceeași arie, ab. Cum lățimea celui de-al doilea este cu c mai mică decât lungimea primului, atunci, al doilea dreptunghi are lungimea de $\frac{ab}{b-c}$.

Pentru $a = 3$, $b = 6$ și $c = 2$, lungimea este $\frac{3 \cdot 6}{6-2} = 4{,}5$ (m).

Despre $2xy + 3z$ și $\frac{ab}{b-c}$ se spune că sunt *expresii algebrice*.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

A. Expresie algebrică

Noțiunea de *expresie algebrică* poate fi descrisă prin operații cu numere reale cunoscute și cu numere reale *necunoscute* care sunt reprezentate prin litere, numite uneori *variabile* sau *nedeterminate*.

Exemple de nedeterminate: $a, b, \ldots, x, y, \ldots$ (numere reale necunoscute)

Elementele mulțimii $\mathbb{R}$ și *nedeterminatele* sunt *expresii algebrice*.
Suma, *diferența*, *produsul* și *raportul* a două *expresii algebrice* sunt *expresii algebrice*, împărțirea la 0 fiind exclusă.
Prin ridicarea la putere a unei expresii algebrice se obține o expresie algebrică.
Rădăcina pătrată a unei expresii algebrice, dacă are sens, este o expresie algebrică.
Modulul unei expresii algebrice este o expresie algebrică.

Exemple de expresii algebrice:

6; $\frac{2}{3}$; a; $5 \cdot x - 4$; $-6(x+y)$;

$ab + 3x - 2$; $\sqrt{x-2y}$;

$\frac{x^2y-1}{a}$; $\left|\frac{1}{3} \cdot x - 2y\right|$.

O expresie algebrică poate avea una, două sau mai multe *variabile*. O expresie algebrică oarecare cu o singură variabilă x se notează, de regulă, E sau $E(x)$, care se citește „E de x”. O expresie algebrică oarecare cu două necunoscute x și y se notează, de regulă, E sau $E(x, y)$ care se citește „E de x și y”. Litera E poate fi înlocuită și cu alte litere, eventual însoțite de indici. La fel se procedează pentru expresiile algebrice cu mai multe necunoscute.

Observație. În practică, dacă nu există posibilitatea unei confuzii, vom numi expresiile algebrice, simplu, *expresii*.

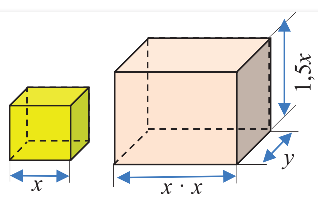
Exemplul 1: Putem nota expresia algebrică $-2x + 3$ cu E, cu $E(x)$ sau cu $E_1(x)$.
Vom scrie:
$E = -2x + 3$ sau $E(x) = -2x + 3$ sau $E_1(x) = -2x + 3$

Exemplul 2: Putem nota expresia algebrică $u^2 - 2uv + 3$ cu F, cu $F_2(u,v)$, cu $F(u,v)$, cu $A(u,v)$ etc.
Vom scrie:
$F = u^2 - 2uv + 3$ sau $F_2(u,v) = u^2 - 2uv + 3$ etc.

B. Înmulțirea și ridicarea la putere a numerelor reale reprezentate prin litere

Produs algebric. Produs algebric restrâns

Problema 1. Se consideră un cub cu muchia de lungime x cm și un paralelipiped dreptunghic cu lungimea de x ori lungimea muchiei cubului, înălțimea de 1,5 ori lungimea muchiei cubului, iar lățimea de y cm. Calculați volumul paralelipipedului.



Soluție. Volumul unui paralelipiped dreptunghic este produsul dintre lungime, lățime și înălțime, exprimate în aceeași unitate de măsură. Dimensiunile paralelipipedului, exprimate în centimetri, sunt: lungimea $= x \cdot x$, lățimea $= y$, înălțimea $= 1{,}5 \cdot x$.
Volumul paralelipipedului dreptunghic, exprimat în cm³, este $\mathcal{V} = (x \cdot x) \cdot y \cdot (1{,}5 \cdot x)$.
Proprietatea de asociativitate a înmulțirii numerelor reale ne permite să renunțăm la paranteze, deci $\mathcal{V} = x \cdot x \cdot y \cdot 1{,}5 \cdot x$;
Folosind comutativitatea și asociativitatea înmulțirii, scriem $\mathcal{V} = 1{,}5 \cdot (x \cdot x \cdot x) \cdot y$, deci $\mathcal{V} = 1{,}5x^3y$.

Un produs în care factorii produsului sunt numere reale sau litere (care reprezintă numere reale) este numit *produs algebric*.

Exemple: $x \cdot x \cdot y \cdot 1{,}5 \cdot x$

$$(-2) \cdot x \cdot y \cdot z \cdot x \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x \cdot z$$

Pentru n număr natural nenul, puterea a n-a a unui număr real x este produsul algebric $x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$, având n factori identici și se notează x^n.
Pentru valorile nenule ale lui x, are loc relația $x^{-n} = (x^{-1})^n$.

❗ *Atenție!* 0^0 nu are sens.

Utilizând regulile de calcul cu numere reale un produs algebric se poate *restrânge.*
Un produs algebric este *produs algebric restrâns* dacă un singur factor al produsului (numit *coeficient*) este număr real, iar restul factorilor sunt litere care apar o singură dată și au exponenții numere naturale.
A efectua sau *a calcula* un produs algebric înseamnă a scrie acel produs sub formă de *produs restrâns*.

Exemple: 1). Produsul algebric $x \cdot x \cdot y \cdot 1{,}5 \cdot x$ nu este un produs algebric restrâns. Efectuând calculele rezultă produsul algebric restrâns $1{,}5x^3y$.
Prin urmare: $x \cdot x \cdot y \cdot 1{,}5 \cdot x = 1{,}5x^3y$.

2) $(-2) \cdot x \cdot 3 \cdot y \cdot z \cdot x \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x \cdot z =$

$= 3 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^2 = 3x^3y^2z^2$.

La un produs algebric *restrâns* distingem *coeficientul produsului* și *partea literală*.

$$\text{coeficient} \leftarrow \overbrace{\boxed{-4}\ \boxed{x^5y^4}}^{\text{produs algebric}} \rightarrow \text{partea literală}$$

C. Reducerea termenilor asemenea

Sumă algebrică. Termeni asemenea

O succesiune de adunări și scăderi de produse algebrice se numește *sumă algebrică*. În acest context, produsele algebrice se numesc *termenii sumei algebrice*, iar coeficienții lor se numesc *coeficienții termenilor sumei*.

$$\overbrace{-\frac{1}{2}x^5y^3 \quad +2xy^3 \quad -7x \quad +9}^{\text{sumă algebrică}}$$

termenii sumei

coeficienții termenilor sumei: $-\frac{1}{2}$, 2, -7, 9

Doi sau mai mulți termeni restrânși ai unei sume algebrice se numesc *termeni asemenea* dacă au *aceeași parte literală*.

$2xy^3 - 7xy + 3{,}5x + 2{,}3xy - 5xy^3 + 8 - \sqrt{3}\,xy$
termeni asemenea: $2xy^3$ și $-5xy^3$
termeni asemenea: $-7xy$, $2{,}3xy$ și $-\sqrt{3}\,xy$

Reducerea termenilor asemenea

Utilizând *metoda factorului comun*, o sumă algebrică care are *toți termenii asemenea* se transformă în *produs algebric*.

Exemplu:

$S_1 = 2\,xyz^2 - 3xyz^2 + 0{,}2\,xyz^2$	1	sumă algebrică cu toți termenii asemenea
$S_1 = (2 - 3 + 0{,}2)\,xyz^2$	2	metoda factorului comun
$S_1 = -\,0{,}8xyz^2$	3	produs algebric

Operația prin care o sumă algebrică cu toți termenii asemenea se transformă în produs algebric se numește *reducerea termenilor asemenea.*

Dezvoltarea unui produs dintre două sume algebrice

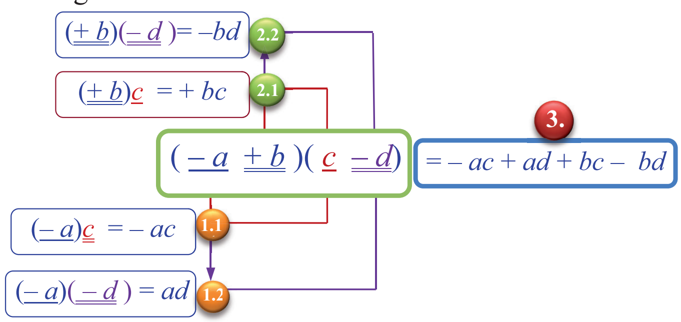
Calculați: $(-a+b)(c-d)$	*Etapele calculului*
$(-a+b)\underbrace{(c-d)}_{x}$ 1	se notează $(c-d)$ cu x
$(-a+b)\,x$ 2	se aplică distributivitatea înmulțirii față de adunare
$-ax+bx$ 3	se înlocuiește x cu $(c-d)$
$-a\,(c-d)+b\,(c-d)$ 4	se aplică distributivitatea înmulțirii față de adunare / scădere
$-(ac-ad)+bc-bd$ 5 $(-a+b)(c-d) = -ac+ad+bc-bd$	finalizare

Observații: **1.** Produsul a două sume algebrice este o sumă algebrică.

2. Dezvoltarea produsului dintre două sume algebrice reprezintă scrierea produsului respectiv ca o sumă algebrică restrânsă.

3. Suma algebrică restrânsă este o sumă algebrică care nu conține termeni asemenea.

4. Schema alăturată ilustrează grafic modul de calcul al produsului dintre S_1 și S_2, unde $S_1 = -a+b$ și $S_2 = c-d$. Acest calcul justifică regula de dezvoltare a produsului dintre două sume algebrice oarecare.



Regula		*Exemplu:* Calculați produsul $(-2x-3)(4-3x)$
Se înmulțește fiecare termen al primei sume cu fiecare termen al celeilalte sume.	$\Rightarrow$	$(-2x)\cdot 4$ $(-2x)\cdot(-3x)$ $(-3)\cdot 4$ $(-3)(-3x)$
Se însumează produsele algebrice rezultate.	$\Rightarrow$	$(-2x)\cdot 4 + (-2x)\cdot(-3x) + (-3)\cdot 4 + (-3)(-3x)$
Se restrâng termenii sumei și se pun în evidență termenii asemenea.	$\Rightarrow$	$-\underline{8x} + 6x^2 - 12 + \underline{9x}$
Se reduc termenii asemenea.	$\Rightarrow$	$x + 6x^2 - 12$
Se scrie rezultatul final:		$(-2x-3)(4-3x) = 6x^2 + x - 12$

Comentariu.
Rezultatul unui calcul cu numere reale reprezentate prin litere este o *expresie algebrică*.
În particular, produsele și sumele algebrice sunt expresii algebrice.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Calculăm:	Identificăm proprietățile/regulile folosite.
1. $(-3x^2y)^3 = (-3)^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 = -27x^6y^3$	• operații cu puteri • regula semnelor
2. $\dfrac{-27x^6y^3}{3x^2y^4z} = -\dfrac{27}{3} \cdot \dfrac{x^6}{x^2} \cdot \dfrac{y^3}{y^4} \cdot \dfrac{1}{z} = = -9\,x^4\,y^{-1}z^{-1}$	• înmulțirea fracțiilor • operații cu puteri
3. $(-x^2y + 5xy + 7x) - (3xy + x^2y - 3x - 2z) =$ $= -x^2y + 5xy + 7x - 3xy - x^2y + 3x + 2z =$ $= (-1 - 1)\,x^2y + (5 - 3)\,xy + (7 + 3)\,x + 2z =$ $= -2x^2y + 2xy + 10x + 2z$	• asociativitatea adunării, ținând cont de faptul că semnul minus în fața parantezei echivalează cu înmulțirea numărului –1 cu suma scrisă în paranteză, folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare. • reducerea termenilor asemenea.
4. $x(2x - y) = x \cdot 2x + x \cdot (-y) = 2x^2 - xy$	• distributivitatea înmulțirii față de adunare: $a(b + c) = ab + ac$
5. $-2x(x - 3y + 1) = -2x \cdot x - 2x \cdot (-3y) - 2x \cdot 1 =$ $= -2x^2 + 6xy - 2x$	• distributivitatea înmulțirii față de adunare: $a(b + c + d) = ab + ac + ad$

MINITEST La cerințele următoare alegeți varianta corectă; doar un răspuns este corect.

1. Rezultatul calculului $4x^2 + [x \cdot (x + 6) - (5x^2 + 2x)]$ este:			
A. $2x$	B. $-4x$	C. $4x$	D. $6x$
2. Dacă $A = 3x - y$ și $B = 2x + 5y$, atunci rezultatul calculului $2x \cdot A + y \cdot B$ este:			
A. $x^2 + 5y^2$	B. $6x^2 + y^2$	C. $x^2 + y^2$	D. $6x^2 + 5y^2$
3. Perimetrul unui dreptunghi este $4a + 2b$, $a > 0$, $b > 0$, iar lungimea uneia dintre laturi este $2a$ cm. Aria dreptungiului este:			
A. $a \cdot b$ cm²	B. $-2 \cdot a \cdot b$ cm²	C. $2 \cdot a \cdot b$ cm²	D. $a^2 \cdot b^2$ cm²

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Restrângeți produsul algebric:

a) $3a \cdot 6 \cdot (-2ab)$ **b)** $-3 \cdot 2x \cdot (-x)$

c) $\dfrac{1}{3}a \cdot \dfrac{2}{5}b \cdot \left(-\dfrac{21}{4}a\right)$ **d)** $-\dfrac{1}{2}x^2a \cdot (-6x^2a^2)$

2 Se consideră sumele

$S_1 = 3xyz^2 - \dfrac{1}{2}xyz^2 + 0{,}2xyz^2$ și

$S_2 = -3ax + \dfrac{1}{2}ax - \dfrac{5}{2}ax + 7ax.$

Utilizând metoda factorului comun, transformați fiecare sumă în produs algebric.

3 Copiați pe caiete suma

$S_1 = 3x^2 - 7x - x^3 - 5x^2 + 9x + 15.$

a) Subliniați termenii sumei cu o linie sau cu două linii astfel încât toți termenii subliniați cu o linie să fie asemenea și toți termenii subliniați cu două linii să fie asemenea.

b) Rezolvați cerința a) pentru suma

$S_2 = -2ab^2 + 3cd - 7ab^2 + \sqrt{3}\,cd - ab^2.$

4 Reduceți termenii asemenea:

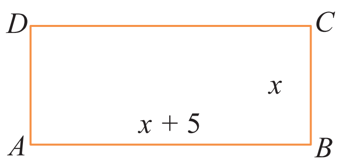
a) $3x - x + 5x - 7x$;

b) $x - 2 - 3x + 5$;

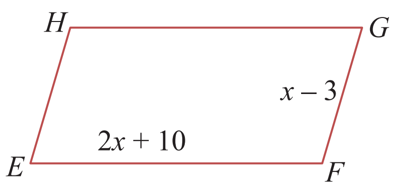
c) $0{,}2 - 0{,}3x + 0{,}5 - 0{,}7x$.

5 Calculați, în funcție de x, perimetrele următoarelor figuri geometrice:

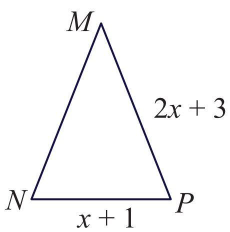
ABCD este dreptunghi



EFGH este paralelogram și $x > 3$



ΔMNP este isoscel și $x > 0$



6 Reduceți termenii asemenea:

a) $5x + (-4x + 2y) - (5x - 7y) - (9y + 3x)$;

b) $y^2 - 2y + 3 - (3y - 1 + y^2) + (1 + 5y)$;

c) $-\sqrt{2}\,x^2y + 2xy^2 + 3\sqrt{2}\,x^2y - 2xy^2$;

d) $(0{,}1x + 0{,}7x^2 - 0{,}3) + (0{,}3x^2 + 0{,}9x + 1{,}3)$;

e) $(3\sqrt{2}\,x - 2\sqrt{3}\,y + \sqrt{6}) - (\sqrt{18}\,x - \sqrt{12}\,y)$.

7 Efectuați înmulțirile:

a) $2ab^2 \cdot (-3a^2b)$;

b) $-5x^2 \cdot \frac{1}{2}xy^2 \cdot (-x)$;

c) $\sqrt{2a} \cdot \frac{1}{2}a^2b \cdot \sqrt{8b}$;

d) $x(x - 2)$;

e) $x(-x + y - 1)$;

f) $-4xy(3x - 2y)$.

8 Se consideră $A = -x + y^2 - 2$ și $B = 3 + y^2 - 2x$.

a) Scrieți suma $A + B$ ca o sumă algebrică restrânsă.

b) Scrieți expresia $3A - B$ în forma cea mai simplă.

c) Calculați numerele A și B pentru $x = -1$ și $y = 2$.

9 Efectuați împărțirile:

a) $(2x^2 + 3x) : x$;

b) $(x^2y - xy^2 + x^2y^2) : xy$;

c) $(2x^3y - x^2y^2 + 4x^2y) : 2xy$.

10 Fie x un număr natural și $A = 3x - 1$, $B = -x$.

a) Arătați că $A + B$ este număr natural impar, oricare ar fi numărul x natural și nenul.

b) Scrieți expresia algebrică $-2A + 5B$ în formă restrânsă.

c) Arătați că $A + 3B$ este număr întreg.

11 Efectuați înmulțirile și apoi reduceți termenii asemenea:

a) $(x + 1)(2x - 1)$;

b) $(x - 2)(-2x + 3)$;

c) $(0{,}5x - 1)(10x + 2)$;

d) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$;

e) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$.

12 Fie a, b, c numere reale, $c \neq 0$.
Probați egalitățile $(a + b) : c = a : c + b : c$ și $(a - b) : c = a : c - b : c$, pentru:

1) $a = 25$, $b = 30$, $c = -5$.

2) $a = 6x$, $b = 9x$, $c = -3x$.

13 Efectuați ridicările la putere:

a) $(-a^2b)^3$;

b) $\left(\frac{1}{3}xy^2z^3\right)^2$;

c) $\left(\sqrt{2}ab^2c\right)^3$.

14 Fie $A = -3x^2y$, $B = \frac{1}{3}xy^2$, $C = xy$.
Efectuați calculele și scrieți rezultatul în formă restrânsă:

a) $A \cdot B \cdot C$ **b)** $A \cdot B : C$ **c)** $A^2 \cdot B : C^1$

15 Se consideră $A = -\sqrt{2}xyz^2$, $B = \sqrt{6}x^2yz$ și $C = \sqrt{3}\,xy^2z$. Calculați:

a) $A \cdot B \cdot C$;

b) $A \cdot C : B$;

c) $(A \cdot B^2) : (\sqrt{3} \cdot C)$.

16 Efectuați calculele și scrieți rezultatul în forma cea mai simplă:

a) $x(-2x + 1) + 3x(x - 2)$;

b) $(2x + 3)(x - 1) + (3x - 2)(-x + 5)$;

c) $(-5x + 2)(3x - 1) + (15x + 7)(x - 3)$;

d) $(x - 1)(-5x + 3) + 5x(x - 1)$;

e) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x^3 + 8$;

f) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) + 1 - 8x^3$.

2 Formule de calcul prescurtat

L1. Pătratul unui binom. Produsul dintre suma și diferența a doi termeni

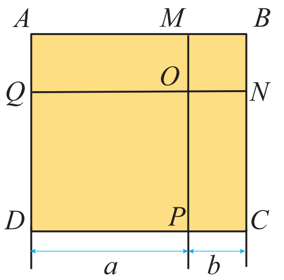
Problema 1. În figura alăturată, $ABCD$ este o suprafață pătratică, formată

AI din reuniunea suprafețelor pătratice $MONB$ și $OQDP$ și a suprafețelor dreptunghiulare $ONCP$ și $AMOQ$, iar lungimile a și b sunt exprimate în aceeași unitate de măsură.

a) Calculați ariile suprafețelor pătratice $OQDP$ și $MONB$.

b) Calculați ariile suprafețelor dreptunghiulare $ONCP$ și $AMOQ$.

c) Calculați aria suprafeței pătratice $ABCD$ în două moduri și deduceți că $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, oricare ar fi numerele reale pozitive a și b.



Soluție. **a)** $\mathcal{A}_{(OQDP)} = a^2$; $\mathcal{A}_{(MONB)} = b^2$.

b) $\mathcal{A}_{(ONCP)} = a \cdot b$; $\mathcal{A}_{(AMOQ)} = a \cdot b$.

c) Observăm că $\mathcal{A}_{(ABCD)} = \mathcal{A}_{(OQDP)} + \mathcal{A}_{(MONB)} + \mathcal{A}_{(ONCP)} + \mathcal{A}_{(AMOQ)}$. Dar, $\mathcal{A}_{(ABCD)} = (a + b)^2$ și folosind rezultatele anterioare, rezultă egalitatea $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, oricare ar fi numerele reale și pozitive a și b.

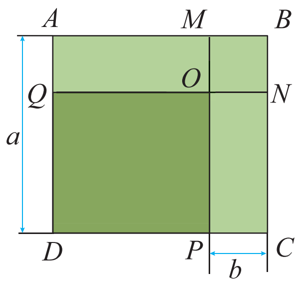
Concluzie. Pătratul sumei a doi termeni pozitivi este egal cu *suma* dintre *pătratele celor doi termeni* și *dublul produsului* acestora.

Problema 2. În figura alăturată, $ABCD$, $MONB$ și $OQDP$ sunt suprafețe

AI pătratice, iar $ABNQ$ și $MBCP$ sunt suprafețe dreptunghiulare. Lungimile a și b sunt exprimate în aceeași unitate de măsură.

a) Calculați ariile suprafețelor $OQDP$, $MBCP$, $ABNQ$ și $MONB$.

b) Calculați aria suprafeței pătratice $OQDP$ în două moduri și deduceți că $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, oricare ar fi numerele reale pozitive a și b.



Soluție. **a)** $\mathcal{A}_{(OQDP)} = (a - b)^2$; $\mathcal{A}_{(MBCP)} = ab$; $\mathcal{A}_{(ABNQ)} = ab$; $\mathcal{A}_{(MONB)} = b^2$.

b) Observăm că $\mathcal{A}_{(OQDP)} = \mathcal{A}_{(ABCD)} - \mathcal{A}_{(MBCP)} - \mathcal{A}_{(ABNQ)} + \mathcal{A}_{(MONB)}$.

Cum $\mathcal{A}_{(ABCD)} = a^2$, ținând cont de rezultatele anterioare, rezultă egalitatea $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, oricare ar fi numerele reale pozitive a și b.

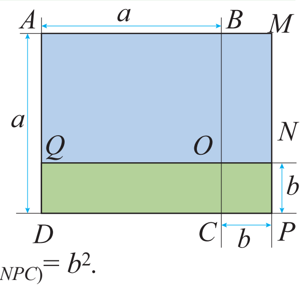
Concluzie. Pătratul diferenței a doi termeni pozitivi este egal cu *diferența* dintre *suma pătratelor celor doi termeni* și *dublul produsului* acestora.

Problema 3. În figura alăturată, $ABCD$ și $ONPC$ sunt suprafețe pătratice, iar

AI $ONMB$ și $OCDQ$ sunt suprafețe dreptunghiulare. Lungimile a și b sunt exprimate în aceeași unitate de măsură.

a) Calculați ariile suprafețelor $AMNQ$, $ABCD$, $BMPC$, $OCDQ$ și $ONPC$.

b) Exprimați aria suprafeței $AMNQ$ în două moduri și deduceți că $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, oricare ar fi numerele reale pozitive a și b, cu $a > b$.



Soluție. **a)** $\mathcal{A}_{(AMNQ)} = (a + b)(a - b)$; $\mathcal{A}_{(ABCD)} = a^2$; $\mathcal{A}_{(MBCP)} = ab$; $\mathcal{A}_{(OCDQ)} = ab$; $\mathcal{A}_{(ONPC)} = b^2$.

b) Observăm că $\mathcal{A}_{(AMNQ)} = \mathcal{A}_{(ABCD)} + \mathcal{A}_{(BMPC)} - \mathcal{A}_{(OCDQ)} - \mathcal{A}_{(ONPC)} = a^2 + ab - ab - b^2$.

Cum $\mathcal{A}_{(AMNQ))} = (a + b)(a - b)$, ținând cont de rezultatele anterioare, rezultă egalitatea $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, oricare ar fi numerele reale și pozitive a și b, cu $a > b$.

Concluzie. Produsul dintre suma și diferența a doi termeni pozitivi este egal cu *diferența pătratelor* termenilor.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Întrucât lungimile segmentelor sunt numere pozitive, egalitățile demonstrate în problemele anterioare au fost justificate doar pentru cazul când numerele a și b sunt mai mari decât 0.
Vom demonstra, *prin calcul algebric*, justețea celor trei egalități pentru două *numere reale oarecare*.

Problema 4. Dezvoltând expresia algebrică din membrul
AI stâng, dovediți că fiecare dintre următoarele egalități este adevărată, *oricare ar fi numerele reale a și b*.

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Soluție:
a) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
b) $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
c) $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$.

Observație. Cele trei egalități au fost demonstrate fără a fi necesar să stabilim condiții pentru valorile pe care le pot lua variabilele a și b. Astfel de egalități se numesc *identități* sau *formule*. Vom numi identitățile enumerate mai sus *identități remarcabile* sau *formule de calcul prescurtat*. Acestea sunt utilizate frecvent pentru efectuarea unor calcule algebrice.

Concluzie. Oricare ar fi numerele reale a și b, au loc următoarele *formule de calcul prescurtat*:

1. Pătratul *sumei* a doi termeni
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Pătratul *diferenței* a doi termeni
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. Produsul dintre *suma* și *diferența* a doi termeni
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Exemple:
1) $(\underline{a}\ \underline{-b})^2 = \underline{a}^2 + (\underline{-b})^2 + 2 \cdot a \cdot (\underline{-b}) = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b = a^2 - 2ab + b^2$.

2) $(\underline{-2x}\ \underline{+3})^2 = (\underline{-2x})^2 + \underline{3}^2 + 2 \cdot (\underline{-2x}) \cdot \underline{3} = 4x^2 + 9 - 12x = 4x^2 - 12x + 9$

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

1 Dezvoltați expresiile algebrice $E_1 = (-2x^2y + xy^2)^2$ și $E_2 = (2x^2 - 5x)(2x^2 + 5x)$.

$E_1 = (-2x^2y + xy^2)^2$

Etapele rezolvării:	*Rezolvare*
Identificăm cei doi termeni ai sumei algebrice	$E_1 = (\underline{-2x^2y} + \underline{xy^2})^2$
Aplicăm formula pentru *pătratul sumei* a doi termeni.	$E_1 = (\underline{-2x^2y})^2 + (\underline{xy^2})^2 + 2(\underline{-2x^2y}) \cdot (\underline{xy^2})$
Efectuăm calculele	$E_1 = 4x^4y^2 + x^2y^4 - 4x^3y^3$.
Finalizăm	$(-2x^2y + xy^2)^2 = 4x^4y^2 + x^2y^4 - 4x^3y^3$

$E_2 = (2x^2 - 5x)(2x^2 + 5x)$

Etapele rezolvării:	*Rezolvare*
Identificăm cei doi termeni ai sumei, care sunt și termeni ai diferenței:	$E_2 = (\underline{2x^2} - \underline{5x})(\underline{2x^2} + \underline{5x})$
Aplicăm formula de calcul pentru produsul sumei cu diferența a doi termeni	$E_2 = (\underline{2x^2})^2 - (\underline{5x})^2$
Efectuăm calculele:	$E_2 = 4x^4 - 25x^2$
Finalizăm	$(2x^2 - 5x)(2x^2 + 5x) = 4x^4 - 25x^2$

2 Utilizați formulele de calcul prescurtat pentru a calcula: **a)** 61^2; **b)** 59^2; **c)** $61 \cdot 59$.

Soluție.
a) $61^2 = (60 + 1)^2 = 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 1 + 1^2 = 3600 + 120 + 1 = 3721$
b) $59^2 = (60 - 1)^2 = 60^2 - 2 \cdot 60 \cdot 1 + 1^2 = 3600 - 120 + 1 = 3481$
c) $61 \cdot 59 = (60 + 1)(60 - 1) = 60^2 - 1^2 = 3600 - 1 = 3599$

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Pentru fiecare dintre următoarele sume algebrice $2x + 3y$; $\sqrt{2} \cdot t - 2\sqrt{2}$; $-2xy + 4z$; $-4u - 0{,}5v$:

a) subliniați cu o linie primul termen și cu două linii al doilea termen;

b) dezvoltați pătratul sumei și scrieți expresia obținută în formă restrânsă.

2 Dezvoltați următoarele expresii algebrice:

a) $(3x + 1)^2$; **b)** $(2a + 3b)^2$;

c) $(5a - 2b)^2$; **d)** $(-4u + 3v)^2$;

e) $(-4xy - 3z)^2$; **f)** $(4xy + 3z)^2$.

3 Folosind formulele de calcul prescurtat, calculați:

a) 101^2; 102^2; 105^2;

b) 99^2; 199^2; 57^2;

c) $1{,}1^2$; $0{,}9^2$; 1001^2.

4 Copiați tabelele pe caiet, apoi completați *etapele de rezolvare* și *rezolvarea*.

Dezvoltarea expresiei $(-ax + by)^2$	
Etapele de rezolvare	*Rezolvarea*
...	...

Dezvoltarea expresiei $(ax - by)^2$	
Etapele de rezolvare	*Rezolvarea*
...	...

5 Folosind formula de calcul pentru pătratul unei sume algebrice, calculați:

a) $(x^2 + 2y)^2$; **b)** $(4x - 3y)^2$;

c) $(\sqrt{2}x + \sqrt{3})^2$; **d)** $(x - \sqrt{5}y)^2$.

e) $\left(\frac{1}{2}x - y\right)^2$; **f)** $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

6 Folosind formula de calcul pentru produsul dintre suma și diferența a doi termeni, calculați:

a) $(3x + y)(3x - y)$; **b)** $\left(5x - \frac{1}{2}\right)\left(5x + \frac{1}{2}\right)$;

c) $\left(\sqrt{3} - x\right)\left(\sqrt{3} + x\right)$.

7 Folosind formulele de calcul prescurtat potrivite, calculați:

a) $101 \cdot 99$; **b)** $102 \cdot 98$;

c) $299 \cdot 301$; **d)** $805 \cdot 795$; **e)** $4{,}1 \cdot 3{,}9$.

8 Folosind formulele de calcul prescurtat potrivite, calculați:

a) $(7a + 5)^2$; $(3b - 5c)^2$; $(2u + v)(2u - v)$;

b) $\left(\frac{1}{2}a + 3\right)^2$; $\left(\frac{2}{3}x - 3y\right)^2$;

$\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b\right)$;

c) $(\sqrt{5}\,a + 3)^2$; $(\sqrt{2}x - \sqrt{3}y)^2$;

$(\sqrt{2}\,p + \sqrt{5}\,q)(\sqrt{2}\,p - \sqrt{5}\,q)$.

9 Efectuați, folosind formulele de calcul prescurtat.

a) $(x + 2y)^2 + (x - 2y)(x + 2y)$;

b) $(3x - y)^2 - (3x + 5)(3x - 5)$;

c) $(1 - 5y)^2 + (1 + 5y)^2 - 25y^2 - 2$;

d) $(2 + x)^2 + (1 + x)^2 - (3 + x)^2$.

10 Se consideră expresia algebrică $E(x) = (2x - 3)^2 + 2(2x - 3)(2x + 3) + (2x + 3)^2$.

a) Arătați că expresia $E(x)$ este pătratul unei expresii algebrice, oricare ar fi numărul real x.

b) Arătați că pentru $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$n = (2x - 3)^2 + 2(2x - 3)(2x + 3) + (2x + 3)^2$ este un număr natural.

11 Efectuați calculele și reduceți termenii asemenea:

a) $3x(x + 1)^2 - (2x - 3)(2x + 3)^2 + x^2(5x + 6)$;

b) $-2x(x^2 - x + 1) - 2x(x + 1) + (x + 1)^2 + 2x(x^2 + 1)$;

c) $11x(2x - 3) - (25x^2) : (-5x) + (2x + y)^2 - 4x(x + y) - 2x(11x - 14)$.

12 Calculați, folosind formula de calcul pentru produsul dintre suma și diferența a doi termeni.

a) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$;

b) $(2x - 3)(2x + 3)(4x^2 + 9)$;

c) $(\sqrt{2}\,x + 5)(\sqrt{2}\,x - 5)(2x^2 + 25)$.

13 **a)** Fie $k \in \mathbb{R}$. Calculați $(4 \cdot k)^2$, $(4 \cdot k + 1)^2$, $(4 \cdot k + 2)^2$, $(4 \cdot k + 3)^2$.

b) Arătați că restul împărțirii unui pătrat perfect la 4 este 0 sau 1.

c) Demonstrați că numărul $a(a + 1)(a + 2)(a + 3) + 10$, nu este pătrat perfect pentru nicio valoare $a \in \mathbb{N}$.

L2. Aplicații ale formulelor de calcul prescurtat în raționalizarea numitorilor unor fracții

Ne amintim!

1. Dacă a este număr rațional nenul și $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $a \cdot \sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. Dacă numerele a, b, c sunt raționale, $a > 0$, $c > 0$, atunci numerele $\left(\sqrt{a}\right)^2$ și $(b\sqrt{c}) \cdot \sqrt{c}$ sunt raționale.
3. Dacă $m \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci numerele $m + \sqrt{n}$, $m - \sqrt{n}$ sunt iraționale.
4. Dacă n și p sunt numere raționale pozitive astfel încât $\sqrt{n}$, $\sqrt{p} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci numărul $\sqrt{n} + \sqrt{p}$ este irațional. Dacă, în plus, $n \neq p$, atunci și numărul $\sqrt{n} - \sqrt{p}$ este irațional.

Observație. Suma a două numere iraționale poate fi un număr rațional sau un număr irațional.
Produsul a două numere iraționale poate fi un număr rațional sau un număr irațional.

5. a) Dacă $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{Q}^*$, atunci se raționalizează numitorul fracției $\frac{a}{\sqrt{b}}$, astfel: $^{\sqrt{b})}\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b}$

$$^{\sqrt{3})}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) Dacă $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{Q}^+$ și $c \in \mathbb{Q}^*$, atunci se raționalizează numitorul fracției $\frac{a}{c\sqrt{b}}$, astfel: $^{\sqrt{b})}\frac{a}{c\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{c\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{bc}$

$$^{\sqrt{2})}\frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{5 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

Rezolvăm și observăm

Problemă. Se consideră numerele $a = (2+\sqrt{3})^2$, $b = \left(\sqrt{2}-3\right)^2$, $c = \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$, $d = \left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2$,

$e = (2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})$ și $f = (\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Determinați mulțimile $\{a, b, c, d, e, f\} \cap \mathbb{Q}$ și $\{a, b, c, d, e, f\} \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Soluție: Aplicând formulele de calcul prescurtat, obținem:

$a = 7 + 4\sqrt{3}$, $b = 11 - 6\sqrt{2}$, $c = 5 + 2\sqrt{6}$, $d = 5 - 2\sqrt{6}$, $e = 4 - 3 = 1$, $f = 2 - 3 = -1$.

Atunci: $\{a, d, c, d, e, f\} \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{a, b, c, d\}$ și $\{a, d, c, d, e, f\} \cap \mathbb{Q} = \{e, f\}$

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Constatăm că:

1. Dacă $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}_+$ și $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b \in \mathbb{Q}$.
2. Dacă $a \in \mathbb{Q}_+$, $b \in \mathbb{Q}_+$ și $\sqrt{a}$, $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a \neq b$, atunci $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b \in \mathbb{Q}$.

Formula de calcul prescurtat referitoare la diferența a două pătrate ne ajută să formulăm o tehnică de raționalizare a numitorilor unor fracții.

Aplicație. (raționalizarea numitorilor)
a) Pentru $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}_+$, astfel încât $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, scrieți fracția $\frac{1}{a+\sqrt{b}}$ cu numitorul număr rațional.

Soluție. Știm că $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2 - b$, care este un număr rațional. Deducem că putem amplifica fracția cu $a-\sqrt{b}$ și obținem ${}^{a-\sqrt{b})}\frac{1}{a+\sqrt{b}} = \frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}$, care are numitorul rațional.

Observație. În mod analog, ${}^{a+\sqrt{b})}\frac{1}{a-\sqrt{b}} = \frac{a+\sqrt{b}}{a^2-b}$, unde $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}_+$, astfel încât $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

b) Pentru $a \in \mathbb{Q}_+$, $b \in \mathbb{Q}_+$ astfel încât $\sqrt{a}$, $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, scrieți fracția $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ cu numitorul număr rațional.

Soluție. Știm că $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a - b$, care este un număr rațional. Deducem că putem amplifica fracția cu $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ și obținem ${}^{\sqrt{a}-\sqrt{b})}\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$, care are numitorul rațional.

Observație. În mod analog, ${}^{\sqrt{a}+\sqrt{b})}\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$, unde $a \in \mathbb{Q}_+$, $b \in \mathbb{Q}_+$ și $\sqrt{a}$, $\sqrt{b} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $a \neq b$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Raționalizați numitorii fracțiilor: $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$, $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$, $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$, $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$, $\frac{-9}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$.

2 Scoateți factorii de sub radical, apoi raționalizați numitorii fracțiilor:
$\frac{4}{\sqrt{12}+2}$, $\frac{6}{3-\sqrt{27}}$, $\frac{3\sqrt{12}}{\sqrt{12}-\sqrt{9}}$, $\frac{10}{\sqrt{3}-\sqrt{8}}$, $\frac{6}{\sqrt{20}+\sqrt{8}}$.

3 Calculați: **a)** $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

b) $\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{3-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

c) $\frac{18}{\sqrt{6}} - \frac{5}{\sqrt{6}-1} - \sqrt{24}$.

4 Raționalizați numitorii $\frac{11}{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-5\sqrt{2}}$.

5 Arătați că numărul $\frac{-2}{\sqrt{9}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$ este irațional.

6 Comparați numerele $a = \left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^{-1}$ și $b = \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^{-1}$

7 Efectuați calculele:
a) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$
b) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{10}+\sqrt{5}} + \frac{15}{\sqrt{25}+\sqrt{10}}$
c) $\left(\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3} - \frac{6}{3\sqrt{3}+5}\right) : \left(\frac{1}{3-2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

8 Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor $m = \frac{2}{3+\sqrt{7}} - \frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}$ și $n = \sqrt{\left(\sqrt{2}-3\right)^2}$.

9 Fie numărul
$p = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \left[\frac{1}{3\sqrt{2}} - (2\sqrt{2})^{-1}\right] \cdot 2\sqrt{2}$
a) Arătați că p este număr rațional.
b) Calculați $\frac{1}{\sqrt{p+6}}$.

10 Fie $a = \left(\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}\right) : \left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\right)^{-1}$
și $b = \left(\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right) : (\sqrt{7}-\sqrt{5}) : \frac{5}{\sqrt{5}}$.
Stabiliți dacă numărul $b - a$ este sau nu rațional.

3 Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul

L1. Descompunere în factori folosind factorul comun

Ne amintim!

În mulțimea numerelor reale, înmulțirea este distributivă față de adunare.

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c,$
oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$

Exemple:
1. $3 \cdot (x+2) = 3 \cdot x + 3 \cdot 2 = 3x + 6$
2. $7y \cdot (y+3) = 7y \cdot y + 7y \cdot 3 = 7y^2 + 21y$
3. $-5ab \cdot (a-2) = (-5ab) \cdot a + (-5ab) \cdot (-2) = -5a^2b + 10ab$

Rezolvăm și observăm

Proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare ne permite să scriem *produsul* $a \cdot (b+c)$ sub forma unei *sume algebrice*.

Expresia algebrică $a \cdot (b+c)$ este transformată în suma $a \cdot b + a \cdot c$. Am învățat, în acest fel, să *dezvoltăm un produs de factori*.

Exemplu: Dezvoltați expresia:
$x(1+x)(2-x)$

Rezolvare:
$x(1+x)(2-x) = (x+x^2)(2-x) =$
$= 2x - x^2 + 2x^2 - x^3 = -x^3 + x^2 + 2x.$

Ne propunem să identificăm modalități de a scrie o expresie dată sub *forma unui produs* de factori.
Scriind identitatea $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ în forma sa echivalentă $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c)$, observăm că:
1. membrul stâng al egalității este o sumă în care a este *factor comun* pentru termenii ab și ac;
2. membrul drept este produsul dintre factorul comun a și factorul $(b+c)$.
Folosind scrierea $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c)$, spunem că „am transformat suma $a \cdot b + a \cdot c$ în produsul $a \cdot (b+c)$, dând *factor comun* numărul a” sau că „am descompus suma $a \cdot b + a \cdot c$ în factori, folosind *factorul comun*”.
În general, transformarea unei sume algebrice într-un produs de expresii algebrice se numește *descompunerea în factori* a sumei date.

Expresiile pe care le-am dezvoltat mai sus pot fi privite și astfel:

Expresia	***Descompunerea în factori***
$a \cdot b + a \cdot c$	$a \cdot (b+c)$
$3x + 6 = 3 \cdot x + 3 \cdot 2$	$3 \cdot (x+2)$
$7y^2 + 21y = 7y \cdot y + 7y \cdot 3$	$7y \cdot (y+3)$
$-5a^2b + 10ab = -5ab \cdot a + (-5ab) \cdot (-2)$	$-5ab \cdot (a-2)$
$-x^3 + x^2 + 2x$	$x(1+x)(2-x)$

Observații.

1. Dacă S este o sumă algebrică, atunci se poate scrie $S = \frac{1}{a} \cdot (aS)$, unde a este un număr real oarecare nenul, reprezentat prin *nedeterminata a*. Prin urmare, dând factor un număr real *nenul* oarecare, *factorul a* nefiind neapărat *comun*, orice sumă algebrică poate fi descompusă în produs de doi factori.
2. Când ne referim la *descompunerea în factori* a unei sume, avem în vedere doar cazul în care factorul a este *comun* pentru toți termenii sumei care urmează a fi descompusă.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Descompunerea unei sume algebrice în produs de factori nu este întotdeauna ușor de realizat. Nu există o *metodă de descompunere* valabilă pentru orice sumă algebrică și nu orice sumă algebrică poate fi descompusă în factori.
Prin exemple concrete, vom cunoaște câteva *metode de descompunere*.

Aplicație. Descompuneți în factori: **a)** $12x^2 - 28x$; **b)** $(2x + 3)(x - 2) - (2x + 3)(-2x + 1)$.

a) $12x^2 - 28x$	Start
$= \underline{4x} \cdot 3x - \underline{4x} \cdot 7$	Identificăm expresia $4x$, factor comun.
$= \underline{4x}(3x - 7)$	Dăm factor comun expresia $4x$.

b) $(2x + 3)(x - 2) - (2x + 3)(-2x + 1)$	Start
$= \underline{(2x + 3)}(x - 2) - \underline{(2x + 3)}(-2x + 1)$	Identificăm expresia $(2x + 3)$, factor comun.
$= (2x + 3)[(x - 2) - (-2x + 1)]$	Scoatem $(2x + 3)$ factor.
$= (2x + 3)(x - 2 + 2x - 1)$	Reducem termenii asemenea.
$= (2x + 3)(3x - 3)$	În a doua paranteză identificăm factorul comun 3.
$= (2x + 3) \cdot 3 \cdot (x - 1)$	Scoatem pe 3 factor comun.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Descompuneți, folosind metoda factorului comun:
a) $6x + 6y$; **b)** $-8x - 8z$;
c) $3n - 30m$; **d)** $a^3 + 5a$;
e) $9ab + 6a^2$; **f)** $-5abc + 25bc$;
g) $4u^2 - 3uv + 6u$; **h)** $8x^3 - 6x^2 + 2x$.

2 Descompuneți în factori următoarele expresii:
a) $am + bm$; **b)** $5nmp + 10mp$;
c) $p^2 - pq$; **d)** $\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}$;
e) $\sqrt{2}\,a^2 + a$; **f)** $3ab - 9bcd$;
g) $11x^3 - 22ax$; **h)** $4d^2 - \sqrt{3}\,d$.

3 Descompuneți în factori:
a) $x - x^2$; **b)** $\frac{3}{2}xy - \frac{9}{2}y$;
c) $-\sqrt{6}uv + \sqrt{3}v$; **d)** $0,(3)t - 0,(6)\,t^2$.

4 Determinați termenul care trebuie scris în spațiul liber pentru a obține afirmații adevărate:
a) $7x - 7y + ... = 7 \cdot (x - y + 3)$;
b) $6x - 12xy + 18xyz = 6x \cdot (1 - 2y + ...)$;
c) $x^3 + x^2 + ... = x(... + ... + 1)$.

5 Scrieți ca produs următoarele expresii:
a) $x(x + 4) + 3(x + 4)$;
b) $2x(x + \sqrt{3}\,) - 5(x + \sqrt{3}\,)$;
c) $(x + 6)(x - 3) + (x + 6)(x + 5)$.

6 Pentru $x \in \mathbb{R}$, se consideră expresiile algebrice
$E(x) = (x - 1)(x + 2) + (x - 1)(2x + 5)$;
și $F(x) = (x - 11)(x - 2) - (11 - x)$;
a) Arătați că $a - x = -(x - a)$.
b) Descompuneți în factori expresiile $E(x)$, $F(x)$ și $E(x) + F(x)$.
c) Arătați că oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$, numărul $E(n) + F(n)$ este pătratul unui număr întreg.

7 Descompuneți în factori:
$E(x) = 3x(x - 3) - (x - 3)(2x - 1)$;
$F(a) = (a + 1)^2 - 3a(a + 1)$;
$G(x) = (x + 2)(x + 1) - (x + 2)(2x - 1)$;
$H(x) = (x + 1)^2 - x(x + 1)$.

8 Calculați, folosind factorul comun:

a) $2009^2 + 2008 \cdot 2009 - 4018 \cdot 2009$;

b) $1957 \cdot 1959 - 1958 \cdot 1957$;

c) $2009 \cdot 2010 + 2009 \cdot 2008 - 2009 \cdot 4018$;

d) $2009^2 + 2009 \cdot 2008 - 2009 \cdot 4017$.

9 **a)** Dacă $a + b + c = 15$ și $d = 2$ calculați $ad + bd + cd$.

b) Dacă $ab = ac = -3$ calculați $a(b + c)$.

c) Dacă $ac = ad = bc = bd = -2$ calculați $(a + b)(c + d)$ și $(a + b)(c - d)$.

10 Se consideră următoarea expresie:
$E(t) = (3t - 7)^2 + (4t + 9)(3t - 7)$.

a) Scrieți expresia $(3t - 7)^2$ ca un produs de doi factori.

b) Descompuneți expresia $E(t)$, folosind factorul comun.

11 Descompuneți în factori:

a) $1 + \frac{3}{5}a + \frac{9}{25}a^2 + \frac{27}{125}a^3$;

b) $(3x + 1)^2 - (3x + 1)(3x + 2) - 6x(3x + 1)$.

L2. Descompunerea în factori folosind formule de calcul prescurtat

Ne amintim!

Am demonstrat în lecțiile anterioare că pentru orice două numere reale, *pătratul unui binom* (suma algebrică a doi termeni) *și produsul dintre suma și diferența a doi termeni* se pot dezvolta folosind una dintre formulele:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, respectiv $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Formulele de mai sus pot fi citite și în forma:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2, \qquad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2, \qquad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Obținem, în acest fel, formule pentru transformarea expresiilor $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$ sau $a^2 - b^2$ în produs de factori, adică formule pentru *descompunerea în factori* a expresiilor.

Dezvoltarea pătratului unui binom
$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

Restrângerea pătratului unui binom/Descompunerea în factori
$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$
$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$

Observație. Au loc egalitățile: $a^2 + b^2 - 2ab = (-a)^2 + b^2 + 2(-a)b = b^2 + (-a)^2 + 2(-b)a$.
Folosind prima formulă, obținem $a^2 + b^2 - 2ab = (-a + b)^2 = (a - b)^2$.

Dezvoltarea produsului dintre suma și diferența a doi termeni
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Descompunerea în factori a diferenței a două pătrate
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Considerăm expresiile $A = a^2 + 2ax + x^2$, $B = x^2 + 2x + 1$, $C = 4 - 12y + 9y^2$, $D = 4 - x^2$, $E = 4x^2 - 9$ și dorim să le descompunem în factori, *folosind formulele de calcul prescurtat*. Vom prelucra fiecare expresie, pentru a stabili formula care urmează să fie utilizată și pentru a identifica termenii corespunzători formulei.

Expresia	**Pregătirea termenilor și identificarea formulei**	**Descompunerea în factori**	**Formula folosită**
$A = a^2 + 2ax + x^2$	$A = a^2 + 2ax + x^2$	$A = (a + x)^2$	$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$
$B = x^2 + 2x + 1$	$B = x^2 + 2x \cdot 1 + 1^2$	$B = (x + 1)^2$	
$C = 4 - 12y + 9y^2$	$C = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot (3y) + (3y)^2$	$C = (2 - 3y)^2$ sau $C = (3y - 2)^2$	$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$
$D = 4 - x^2$	$D = 2^2 - x^2$	$D = (2 + x)(2 - x)$	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$E = 4x^2 - 9$	$E = (2x)^2 - 3^2$	$E = (2x + 3)(2x - 3)$	

Știm să aplicăm. Identificăm conexiuni

A. Descompunerea în factori folosind formula pătratului unui binom

Exercițiul 1. Descompuneți în factori expresia $9-3xy+\frac{1}{4}x^2y^2$.

Rezolvare:

$9=3^2=(-3)^2$. Deducem că *un termen* este 3 sau -3

$\frac{1}{4}x^2y^2=\left(\frac{1}{2}xy\right)^2=\left(-\frac{1}{2}xy\right)^2$, deci celălalt *termen* este $-\frac{1}{2}xy$ sau $\frac{1}{2}xy$

Avem: $-3xy=2\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}xy\right)$ sau $-3xy=2\cdot(-3)\cdot\left(\frac{1}{2}xy\right)$

Sunt posibile cazurile:

a) $9-3xy+\frac{1}{4}x^2y^2=3^2+\left(-\frac{1}{2}xy\right)^2+2\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}xy\right)=\left(3-\frac{1}{2}xy\right)^2$

b) $9-3xy+\frac{1}{4}x^2y^2=(-3)^2+\left(\frac{1}{2}xy\right)^2+2\cdot(-3)\cdot\left(\frac{1}{2}xy\right)=\left(-3+\frac{1}{2}xy\right)^2$

Etape de rezolvare:

1. Identificăm doi termeni ai expresiei, care sunt pătrate ale unor expresii algebrice.

2. Verificăm dacă unul din cei trei termeni ai expresiei se poate obține înmulțind cu 2 produsul celorlalți doi.

3. Se folosesc *formulele*, evidențiind termenii găsiți.

Descompunerea expresiei este $9-3xy+\frac{1}{4}x^2y^2=\left(3-\frac{1}{2}xy\right)^2$ sau $9-3xy+\frac{1}{4}x^2y^2=\left(-3+\frac{1}{2}xy\right)^2$.

Observații:

Dacă etapele 1) și 2) nu sunt simultan adevărate, metoda de descompunere descrisă nu poate fi aplicată.
În mod obișnuit se folosește varianta a), dar oricare din variante este corectă.

B. Descompunerea în factori folosind formula diferenței a două pătrate

Exercițiul 2. Descompuneți în factori expresia $3x^4y^2-4z^2$.

Rezolvare:

$3x^4y^2=(\sqrt{3}x^2y)^2$ și $4z^2=(2z)^2$

$3x^4y^2-4z^2=(\sqrt{3}x^2y)^2-(2z)^2$

$(\sqrt{3}x^2y)^2-(2z)^2=(\sqrt{3}x^2y+2z)(\sqrt{3}x^2y-2z)$

$3x^4y^2-4z^2=(\sqrt{3}x^2y+2z)(\sqrt{3}x^2y-2z)$.

Etape de rezolvare:

1. Observăm că cei doi termeni ai diferenței se pot scrie ca pătrate ale unor expresii.

2. Scriem expresia ca diferență a două pătrate.

3. Folosim *formula* de descompunere.

4. Scriem descompunerea expresiei.

Exercițiul 3. Descompuneți în factori: **a)** $16x^4y^2+40x^2y+25$; **b)** $4x^2-14x+12$; **c)** $25-16x^2$; **d)** x^4+4.

Rezolvare:

a) $16x^4y^2+40x^2y+25$
$=(4x^2y)^2+40x^2y+(5)^2$
$=(4x^2y)^2+2\cdot(4x^2y)\cdot 5+5^2=(4x^2y+5)^2$

b) $4x^2-14x+12$
$=(2x)^2-14x+\left(\sqrt{12}\right)^2$

Etape de rezolvare:

$16x^4y^2=(4x^2y)^2$, iar $25=5^2$
$40x^2y^2=2\cdot(4x^2y)\cdot 5$

$4x^2=(2x)^2$, $12=\left(\sqrt{12}\right)^2$, iar $-14x$ este al treilea termen și $-14x\neq-2(2x)\cdot\sqrt{12}$.

Concluzie: Expresia $4x^2 - 14x + 12$ nu se poate descompune în factori folosind formula pătratului unui binom. În lecția următoare vom cunoaște *alte metode de descompunere în factori* (vezi *Aplicația* 2 a).

c) $25 - 16x^2 = 5^2 - (4x)^2 = (5 - 4x)(5 + 4x)$, deci $25 - 16x^2 = (5 - 4x)(5 + 4x)$

d) $x^4 + 4$; $x^4 = (x^2)^2$ și $4 = 2^2$; $x^4 + 4 = (x^2)^2 + 2^2$. Nu putem aplica formula, pentru că expresia nu este diferența a două pătrate. Aceasta este o sumă de pătrate și nu se poate descompune prin această metodă (vezi *Aplicația* 2 b din lecția următoare).

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Descompuneți în factori expresiile algebrice:
a) $x^2 + 10x + 25$; **b)** $y^2 - 6y + 9$;
c) $x^2y^2 + 4xy + 4$; **d)** $100 - 20ab + a^2b^2$;
e) $16x^2 + 8x + 1$; **f)** $81y^2 - 18y + 1$;
g) $4x^2 - 28x + 49$; **h)** $9x^2 - 12xy + 4y^2$;
i) $5x^2 + 2\sqrt{5}x + 1$; **j)** $3y^2 - \sqrt{24}\,xy + 2x^2$.

2 Copiați pe caiete și completați termenul care lipsește pentru a obține pătratul unui binom:
a) $9a^2 - 6a + ...$; **b)** $25x^2 + 4 + ...$;
c) $9y^2 - 12y + ...$; **d)** $x^2 + 5 + ...$;
e) $3 - 2\sqrt{6}\,y + ...$; **f)** $1 - 6b + ...$.

3 Descompuneți în factori expresiile:
a) $(x - 2)^2 + 2(x - 2) + 1$;
b) $(m + 5)^2 - 4(m + 5) + 4$;
c) $(x + 3)^2 - 2(x + 3)(x - 1) + (x - 1)^2$;
d) $9x^4y^2z^2 + 24x^2yz + 16$;
e) $4(x - 2)^2 - 12(x - 2) + 9$.

4 Descompuneți în factori:
a) $x^2 - 64$; **b)** $121 - y^2$;
c) $4x^2 - 25$; **d)** $9x^4y^2 - 16$;
e) $4(2x - 1)^2 - 49$; **f)** $81x^6y^2 - 4$.

5 Descompuneți în factori:
a) $a^2b^2 - 9$; **b)** $x^2y^2 - 1{,}21$;
c) $x^2 - 2$; **d)** $5a^2 - 3$.

6 Utilizând descompunerea în factori, calculați:
a) $98^2 + 2 \cdot 98 \cdot 2 + 2^2$; **b)** $201^2 - 2 \cdot 201 + 1$;
c) $104^2 - 96^2$; **d)** $4^2 \cdot 19^2 - 24^2$.

7 Descompuneți în factori diferențele de pătrate:
a) $y^2 - 25$; **b)** $4x^2 - 1$;
c) $25 - 4y^2$; **d)** $81x^2 - 16y^2$;
e) $1{,}69x^2 - 1{,}44$; **f)** $1 - 2{,}25x^2y^2$.

8 Scrieți ca pătratul unei sume sau diferențe:
a) $a^4 + 8a^2 + 16$; **b)** $81 - 72b^2 + 16b^4$;
c) $2x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 1$; **d)** $y^2 + 2\sqrt{3}\,y + 3$.

9 Scrieți ca produs de numere reale folosind formulele de calcul prescurtat:
a) $99^2 - 1^2$; **b)** $996^2 - 4^2$;
c) $199^2 - 198^2$; **d)** $74^2 - 2 \cdot 74 \cdot 49 + 49^2$;
e) $999^2 + 2 \cdot 999 \cdot 1001 + 1001^2$.

10 Descompuneți în factori:
a) $x^2 - x + \frac{1}{4}$; **b)** $7x^2 - 2\sqrt{7}x + 1$;
c) $x^2 + \frac{1}{9} - 0{,}(6)x$; **d)** $9x^2 - \frac{1}{4}$;
e) $(x + 2)^2 - 1$; **f)** $x^2 + 10xy + 25y^2$;
g) $(\sqrt{3})^2 - x^2$; **h)** $3x^2 - 2$ **i)** $2x^2 - 5$.

11 Demonstrați că diferența pătratelor a două numere naturale consecutive este un număr natural impar.

L3. Alte metode de descompunere în factori

Am cunoscut, în lecțiile anterioare, tehnici de descompunere în factori a expresiior algebrice folosind factorul comun sau folosind formulele de calcul prescurtat. Am aflat apoi că, în anumite situații, este avantajos ca termenii expresiei să fie grupați, vizând folosirea factorului comun, de mai multe ori.
Vom *descoperi că de cele mai multe ori, pentru descompunerea în factori* a unei expresii algebrice *se împletesc tehnicile*, scriind convenabil termenii expresiei, prelucrând expresia, folosind *artificii de calcul*[1].

[1] *Artificiu de calcul* = procedeul prin care scriem termenii expresiei astfel încât să identificăm factorul comun, modul de grupare a termenilor sau formulele de calcul pe care dorim să le folosim

Rezolvăm și observăm

Exercițiul 1. **AI**

Scrieți $(x + 2)(x + 3)$ ca sumă algebrică.

Etapele rezolvării	*Rezolvare*
Start	$(x + 2)(x + 3)$
Dezvoltarea produsului	$= x^2 + 3x + 2x + 2 \cdot 3$
Reducerea termenilor	$= x^2 + 3x + 2x + 6$
asemenea	$= x^2 + 5x + 6$

Concluzie: $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$.

Observație. $x^2 + 5x + 6$ este *dezvoltarea expresiei algebrice* $(x + 2)(x + 3)$.

Exercițiul 2. **AI**

Transformați $x^2 + 5x + 6$ în produsul a două sume.

Etapele rezolvării	*Rezolvare*
Start	$x^2 + 5x + 6$
$5x = 3x + 2x$	$= x^2 + (3x + 2x) + 2 \cdot 3$
$6 = 2 \cdot 3$	$= x^2 + 3x + 2x + 2 \cdot 3$
Factor comun x	$= x(x + 3) + 2(x + 3)$
Factor comun 2	$= x(x + 3) + 2(x + 3)$
Factor comun $(x + 3)$	$= (x + 2)(x + 3)$

Concluzie: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

Observație. $(x + 2)(x + 3)$ este *descompunerea în factori a expresiei algebrice* $x^2 + 5x + 6$.

Exercițiul 3. **AI** Demonstrați că orice expresie algebrică de forma $x^2 + mx$ poate fi scrisă ca o diferență de pătrate.

Metodă în trei pași:

1. Scriem $mx = \dfrac{2mx}{2} = 2 \cdot x \cdot \dfrac{m}{2}$.
2. Identificăm termenul care lipsește pentru a obține pătratul unei sume.
   Scriem expresia, punând în evidență pătratul sumei.
3. Restrângem pătratul sumei și obținem o diferență de pătrate.

$$\underbrace{x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{m}{2} + \left(\frac{m}{2}\right)^2}_{\text{pătratul sumei}} - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$$x^2 + mx = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

Aplicația 1. Descompuneți în factori: $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Etapele rezolvării	*Rezolvare:*
	$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
Grupăm termenii, convenabil	$= (a^2 + 2ab + b^2) + (ac + bc) + (ac + bc + c^2)$
Aplicăm formule de calcul și dăm factor comun	$= (a + b)^2 + c(a + b) + c(a + b + c)$
Factor comun	$= (a + b)(a + b + c) + c(a + b + c)$
Factor comun	$= (a + b + c)(a + b + c) = (a + b + c)^2$
Regulă de calcul	

Concluzie. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$.

Aplicația 2. Descompuneți în factori: **a)** $4x^2 - 14x + 12$; **b)** $x^4 + 4$; **c)** $x^2 - \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{3}$.

Etapele rezolvării	*Rezolvare:*
	a) $4x^2 - 14x + 12$
Scriem expresia, folosind un *artificiu de calcul*	$= 4x^2 - 8x - 6x + 12$
Grupăm termenii	$= (4x^2 - 8x) - (6x - 12)$
Scoatem factor comun în fiecare grupă: $2x$ pentru prima grupă și 3 pentru grupa a doua	$= 2x(2x - 4) - 3(2x - 4)$
Scoatem factor comun $(2x - 4)$	$= (2x - 4)(2x - 3)$
Din prima paranteză se scoate factor comun 2	$= 2(x - 2)(2x - 3)$

b) $x^4 + 4$

Folosim un *artificiu de calcul* $= (x^2)^2 + 2^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2 - 4x^2$

Grupăm primii trei termeni $= [(x^2)^2 + 2^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2] - 4x^2$

Restrângem pătratul din paranteză $= (x^2 + 2)^2 - 4x^2$

Scriem expresia ca diferență de pătrate $= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$

Descompunem în factori diferența pătratelor $= [(x^2 + 2) + (2x)] \cdot [(x^2 + 2) - (2x)]$

Folosim regulile de calcul $= (x^2 + 2 + 2x) \cdot (x^2 + 2 - 2x)$

c) $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$

Se folosește *metoda în trei pași*, prin care expresia algebrică $x^2 - \frac{4}{3}x$ se scrie ca o diferență de pătrate:

$$x^2 - \frac{4}{3}x = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{2}{3} = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} =$$

înlocuim $x^2 - \frac{4}{3}x$ cu $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ și

$$= \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$$

calculăm $-\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = -\frac{4}{9} + \frac{1}{3} = -\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$$= \left(x - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = \left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)$$

descompunem în factori diferența de pătrate și efectuăm calculele din paranteze

Aplicația 3.

AI

a) Scrieți expresia $E_1 = x^2 + 10x + 26$ ca sumă de pătrate și calculați valoarea expresiei pentru $x = -5$.

b) Scrieți expresia $E_2 = x^2 - 20x + 104$ ca sumă de pătrate și calculați valoarea expresiei pentru $x = 10$.

c) Utilizând inegalitatea $a^2 \geq 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, demonstrați că $x^2 + 10x + 26 \geq 1$, pentru orice x real.

d) Utilizând inegalitatea $-a^2 \leq 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, demonstrați că $-x^2 + 20x - 104 \leq -4$, pentru orice x real.

a) $E_1 = x^2 + 10x + 26 = x^2 + 10x + 25 + 1$

$E_1 = (x + 5)^2 + 1^2$ și $E_1(-5) = 1$.

b) $E_2 = x^2 - 20x + 104 = x^2 - 20x + 100 + 4 =$

$E_2 = (x - 10)^2 + 2^2$ și $E_2(10) = 4$.

c) Din $(x + 5)^2 \geq 0$, rezultă $(x + 5)^2 + 1^2 \geq 1$ și $x^2 + 10x + 26 \geq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

d) $-x^2 + 20x - 104 = -(x^2 - 20x + 104) =$

$= -[(x - 10)^2 + 2^2] = -(x - 10)^2 - 2^2$.

Din $-(x - 10)^2 \leq 0$ rezultă $-(x - 10)^2 - 2^2 \leq -4$, deci $-x^2 + 20x - 104 \leq -4$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Observație. Se constată următoarele:

1. $E_1(-5) = 1$ și $E_1(x) \geq 1$, pentru orice x real. Vom spune că 1 este *valoarea minimă* a expresiei E_1.

2. $E_2(10) = -4$ și $E_2(x) \leq -4$, pentru orice x real. Vom spune că -4 este *valoarea maximă* a expresiei E_2.

Temă de portofoliu

a) Demonstrați că valoarea minimă a expresiei $x^2 - 4x + 7$ este 3.

b) Demonstrați că valoarea minimă a expresiei $x^2 + 6x + 10$ este 1.

Folosind afirmația „Dacă a și b sunt numere pozitive cu $E_1 \geq a$ și $E_2 \geq b$, atunci $E_1 \cdot E_2 \geq ab$", demonstrați că $(x^2 - 4x + 7)(x^2 + 6x + 10) \geq 3$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Descompuneți în factori:

a) $(x + y) \cdot a^2 - (x + y) \cdot b^2$;

b) $ax^2 + bx^2 - ay^2 - by^2$;

c) $49a^2 + 14a(2x + 1) + (2x + 1)^2$;

d) $(\sqrt{3} - x)^2 + 6(\sqrt{3} - x) + 9$.

2 Descompuneți în factori, grupând termenii convenabil.

a) $3ax^2 + 4ax^3 + 6a^2x + 8a^2x^2$;

b) $12a^2b^3 + 4a^2b + 9ab^2 + 3a$;

c) $2xy + 3x^2y - 4x^2y^2 - 6x^3y^2$;

d) $5x^2 + 2a^2x - 10ax - 4a^3$.

3 Descompuneți în factori:

a) $x^2 - 2x - 35$; **b)** $x^2 + 16x + 63$;

c) $x^2 - x - 2$; **d)** $y^4 + 64$;

e) $15x^2 + 7x - 2$; **f)** $3x^2 - 5x - 2$;

g) $5x^2 + 13x - 6$; **h)** $x^2 - 12x + 35$.

4 Descompuneți în factori:

a) $81x^4 - 16$;

b) $256x^4y^4 - 1$;

c) $x^2 + 6x + 9 - y^2$;

d) $(3x + 2)^2 - 2 \cdot (3x - 2)(3x + 2) - 12 - 18x$;

e) $(3x - 2)(2x + 1) - 3(2x + 1)^2 + 2x(2x + 1)$;

f) $4(x - 2)^2 - (x + 1)^2$;

g) $16(x + 3)^2 - 9(x + 2)^2$;

5 Fie expresiile $E = x^2 - 9$ și $F = (x + 3)(3x - 4) - (x + 3)(2x - 1)$.

a) Calculați valoarea numerică a expresiei E pentru $x = 0$, apoi pentru $x = -1$.

b) Calculați valoarea expresiei F pentru $x = 0$, apoi pentru $x = -1$.

c) Descompuneți în factori cele două expresii și verificați dacă $E = F$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

6 Descompuneți în factori expresia $E = 9x^2 - 4 + (3x + 2)(x - 2)$.

7 Utilizând identitatea $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b) \cdot x + a \cdot b$, descompuneți în factori:

a) $x^2 + 5x + 6$; **b)** $x^2 - 9x + 20$;

c) $x^2 + 6x - 7$; **d)** $x^2 - 12x + 20$;

e) $x^2 - 8x + 15$; **f)** $x^2 - 3x - 28$.

8 Se consideră un triunghi cu lungimile laturilor a, b și c. Demonstrați că:

a) Dacă $a^4 + b^4 - c^4 = 2a^2b^2$, atunci triunghiul este dreptunghic.

b) Dacă $a^2b - b^2a + b^2c - c^2b = a^2c - c^2a$, atunci triunghiul este isoscel.

c) $ab + bc + ac = a^2 + b^2 + c^2$, atunci triunghiul este echilateral.

9 Arătați că numărul $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + (x^2 + 2x)(x^2 - 1)$ este divizibil cu 24, oricare ar fi x număr întreg.

10 Demonstrați că oricare ar fi a, număr real, au loc relațiile:

a) $a^2 + 4a + 4 \geq 0$ **b)** $a^2 - 6a \geq -9$.

11 Determinați valoarea minimă a fiecăreia dintre expresiile:

a) $x^2 + 2x + 2,\ x \in \mathbb{R}$ **b)** $9x^2 - 6x - 3,\ x \in \mathbb{R}$

c) $(3x - 2)(3x + 4),\ x \in \mathbb{R}$.

12 Determinați valoarea maximă a fiecăreia dintre expresiile:

a) $-x^2,\ x \in \mathbb{R}$ **b)** $-7 - 6x - x^2,\ x \in \mathbb{R}$

c) $(2x - 1)(3 - 2x),\ x \in \mathbb{R}$.

13 **a)** Demonstrați că $1 + x + x^2 \geq \frac{3}{4}$, oricare ar fi x, număr real.

b) Știind că $x \in \mathbb{R}$, determinați valoarea minimă a expresiei $(1 + x + x^2)(1 - x + x^2)$.

L4. Aplicații practice

În multe situații practice, suntem nevoiți să efectuăm calcule rapide, uneori cu numere destul de mari. Formulele de calcul prescurtat ne ajută să economisim timp.

Aplicația 1. Calculul ariei unei suprafețe dreptunghiulare sau pătratice, cu dimensiuni care permit folosirea formulelor de calcul.

1.1. Calculați aria suprafeței unui teren în formă dreptunghiulară, cu dimensiunile:
a) $a = 1005$ m și $b = 995$ m;
b) $a = 693$ m și $b = 707$ m.

Rezolvare. Dacă suprafața este dreptunghiulară, cu dimensiunile a și b, atunci aria suprafeței este $\mathcal{A} = ab$.
a) $\mathcal{A} = ab = 1005 \cdot 995 = (1000 + 5) \cdot (1000 - 5) =$
$= 1000^2 - 25 = 1\,000\,000 - 25 = 999\,975$ (m^2).
b) $\mathcal{A} = ab = 693 \cdot 707 = (700 - 7) \cdot (700 + 7) =$
$= 700^2 - 49 = 490\,000 - 49 = 489\,951$ (m^2).

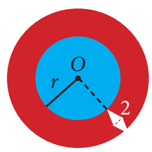
1.2. Calculați aria suprafeței unui teren în formă pătratică, știind că:
a) latura pătratului este $a = 51$ m;
b) latura pătratului este $a = 48$ m.

Rezolvare. Dacă suprafața este pătratică și are latura a, atunci aria suprafeței este $\mathcal{A} = a^2$.
a) $\mathcal{A} = a^2 = 51^2 = (50 + 1)^2 = 2500 + 100 + 1 = 2601$ (m^2).
b) $\mathcal{A} = a^2 = 48^2 = (50 - 2)^2 = 2500 - 200 + 4 = 2304$ (m^2).

Observație. Cu puțin antrenament, astfel de calcule se pot face în memorie, foarte repede.

Aplicația 2. Calculul unor arii folosind formule de calcul prescurtat.

Imaginea de mai jos reprezintă o jucărie veche din lemn. Discurile suprapuse desenate reprezintă suprafața unei roți a jucăriei. Cele două discuri au același centru, iar razele lor sunt exprimate în centimetri.
Discul albastru are raza r, iar diferența dintre razele celor două discuri este de 2 cm.



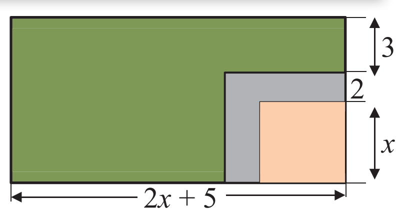
Aria suprafeței colorate cu roșu se poate exprima prin expresia algebrică $\mathcal{A}(\pi, r)$.
a) Scrieți expresia $\mathcal{A}(\pi, r)$ ca sumă algebrică.
b) Scrieți expresia $\mathcal{A}(\pi, r)$ ca o diferență de două pătrate.
c) Folosind subpunctele **a)** și **b)**, descompuneți expresia $\mathcal{A}(\pi, r)$, prin două metode.
d) Pentru a colora o suprafață de 1 cm^2, este necesar un gram de vopsea. Știind că $r = 5$ cm, verificați dacă este suficientă o cantitate de vopsea de 75,4 g, pentru colorarea suprafeței roșii. Justificați răspunsul.

Rezolvare.
a) $\mathcal{A}(\pi, r) = \pi(r + 2)^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + 4r + 4) - \pi r^2 =$
$= 4\pi r + 4\pi$, deci $\mathcal{A}(\pi, r) = 4\pi r + 4\pi$.
b) $\mathcal{A}(\pi, r) = \left[\sqrt{\pi}(r+2)\right]^2 - \left(\sqrt{\pi}r\right)^2$.
c) **I.** Folosim subpunctul **a)** și metoda factorului comun: $\mathcal{A}(\pi, r) = 4\pi\,(r + 1)$.
II. Descompunem diferența pătratelor de la **b)**:
$\mathcal{A}(\pi, r) = \left[\sqrt{\pi}(r+2) + \sqrt{\pi}r\right]\left[\sqrt{\pi}(r+2) - \sqrt{\pi}r\right]$,
deci $\mathcal{A}(\pi, r) = \left(2\sqrt{\pi}r + 2\sqrt{\pi}\right) \cdot 2\sqrt{\pi}$.
Scoatem factor comun $2\sqrt{\pi}$ și rezultă:
$\mathcal{A}(\pi, r) = 4\pi(r + 1)$.
d) $\mathcal{A}(\pi, r) = 4\pi(r + 1)$, $r = 5$ cm. Suprafața roșie are aria $\mathcal{A} = 24\pi$ cm^2. Pentru colorarea ei, este necesară cantitatea de exact 24π grame de vopsea.
Se știe că $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$
$3{,}1415 < \pi < 3{,}1416 \mid \cdot 24$
$24 \cdot 3{,}1415 < 24 \cdot \pi < 3{,}1416 \cdot 24$
$75{,}3960 < 24 \cdot \pi < 75{,}3984 < 75{,}4$
$24 \cdot \pi < 75{,}4$

Concluzie: pentru colorarea suprafeței roșii este suficientă cantitatea 75,4 grame de vopsea.

Aplicația 3. Exprimarea unor arii ca expresii algebrice, folosind formule de calcul prescurtat.

Pe un teren având suprafața dreptunghiulară urmează să fie construită o casă. Schița alăturată conține următoarele informații:
– casa se construiește pe o suprafață pătratică, de latură x;
– suprafața de culoare gri reprezintă o alee cu lățimea de 2m;
– suprafața colorată cu verde reprezintă grădina casei;
– toate lungimile sunt exprimate în metri.



Se notează cu $\mathcal{A}$ aria totală a terenului, cu $\mathcal{A}_1$ aria aleii și cu $\mathcal{A}_2$ aria grădinii.

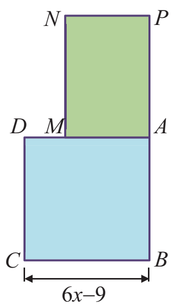
a) Calculați $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ în funcție de x și scrieți expresiile $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ sub forma unor sume algebrice restrânse.
b) Calculați $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ în cazul $x = 10$ m.
c) Arătați că expresia $\mathcal{A}_2$ este o diferență de două pătrate.

Rezolvare.
a) $\mathcal{A} = (2x + 5)\cdot(x + 2 + 3) = 2x^2 + 15x + 25$. Se observă că suprafața terenului pe care este amplasată construcția, împreună cu aleea formează o suprafață pătratică a cărei laturi este $x + 2$.
Rezultă $x^2 + \mathcal{A}_1 = (x + 2)^2$, de unde $\mathcal{A}_1 = (x + 2)^2 - x^2 = 4x + 4$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A} - (x+2)^2 = (2x + 5)(x + 5) - (x+2)^2 =$
$= x^2 + 11x + 21$.
b) Înlocuind x cu 10 în sumele algebrice obținute anterior, rezultă: $\mathcal{A} = 375$ m²; $\mathcal{A}_1 = 44$ m²; $\mathcal{A}_2 = 331$ m².
c) $\mathcal{A}_2 = x^2 + 11x + 21$
Se scrie $x^2 + 11x$ ca o diferență de două pătrate $\longleftrightarrow$ $\mathcal{A}_2 = \left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2 + 21$

Rezultă $\longleftrightarrow$ $\mathcal{A}_2 = \left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

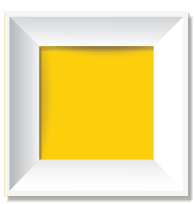
1 Un teren se descompune în două suprafețe: suprafața pătratică $ABCD$ și cea dreptunghiulară $AMNP$, unde AM este două treimi din AB și $AP = AB$.



Notăm cu $\mathcal{A}_1$ aria suprafeței pătratice, cu $\mathcal{A}_2$ aria suprafeței dreptunghiulare și cu $\mathcal{A}$ aria totală a terenului.
a) Demonstrați că $x \in [1{,}5; \infty)$.
b) Calculați $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ și $\mathcal{A}$. Scrieți fiecare rezultat ca o sumă algebrică redusă.
c) Verificați egalitatea $\mathcal{A} = 15\,(2x - 3)^2$.
d) Calculați aria totală a terenului, știind că $x = 15$ metri.

2 Fie n un număr natural, $n \geq 2$.
a) Dovediți că: $n^2 - (n - 1)^2 = 2n - 1$.
b) Folosind punctul precedent, calculați diferența dintre pătratele numerelor 272 și 271.

3 Marginile exterioare ale ramei tabloului din imagine formează un pătrat cu latura de 143 cm, iar marginile interioare formează un pătrat cu latura de 133 cm. Folosind o formulă de calcul, convenabil aleasă, calculați rapid aria ramei.

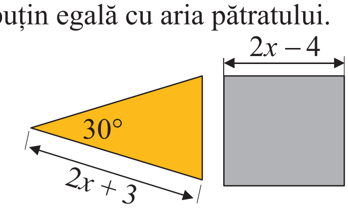


4 Triunghiul dreptunghic ABC are catetele $AB = x$ cm și $AC = 3$ cm, iar triunghiul dreptunghic MNP are catetele MN și MP. Lungimea lui MN este egală cu dublul lungimii lui AB, iar lungimea lui NP este cu x cm mai mică decât lungimea catetei AC.
a) Calculați pătratul lungimii catetei MP.
b) Calculați pătratul ariei triunghiului MNP.
c) Demonstrați că $x \in (0, 1)$.

5 Folosind o formulă de calcul prescurtat, aleasă convenabil, calculați:
a) $397 \cdot 403$; **b)** 53^2; **c)** 54^2; **d)** 56^2; **e)** 57^2.

6 **a)** Fie expresia algebrică $n^2 - (n + 1)(n - 1)$. Efectuați calcule și reduceți termenii asemenea.
b) Fără a folosi calculatorul și fără a efectua niciun calcul, precizați valoarea expresiei numerice $4{,}13^2 - 5{,}13 \cdot 3{,}13$.

7 În desenul de mai jos sunt reprezentate un triunghi isoscel și un pătrat. Lungimile laturilor sunt exprimate în aceeași unitate de măsură. Aflați mulțimea numerelor reale x pentru care un sfert din aria triunghiului este cel puțin egală cu aria pătratului.



4 Fracții algebrice. Operații cu fracții algebrice

L1. Fracții algebrice. Mulțimea de definiție a unei fracții algebrice. Valoarea numerică a unei expresii algebrice

Rezolvăm și observăm

Problema 1.
Tudor merge la librărie pentru a-și cumpăra caiete. El știe că un caiet costă y lei, dar la librărie află că la fiecare caiet cumpărat, se va face o reducere de 0,5 lei. Tudor are x lei și constată că poate cumpăra caiete de toți acești bani.

a) Exprimați, printr-o expresie algebrică, numărul caietelor pe care le poate cumpăra Tudor, folosind toți banii.

b) Mihai, prietenul lui Tudor îi spune acestuia că vânzătorul trebuie să-i dea $\dfrac{2x}{2y-1}$ caiete. Stabiliți dacă Mihai are dreptate.

c) Știind că $x = 10{,}50$ și $y = 2$, calculați numărul caietelor pe care le cumpără Tudor, folosind toți banii.

Rezolvare

a) Notăm cu n numărul caietelor pe care le poate cumpăra Tudor, cu p prețul unui caiet și cu c costul total.
Înainte de reducere, un caiet costa y lei, iar după reducere costă $(y - 0{,}5)$ lei, deci $p = y - 0{,}5$.
Suma de bani pe care o are Tudor este x lei, deci costul total este $c = x$. Atunci, $n = \dfrac{c}{p}$, adică *numărul caietelor* pe care le poate cumpăra este $n = \dfrac{x}{y-0{,}5}$.

b) Amplificăm fracția $\dfrac{x}{y-0{,}5}$ cu 2 și

$$^{2)}\frac{x}{y-0{,}5} = \frac{2\cdot x}{2\cdot(y-0{,}5)} = \frac{2x}{2y-1}.$$ Mihai a avut dreptate.

c) Înlocuind x și y în expresia algebrică prin care este exprimat *numărul caietelor*, rezultă

$$n = \frac{10{,}5}{2-0{,}5} = {}^{2)}\frac{10{,}5}{1{,}5} = \frac{10{,}5\cdot 2}{1{,}5\cdot 2} = \frac{21}{3} = 7 \text{ (caiete)}.$$

Problema 2.
Lungimea laturii unui pătrat este a, iar lungimea bazei unui dreptunghi este b, acestea fiind exprimate cu aceeași unitate de măsură.
Dacă se micșorează baza dreptunghiului cu două unități, se obține un nou dreptunghi, care are aria egală cu aria pătratului.

a) Calculați înălțimea și perimetrul noului dreptunghi.

b) Rezolvați problema în cazul $a = 2$ cm și $b = 4$ cm.

Rezolvare

a) Notăm cu A aria noului dreptunghi și cu h înălțimea acestuia, aria pătratului fiind a^2.
Deoarece $A = (b - 2)\cdot h$, rezultă $a^2 = (b - 2)\cdot h$, deci $h = \dfrac{a^2}{b-2}$.
Noul dreptunghi are perimetrul

$$P = 2\cdot\left[(b-2)+\frac{a^2}{b-2}\right] = 2\cdot\left[\frac{(b-2)^2}{b-2}+\frac{a^2}{b-2}\right]$$

$$= 2\cdot\frac{b^2-4b+4+a^2}{b-2} = \frac{2a^2+2b^2-8b+8}{b-2}.$$

b) $h = \dfrac{2^2}{4-2} = 2\,(\text{cm})$; $P = \dfrac{2\cdot 2^2+2\cdot 4^2-8\cdot 4+8}{4-2} = 8\,(\text{cm})$.

Observații:

1. Expresiile algebrice $\dfrac{x}{y-0{,}5}$; $\dfrac{2x}{2y-1}$; $\dfrac{a^2}{b-2}$; $\dfrac{2a^2-8b+2b^2+8}{b-2}$, obținute în problemele anterioare, se numesc *rapoarte de numere reale reprezentate prin litere* sau *fracții algebrice*.

2. Considerăm fracția algebrică $\frac{2x}{2y-1}$. Pentru a evidenția faptul că aceasta depinde de numerele reale x și y, numite *nedeterminate* sau *variabile*, o notăm cu $F(x, y)$, citim „F de x și y” *și scriem* $F(x,y)=\frac{2x}{2y-1}$.

2.1. Dacă în fracția algebrică $\frac{2x}{2y-1}$ înlocuim nedeterminata x cu 10,5 și nedeterminata y cu 2, obținem $\frac{2\cdot 10{,}5}{2\cdot 2-1}=\frac{21}{3}=7$. Vom scrie $F(10, 5; 2) = 7$ și vom spune că fracția algebrică $F(x, y)$ *are valoarea numerică* 7 pentru $x = 10{,}5$ și $y = 2$.

2.2. Dacă în fracția algebrică $\frac{2x}{2y-1}$ înlocuim nedeterminata y cu 0,5, numitorul fracției devine 0. Deoarece împărțirea la 0 nu are sens, spunem că fracția algebrică *nu are valoarea definită* sau *nu este definită* sau că *nu are sens* pentru $y = 2$, indiferent de valoarea pe care variabila x ar lua-o.

3. Deoarece fracțiile algebrice sunt rapoarte de numere reale, cu acestea se pot efectua toate operațiile învățate la numere reale.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

1 Raportul a două expresii algebrice, cu împărțitorul diferit de zero, este un raport algebric sau o fracție *algebrică*.

$\frac{x}{y}$, $\frac{x+1}{xy}$, $\frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$, $-\frac{a^3+b^2-4}{abc}$ sunt fracții algebrice.

$\frac{x+y}{0}$; $\frac{xyz+3(x+y)+z}{0}$ nu sunt fracții algebrice.

2 O fracție algebrică *este definită* (*are sens*) pentru toate numerele reale pentru care numitorul fracției este diferit de zero.

Fracția algebrică $\frac{x+1}{x^2+(y-1)^2+2z}$ *este definită* pentru $x, y, z \in \mathbb{R}$ și $x^2 + (y-1)^2 + 2z \neq 0$.

3 Numărul real obținut atribuind variabilei (sau variabilelor) unei expresii algebrice valori numerice care nu anulează numitorul se numește *valoarea numerică* a expresiei pentru acel set de valori.

Pentru $x = -2$ valoarea numerică a fracției $F(x)=\frac{3x+1}{x^2+4}$

este $F(-2)=\frac{3\cdot(-2)+1}{(-2)^2+4}=\frac{-5}{8}$.

Valoarea numerică a expresiei $E(x, y) = 2x - 5y$, pentru $x = 1$ și $y = 2$ este $E(1, 2) = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 2 = 8$.

4 Mulțimea tuturor numerelor reale atribuite variabilelor pentru care o fracție algebrică are sens se numește *mulțimea de definiție* a fracției sau *domeniul de definiție* al acesteia.

a) Pentru fracția algebrică $\frac{E(x)}{F(x)}$, domeniul de definiție este $\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \neq 0\}$.

b) Pentru fracția algebrică $\frac{E(x,y)}{F(x,y)}$, domeniul de definiție este $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid F(x, y) \neq 0\}$

1) Mulțimea de definiție a fracției $\frac{3x+1}{3x^2-12}$ este $\{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 12 \neq 0\}$.

2) Mulțimea de definiție a fracției $\frac{xy}{x^2+y^2}$ este $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$.

3) Mulțimea de definiție a fracției $\frac{x}{y+3}$ este $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y + 3 \neq 0\}$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

1 Se consideră fracția algebrică $F(x, y) = \dfrac{9x^2 - 4y^2}{3x + 2y}$.

a) Calculați valoarea numerică a fracției algebrice pentru $x = 2$ și $y = 1{,}5$.

Soluție. $F(2;\ 1{,}5) = \dfrac{9 \cdot 2^2 - 4 \cdot 1{,}5^2}{3 \cdot 2 + 2 \cdot 1{,}5} = \dfrac{9 \cdot 4 - 4 \cdot 2{,}25}{6 + 3} = \dfrac{36 - 9}{6 + 3} = \dfrac{27}{9} = 3$, deci $F(2;\ 1{,}5) = 3$.

b) Decideți dacă $F(x, y)$ este definită pentru $x = -2$ și $y = 3$.
Soluție. Calculăm $3x + 2y$ pentru $x = -2$ și $y = 3$ și obținem $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 0$.
Deoarece numitorul fracției se anulează, fracția algebrică dată *nu este definită* pentru $x = -2$ și $y = 3$.

2 Determinați mulțimea de definiție a fracției algebrice $F(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{(2x - 5)^2 - 4x^2}$.

Soluție. $((2x - 5)^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow -20x + 25 = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}25$.

Fracția algebrică nu are sens pentru $x = 1{,}25$, deci mulțimea de definiție este: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1{,}25\} = \mathbb{R} - \{1{,}25\}$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Copiați pe caiete tabelul și completați domeniul de definiție (și justificarea) pentru fiecare din rapoartele scrise în prima linie, folosind modelul dat.

Raportul	$\dfrac{6}{6x}$	$\dfrac{x}{x-1}$	$\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$	$\dfrac{x}{x^2-1}$	$\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$	$\dfrac{6x-1}{x^2-36}$
Mulțimea de definiție		$\mathbb{R} - \{1\}$				
Justificare		$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$				

2 Determinați, pentru fiecare raport, valorile lui x pentru care acesta este definit:

a) $\dfrac{x+5}{x}$ **b)** $\dfrac{x-3}{-3x}$ **c)** $\dfrac{7x^4}{x^2}$

d) $\dfrac{2x-7}{x+1}$ **e)** $\dfrac{2-x}{-x-2}$ **f)** $\dfrac{101}{x^2+1}$

g) $\dfrac{x^2+x}{3x+8}$ **h)** $\dfrac{x-12}{(x+1)(x-2)}$

i) $\dfrac{x+4}{x^2-4x+4}$ **j)** $\dfrac{5x-7}{x^2-25}$

3 Știind că expresia $\dfrac{5+x}{x^2+ax-16}$ este definită pentru $x \in \mathbb{R} - \{-4;\ 4\}$, aflați numărul real a.

4 Determinați valorile numerice ale raportului $\dfrac{5}{x}$ pentru $x = -1$ și $x = \sqrt{5}$.

5 Copiați pe caiete tabelul și completați căsuțele libere cu mulțimea valorilor pentru care rapoartele nu au sens, folosind modelul dat.

$\dfrac{3+x}{x-2}$	$\dfrac{x}{x+3}$	$\dfrac{x+6}{2x-10}$	$\dfrac{4x+5}{3x^2-48}$
$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ Mulțimea valorilor lui x pentru care expresia *nu are sens* este $\{2\}$.			

6 Aflați valorile numerice ale expresiilor pentru valorile specificate:

a) $\dfrac{4}{x+2}$ pentru $x \in \{0{,}2\}$

b) $\dfrac{x+1}{x^2+1}$ pentru $x \in \{-1, \sqrt{2}, \sqrt{3} - 1\}$.

7 Se consideră $F(x)=\dfrac{x^3-x^2+x}{x^2+x+1}$. Calculați valoarea numerică a fracției pentru:

a) $x=-1$; **b)** $x=0$; **c)** $x=\dfrac{1}{2}$

8 Se consideră expresiile algebrice:

1) $\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-2x+1}$; **2)** $\dfrac{x^2+x-2}{x(x+2)-3}$;

3) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$; **4)** $\dfrac{x^2-9}{x^2-6x+9}$.

a) Descompuneți în factori numitorii fracțiilor.

b) Pentru fiecare expresie, calculați numerele reale x pentru care numitorul fracției este 0.

c) Pentru fiecare fracție, determinați numerele reale x pentru care aceasta nu are sens.

d) Precizați mulțimea de definiție a fiecărei fracții.

9 Determinați mulțimea de definiție pentru fracțiile:

a) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2-4x+6y+13}$;

b) $\dfrac{x+y}{xy+3x-2y-6}$

L2. Amplificarea și simplificarea unui raport de numere reale reprezentate prin litere

Ne amintim!

A amplifica o fracție cu numărul real nenul m înseamnă a înmulți și numărătorul și numitorul fracției date cu numărul m.

A simplifica o fracție cu numărul real nenul p înseamnă a împărți și numărătorul și numitorul fracției date cu numărul p.

Prin amplificarea și prin simplificarea unei fracții se obțin *fracții echivalente* cu cea inițială.

Dacă a, $c \in \mathbb{R}$, iar b, $d \in \mathbb{R}^*$, atunci:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$$

1) Amplificând fracția $\dfrac{6}{8}$ cu 3, obținem fracția echivalentă $\dfrac{18}{24}$ și scriem ${}^{3)}\dfrac{6}{8}=\dfrac{18}{24}$.

2) Simplificând fracția $\dfrac{6}{8}$ prin 2, rezultă fracția echivalentă $\dfrac{3}{4}$ și scriem $\dfrac{6^{(2}}{8}=\dfrac{3}{4}$.

3) ${}^{m)}\dfrac{a}{b}=\dfrac{m\cdot a}{m\cdot b}$ | $\dfrac{a^{(p}}{b}=\dfrac{a:p}{b:p}$

4) $\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow 6\cdot 4=8\cdot 3$

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

În mod asemănător, pe mulțimea fracțiilor algebrice vom defini relația de *egalitate*, apoi *amplificarea* și *simplificarea* fracțiilor algebrice. Vom folosi rezultatele obținute pentru a efectua operații cu fracții algebrice.

Două fracții algebrice, $\dfrac{E}{F}$ și $\dfrac{G}{H}$, sunt egale dacă și numai dacă $E\cdot H=F\cdot G$.

$$\frac{E}{F}=\frac{G}{H}\Leftrightarrow E\cdot H=F\cdot G$$

Exemplu: Demonstrați că $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{x}{x-1}$.

Soluție. $(x^2+x)(x-1)=x^3-x^2+x^2-x=x^3-x$ și
$(x^2-1)x=x^3-x$.

Rezultă $(x^2+x)(x-1)=(x^2-1)x$, deci $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{x}{x-1}$.

Observație. Egalitatea a două fracții algebrice presupune egalitatea valorilor numerice pe domeniul lor comun de definiție. În exemplul de mai sus, intersecția mulțimilor de definiție este $\mathbb{R}-\{-1; 1\}$.

2 Amplificarea unei fracții algebrice $\frac{E}{F}$ cu o expresie algebrică $G \neq 0$:

$$^{G)}\frac{E}{F} = \frac{E \cdot G}{F \cdot G}$$

Exemplu: Amplificați fracția algebrică $\frac{x}{x-1}$ cu expresia algebrică $x + 1$, $x + 1 \neq 0$.

Soluție. $^{x+1)}\frac{x}{x-1} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x}{x^2-1}$

Observație. Egalitatea a două fracții algebrice presupune egalitatea valorilor numerice pe domeniul lor comun de definiție. În exemplul de mai sus, intersecția mulțimilor de definiție este $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$.

3 Simplificarea unei fracții algebrice $\frac{E}{F}$ cu o expresie algebrică $G \neq 0$:

$$\frac{E}{F}^{(G} = \frac{E:G}{F:G}$$

Exemplu: Simplificați fracția algebrică $\frac{x^2+x}{x^2-1}$ cu expresia algebrică $x + 1$, cu $x + 1 \neq 0$.

Soluție. $\frac{x^2+x}{x^2-1} = \frac{x \cdot \cancel{(x+1)}}{(x-1) \cdot \cancel{(x+1)}}^{(x+1} = \frac{x}{x-1}$

Observație. Simplificarea unei fracții algebrice impune descompunerea numărătorului și numitorului în factori.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Se consideră fracțiile algebrice $F_1(x) = \frac{x-1}{x+1}$ și $F_2(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$.

a) Determinați mulțimile de definiție ale fracțiilor $F_1(x)$ *și* $F_2(x)$.

Etapele rezolvării:	*Rezolvare:*
Determinăm mulțimea de definiție a fracției $F_1(x)$.	$x + 1 = 0$ rezultă $x = -1$. Mulțimea de definiție a fracției $F_1(x)$ este $\mathbb{R} - \{-1\}$.
Determinăm mulțimea de definiție a fracției $F_2(x)$.	$x^2 - 1 = 0$ rezultă $x = -1$ sau $x = 1$. Mulțimea de definiție a fracției $F_2(x)$ este $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

b) Demonstrați că $F_1(x) = F_2(x)$.
Problema egalității fracțiilor algebrice $F_1(x)$ și $F_2(x)$ are sens oricare ar fi $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Etapele rezolvării:	*Rezolvare:*
Start	$F_1(x) = F_2(x) \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;
Calculăm: $(x-1)(x^2-1)$ și $(x+1)(x^2-2x+1)$	$(x-1)(x^2-1) = x^3 - x - x^2 + 1 = x^3 - x^2 - x + 1$; $(x+1)(x^2-2x+1) = x^3 - 2x^2 + x + x^2 - 2x + 1 = x^3 - x^2 - x + 1$.
Finalizăm:	Deoarece $(x-1)(x^2-1) = (x+1)(x^2-2x+1)$, rezultă $F_1(x) = F_2(x)$

c) Amplificând fracția $F_1(x)$ cu expresia algebrică $(x - 1)$, demonstrați că $F_1(x) = F_2(x)$.

Soluție. $F_1(x) = {}^{x-1)}\frac{x-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = F_2(x)$

d) Simplificând fracția $F_2(x)$, demonstrați că $F_1(x) = F_2(x)$.

Etapele rezolvării:	*Rezolvare:*
Descompunem numărătorul și numitorul fracției $F_2(x)$	$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = (x - 1)(x - 1)$; $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$
Simplificăm fracția $F_2(x)$	$F_2(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x-1)}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \dfrac{x-1}{x+1} = F_1(x)$
Finalizăm	Prin simplificarea fracției $F_2(x)$ cu expresia algebrică $(x - 1)$ rezultă $F_1(x) = F_2(x)$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Amplificați:

a) $\dfrac{x^2}{x-1}$ cu $2x$;

b) $\dfrac{2x-3}{x+2}$ cu $x - 1$.

2 Amplificați și efectuați calculele:

a) cu 4 raportul $\dfrac{x}{2x+1}$;

b) cu $x + 1$, raportul $\dfrac{x-1}{x+1}$;

c) cu 5, raportul $\dfrac{x}{2x+1}$;

d) cu $x - 1$, raportul $\dfrac{x-1}{x+1}$.

3 Amplificați cu $x + 3$ următoarele fracții algebrice:

a) $\dfrac{7}{x^2}$; **b)** $\dfrac{x}{x+1}$;

c) $\dfrac{1-x}{x^2-3x}$; **d)** $\dfrac{x-3}{x^2-3x+9}$.

4 Aduceți la același numitor fracțiile:

a) $\dfrac{1}{x}, \dfrac{3}{x^2}$; **b)** $\dfrac{3}{2y}, \dfrac{-4}{3y}$;

c) $\dfrac{1}{9x^2}, \dfrac{5}{12x}, \dfrac{1}{18x}$; **d)** $\dfrac{a}{8x^2y}, \dfrac{5b}{6xy^3}, \dfrac{c}{3x^3}$.

5 Simplificați următoarele rapoarte:

a) $\dfrac{2x^2}{x^3}$; **b)** $\dfrac{5x^2y}{xy^3}$;

c) $\dfrac{-3ab^2c^3}{15a^3b^2c}$; **d)** $\dfrac{x-1}{1-x}$.

6 **a)** Descompuneți în factori expresiile $x^2 + x$, $x^2 - x$ și $x^3 - x$.

b) Simplificați rapoartele $\dfrac{x^2+x}{x^2-x}, \dfrac{x^2-x}{x^3-x}, \dfrac{x^3-x}{x^2+x}$.

7 Simplificați rapoartele:

a) $\dfrac{24}{8x-16}$; **b)** $\dfrac{2x^2-6x}{4x-12}$;

c) $\dfrac{y^2-10y+25}{y^2-25}$;

d) $\dfrac{a^2-4}{a^2-4a+4}$; **e)** $\dfrac{(2b-3)^2-b^2}{3b^2-9b}$.

8 Demonstrați că $F_1(x)$ și $F_2(x)$ sunt egale pe domeniul lor comun de definiție, pentru fiecare din cazurile:

a) $F_1(x) = \dfrac{7x}{6}$ și $F_2(x) = \dfrac{14x^2-7x}{12x-6}$;

b) $F_1(x) = \dfrac{6x^2+x-1}{4x^2+8x+3}$ și $F_2(x) = \dfrac{3x-1}{2x+3}$;

c) $F_1(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x-6}$ și $F_2(x) = \dfrac{x-3}{x+3}$;

d) $F_1(x) = \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^3-7x+6}$ și $F_2(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2x-3}$.

L3. Operații cu fracții algebrice

Fracțiile algebrice sunt rapoarte de numere reale, reprezentate prin litere. Operațiile cu fracții algebrice se efectuează respectând regulile de calcul cu numere reale.

Rezolvăm și observăm

1 **a)** Descompuneți în factori primi numerele naturale 132 și 198, apoi determinați cel mai mic multiplu comun al lor.

b) Aduceți fracțiile $\frac{1}{132}$ și $\frac{5}{198}$ la același numitor.

Rezolvare.

a) $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$

$198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$

Cel mai mic multiplu comun este $2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 = 396$.

(produsul factorilor primi comuni și necomuni, luați o singură dată, la puterea cea mai mare)

b) $^{3)}\frac{1}{132} = \frac{3}{396}$ și $^{2)}\frac{5}{198} = \frac{10}{396}$.

Concluzie.

Descompunerea în factori primi a numitorilor unor fracții ordinare permite aducerea fracțiilor ordinare la același numitor.

2 **a)** Descompuneți în factori expresiile algebrice $x^4 - x^2$ și $x^4 + x^3 - x^2 - x$.

b) Aduceți fracțiile $\frac{1}{x^4 - x^2}$ și $\frac{5}{x^4 + x^3 - x^2 - x}$ la același numitor.

a) $x^4 - x^2 = x^2(x + 1)(x - 1)$

$x^4 + x^3 - x^2 - x = (x^4 - x^2) + (x^3 - x) = x^2(x^2 - 1) + x(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^2 + x) = x(x + 1)^2(x - 1)$

b) *Numitorul comun* este $x^2(x + 1)^2(x - 1)$ (produsul factorilor comuni și necomuni, luați o singură dată, la puterea cea mai mare)

$$\frac{1}{x^4 - x^2} = {}^{x+1)}\frac{1}{x^2(x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{x^2(x+1)^2(x-1)}$$

$$\frac{5}{x^4 + x^3 - x^2 - x - 1} = {}^{x)}\frac{5}{x(x+1)^2(x-1)} = \frac{5x}{x^2(x+1)^2(x-1)}.$$

Descompunerea în factori a numitorilor unei fracții algebrice permite aducerea fracțiilor algebrice la același numitor.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

1 Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice care au același numitor:

Dacă A, B, P sunt expresii algebrice cu $P \neq 0$, atunci:

$$\frac{A}{P} + \frac{B}{P} = \frac{A+B}{P} \text{ și } \frac{A}{P} - \frac{B}{P} = \frac{A-B}{P}.$$

Calculați: $\frac{2x+1}{x-1} + \frac{x}{x-1} - \frac{5-x}{x-1}$

Rezolvare:

$$\frac{2x+1}{x-1} + \frac{x}{x-1} - \frac{5-x}{x-1} = \frac{(2x+1)+x-(5-x)}{x-1} =$$

$$= \frac{2x+1+x-5+x}{x-1} = \frac{4x-4}{x-1} = \frac{4\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 4.$$

2 Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice care nu au același numitor:

Pas 1. se descompun numitorii:

Pas 2. se află numitorul comun:

Pas 3. se aduc fracțiile la același numitor, prin amplificare, apoi se efectuează calculele

Dacă A, B, P, Q sunt expresii algebrice cu $P \neq 0$, $Q \neq 0$, atunci:

$$\frac{A}{P} + \frac{B}{Q} = {}^{Q)}\frac{A}{P} + {}^{P)}\frac{B}{Q} = \frac{AQ+BP}{PQ}$$

Calculați: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^3-x^2}$.

$x^2 + x = x(x + 1)$ și $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$

$x^2(x + 1)(x - 1) = x^2(x^2 - 1)$

$${}^{x^2-1)}\frac{1}{x^2} + {}^{x(x-1))}\frac{1}{x(x+1)} + {}^{x+1)}\frac{1}{x^2(x-1)} =$$

$$= \frac{x^2-1}{x^2(x^2-1)} + \frac{x(x-1)}{x^2(x+1)(x-1)} + \frac{x+1}{x^2(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2-1+x^2-x+x+1}{x^2(x^2-1)} = \frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(x^2-1)} = \frac{2}{x^2-1}$$

Observație. După efectuarea calculelor, dacă este posibil, fracția obținută se simplifică.

În concluzie, $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^3-x^2}=\frac{2}{x^2-1}$.

3 Înmulțirea fracțiilor algebrice:

Dacă A, B, P, Q sunt expresii algebrice cu $P \neq 0$, $Q \neq 0$, atunci: $\frac{A}{P}\cdot\frac{B}{Q}=\frac{A\cdot B}{P\cdot Q}$

Pentru cazul particular $P = 1$, avem: $A\cdot\frac{B}{Q}=\frac{A}{1}\cdot\frac{B}{Q}=\frac{A\cdot B}{Q}$.

Calculați: **a)** $\frac{x^2-1}{x+2}\cdot\frac{x}{5x-5}$; **b)** $\frac{3x^2+1}{2x^3-3x}\cdot(2x^2-3)$.

Rezolvare.

a) $\frac{x^2-1}{x+2}\cdot\frac{x}{5x-5}=\frac{(x^2-1)\cdot x}{(x+2)(5x-5)}=\frac{(x+1)\cdot\cancel{(x-1)}\cdot x}{(x+2)\cdot 5\cdot\cancel{(x-1)}}=\frac{(x+1)\cdot x}{(x+2)\cdot 5}=\frac{x^2+x}{5x+10}$.

b) $\frac{3x^2+1}{2x^3-3x}\cdot(2x^2-3)=\frac{3x^2+1}{x\,\cancel{(2x^2-3)}}\cdot\frac{\cancel{(2x^2-3)}}{1}=\frac{3x^2+1}{x}$.

Observație. La fel ca la înmulțirea numerelor reale, se pot face simplificări ale fracțiilor, cu condiția ca expresia prin care se simplifică să fie factor comun pentru unul din numărătorii și pentru unul din numitorii fracțiilor înmulțite.

4 Ridicarea unei fracții algebrice la o putere:

Dacă n este un număr natural, $n \geq 1$ și A, P sunt expresii algebrice cu $P \neq 0$, atunci:

$$\left(\frac{A}{P}\right)^1=\frac{A}{P} \text{ și } \left(\frac{A}{P}\right)^n=\underbrace{\frac{A}{P}\cdot\ldots\cdot\frac{A}{P}}_{n \text{ factori}, n\geq 2}=\frac{A^n}{P^n}$$

Dacă, în plus, $A \neq 0$, atunci:

$$\left(\frac{A}{P}\right)^{-n}=\left(\frac{P}{A}\right)^n, \text{ iar } \left(\frac{A}{P}\right)^0=1.$$

Calculați: $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$.

Rezolvare: a) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^3}$

$=\frac{(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)}=\frac{(x-1)^2\cdot(x-1)}{(x+1)^2\cdot(x+1)}$

$=\frac{(x-1)^2\cdot(x-1)}{(x+1)^2\cdot(x+1)}=\frac{(x^2-2x+1)\cdot(x-1)}{(x^2+2x+1)\cdot(x+1)}$

$=\frac{x^3-x^2-2x^2+2x+x-1}{x^3+x^2+2x^2+2x+x+1}=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3+3x^2+3x+1}$.

5 Împărțirea fracțiilor algebrice

Dacă P, Q, R, S sunt expresii algebrice cu $Q \neq 0$, $R \neq 0$, $S \neq 0$ atunci:

Inversa fracției algebrice $\frac{R}{S}$ este fracția $\frac{S}{R}$.

A împărți fracția algebrică $\frac{P}{Q}$ la fracția algebrică $\frac{R}{S}$ înseamnă a înmulți *prima fracție cu inversa celei de-a doua* $\frac{P}{Q}:\frac{R}{S}=\frac{P}{Q}\cdot\frac{S}{R}$.

Calculați: $\frac{x^2-16}{x^2}:\frac{x-4}{3x}$.

Rezolvare: $\frac{x^2-16}{x^2}:\frac{x-4}{3x}=\frac{x^2-16}{x^2}\cdot\frac{3x}{x-4}=$

$=\frac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{x^2}\cdot\frac{3x}{\cancel{x-4}}=\frac{3x(x+4)^{(x}}{x^2}=$

$=\frac{3(x+4)}{x}$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Ordinea efectuării operaților și *folosirea parantezelor* în calcule cu fracții algebrice sunt similare celor învățate la operații cu numere reale.

Aplicație. Se consideră expresia $E(x, y) = \dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}\cdot\left(\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}\right)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, $x \neq -y$.

a) Arătați că $E(x, y) = \dfrac{x}{x-y}$, pentru orice pereche de numere reale (x, y) cu x diferit de y și x diferit de $-y$.

b) Calculați valoarea numerică a expresiei pentru $x = 2$ și $y = \sqrt{2}$.

Soluție. **a)** $E(x, y) = \dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}\cdot\left(\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}\right) = \dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}\cdot\left({}^{x+y)}\dfrac{x}{x-y}-{}^{x-y)}\dfrac{y}{x+y}\right) =$

$\dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}\cdot\left(\dfrac{x^2+xy}{(x-y)(x+y)}-\dfrac{xy-y^2}{(x-y)(x+y)}\right) = \dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{x^2+xy-\left(xy-y^2\right)}{(x-y)(x+y)} = \dfrac{x(x+y)}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{x^2+xy-xy+y^2}{(x-y)(x+y)} =$

$\dfrac{x}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{(x-y)} = \dfrac{x}{x-y}$. $E(x, y) = \dfrac{x}{x-y}$, pentru orice pereche de numere reale (x, y) cu $x \neq y$ și $x \neq -y$.

b) $E(2, \sqrt{2}\,) = \dfrac{2}{2-\sqrt{2}}$.

Comentariu. Se recomandă ca rezultatul să fie prezentat sub forma unei fracții cu numitorul exprimat printr-un număr rațional. Prin urmare, $E(2, \sqrt{2}) = {}^{2+\sqrt{2})}\dfrac{2}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{4-2} = 2+\sqrt{2}$.

Observație. Valoarea numerică a expresiei se poate calcula și folosind forma inițială a expresiei algebrice, efectuând, după înlocuire, calculele necesare.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Efectuați calculele:

a) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{3x}{5}$; b) $\dfrac{x}{7}+\dfrac{3-x}{7}$;

c) $\dfrac{x+2}{x}+\dfrac{x-1}{x}$; d) $\dfrac{y}{4}-\dfrac{5y}{4}$;

e) $\dfrac{y}{y-2}-\dfrac{2}{y-2}$; f) $\dfrac{-2y}{y^2+4}-\dfrac{6-2y}{y^2+4}$.

2 Calculați, apoi simplificați fracția algebrică rezultată.

a) $\dfrac{x^2}{x^2-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2-1}$;

b) $\dfrac{ax+a}{a-b}-\dfrac{bx+b}{a-b}$;

c) $\dfrac{11x}{6x^2-xy}-\dfrac{7x}{6x^2-xy}-\dfrac{2x}{xy-6x^2}$.

3 **3.1.** Aduceți la același numitor fracțiile algebrice:

a) $E(x) = \dfrac{3}{2x}$, $F(x) = \dfrac{1}{5x}$;

b) $E(x) = \dfrac{x+1}{3x}$, $F(x) = \dfrac{1}{6x^2}$;

c) $E(x) = \dfrac{1}{2x-1}$, $F(x) = \dfrac{1}{2x+1}$.

3.2. Calculați $E(x) + F(x)$ și $E(x) - F(x)$ pentru fiecare din subpunctele anterioare.

4 Efectuați calculele:

a) $\dfrac{-2}{x-2}+\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{1}{x^2-4x+4}$;

b) $\dfrac{x^2+2}{2x}-\dfrac{x^2}{2x+4}+\dfrac{4}{x^2+2x}$;

c) $\dfrac{x}{2-x}-\dfrac{2-x}{x}+\dfrac{4x-4}{(x-1)^2-1}$.

5 Considerăm expresia algebrică
$E(x)=\dfrac{1}{2x-3}-\dfrac{1}{4x-6}+\dfrac{1}{12-8x}$.

a) Aflați mulțimea de definiție a expresiei algebrice.

b) Aduceți expresia $E(x)$ la o formă mai simplă.

6 Calculați puterile:

a) $\left(\dfrac{x}{4}\right)^2$; **b)** $\left(-\dfrac{2}{y}\right)^3$; **c)** $\left(\dfrac{2ab}{13c}\right)^{-1}$;

d) $-\left(-\dfrac{x}{y}\right)^{-2}$; **e)** $\left(\dfrac{x-2}{2x}\right)^2$; **f)** $\left[\left(\dfrac{3a}{x+1}\right)^2\right]^3$.

7 Efectuați înmulțirile:

a) $\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{x}{y}$; **b)** $\dfrac{x}{10}\cdot\left(-\dfrac{3}{x}\right)$; **c)** $\dfrac{2y}{3x}\cdot\dfrac{6x}{7y}$;

d) $-\dfrac{x^2}{y}\cdot\dfrac{y^3}{x}$; **e)** $\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\dfrac{3}{x+1}\cdot\dfrac{x+2}{-6}$.

f) $\dfrac{ax+ay}{x^2-4x}\cdot\dfrac{x-4}{x+y}$ **g)** $\dfrac{x^2-4}{x^2-1}\cdot\dfrac{x-1}{x^2+2x}$.

8 Efectuați împărțirile:

a) $-\dfrac{x}{y}:\dfrac{4}{3}$; **b)** $\dfrac{6a^2b}{66c}:\dfrac{2a^3b^2}{11c^2}$;

c) $-\dfrac{x^2-1}{x}:\dfrac{x+1}{x^2}$; **d)** $\dfrac{x^3-9x}{2x}:\dfrac{x+3}{-3x}$.

9 Calculați, respectând ordinea efectuării operațiilor:

a) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}:\dfrac{4x-4}{3x^2}\cdot\dfrac{4}{x^2+x}$;

b) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}:\dfrac{3x-3}{4x^2}\cdot\dfrac{3}{x^2+x}$;

c) $\left(\dfrac{x}{4}\right)^{-1}:\left(x-\dfrac{x}{2}\right)^{-1}$; **d)** $\left(\dfrac{x}{6}\right)^{-2}:\left(x-\dfrac{x}{3}\right)^{-2}$.

10 Efectuați calculele:

a) $\left(\dfrac{a}{3}-\dfrac{3}{a}\right)\cdot\dfrac{a^2}{a^2-9}+\dfrac{6-a}{3}$;

b) $\left(\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{2}{a-2}\right)\cdot\dfrac{(a-3)^2-1}{a}$;

c) $\left[\dfrac{a}{a-1}+\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{2}{a^2-1}-\dfrac{2a}{(a-1)(a+1)}\right]:\dfrac{a^3+a}{a^2-1}$;

d) $\left(a-\dfrac{4ab}{a+b}+b\right):\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{b-a}-\dfrac{2ab}{a^2-b^2}\right)$.

11 Fie expresiile $A(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ și $B(x)=-\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$. Arătați că:

a) $B(x)=1-x\cdot A(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$

b) $[A(x)]^2+[B(x)]^2=1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$

12 Se consideră expresia

$E(x)=\left(\dfrac{1+x}{2x}-\dfrac{1+2x}{5x}\right)\cdot\dfrac{10x}{x+3}$,

$x\in\mathbb{R}$, $x\neq-3$, $x\neq0$.

Arătați că $E(x)=1$, pentru orice număr real x, $x\neq-3$ și $x\neq0$.

13 Fie expresia

$E(x)=\left(\dfrac{x^2-x+4}{x^2-4}-\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}\right)\cdot\dfrac{x^2+2x-8}{4x+2}$,

$x\in\mathbb{R}-\{-2,-\dfrac{1}{2},2\}$.

a) Descompuneți în factori x^2+2x-8.

b) Arătați că $E(x)=\dfrac{x+4}{x+2}$.

14 Fie expresia

$E(x)=\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}-\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right):\left(\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

a) Determinați mulțimea D, domeniul de existență a expresiei $E(x)$.

b) Aduceți expresia la o formă mai simplă.

c) Arătați că $E(x)<\dfrac{1}{2}$, oricare ar fi $x\in D$.

15 Se consideră expresia

$F(x)=\left(\dfrac{2x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2+x}-\dfrac{x+1}{x^2-x}+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-3}$.

a) Determinați M, mulțimea valorilor numărului real x pentru care este definită expresia $F(x)$.

b) Aduceți expresia la o formă mai simplă.

c) Arătați că $F(a)$ nu poate fi număr întreg pentru nicio valoare $a\in M\cap\mathbb{Z}$.

16 Fie expresia

$E(x)=\left(\dfrac{5}{2x+3}+\dfrac{2}{3-2x}+\dfrac{2x+9}{4x^2-9}\right):\dfrac{8}{4x^2+12x+9}$,

$x\in\mathbb{Z}$.

a) Aduceți expresia la o formă mai simplă.

b) Arătați că numărul

$1+2\cdot[E(0)+E(1)+...+E(18)]$

este pătrat perfect.

5 Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$

L1. Ecuația de gradul al doilea cu o necunoscută

Ne amintim!

Rezolvarea ecuației de forma $x^2 = a$, cu $a \in \mathbb{R}$, se realizează ținând cont de: 1) $a > 0$; 2) $a = 0$; 3) $a < 0$;

1) Dacă $a > 0$, ecuația $x^2 = a$ se poate scrie $|x| = \sqrt{a}$, egalitate care are loc dacă și numai dacă $x = \sqrt{a}$ sau $x = -\sqrt{a}$. Vom spune că ecuația are soluțiile reale $x_1 = \sqrt{a}$ și $x_2 = -\sqrt{a}$.
Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \left\{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\right\}$

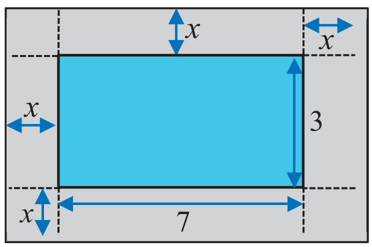
Exemplu: $x^2 = 15 \Rightarrow x_1 = \sqrt{15}$ și $x_2 = -\sqrt{15}$, deci $S = \left\{-\sqrt{15}, \sqrt{15}\right\}$

2) Ecuația $x^2 = 0$ are doar soluția $x = 0$, iar $S = \{0\}$.

3) Ecuația $x^2 = a$, unde $a < 0$, nu are nicio soluție, număr real, pentru că $x^2 \geq 0$ și $a < 0$, deci $x^2 \neq a$, oricare ar fi numărul real x. Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \varnothing$.
Exemplu: Ecuația $x^2 = -16$ nu are nicio soluție și $S = \varnothing$.

Rezolvăm și observăm

Problema 1. Piscina din imagine, cu lungimea de 7 m și lățimea de 3 m, are formă dreptunghiulară. Aceasta este înconjurată de o alee cu lățimea de x metri (vezi figura din dreapta). Se notează cu $\mathcal{A}(x)$ aria suprafeței terenului ocupat de piscină și alee, exprimată, în metri pătrați.



a) Calculați $\mathcal{A}(x)$ în două moduri și deduceți egalitatea
$(2x + 3)(2x + 7) = 4x^2 + 20x + 21$.

b) Demonstrați egalitatea anterioară utilizând calculul algebric.

c) Știind că pentru construcția piscinei și a aleii terenul folosit are o suprafață de 77 m², calculați lățimea aleii.

Rezolvare.

a) Terenul ocupat de piscină și alee este o suprafața dreptunghiulară, care are lățimea de $(2x + 3)$ m și lungimea de $(2x + 7)$ m.
Rezultă $\mathcal{A}(x) = (2x + 3)(2x + 7)$.
Pe de altă parte, suprafața dreptunghiulară este reuniunea a patru suprafețe pătratice și cinci suprafețe dreptunghiulare. Calculând aria fiecăreia și însumând, rezultă
$\mathcal{A}(x) = 4 \cdot x^2 + 2 \cdot 7x + 2 \cdot 3x + 21 = 4x^2 + 20x + 21$.
În concluzie, $A(x) = 4x^2 + 20x + 21 = (2x + 3)(2x + 7)$.

b) $(2x + 3)(2x + 7) = 2x \cdot 2x + 2x \cdot 7 + 3 \cdot 2x + 3 \cdot 7 = 4x^2 + 14x + 6x + 21 = 4x^2 + 20x + 21$, deci are loc egalitatea.

c) Pentru a calcula lățimea aleii, avem de rezolvat problema: „Determinați valoarea lui x, știind că $A(x) = 77$."
Deoarece $A(x) = 77$, rezultă $4x^2 + 20x - 56 = 0$, problema se reformulează astfel: „Rezolvați, în mulțimea numerelor reale pozitive, ecuația $4x^2 + 20x - 56 = 0$."
Rezolvarea ecuației: $4x^2 + 20x - 56 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ sau $x = -7$.
Deoarece x reprezintă lățimea aleii, rezultă: $x > 0$. Din $2 > 0$ și $-7 < 0$, rezultă că aleea are lățimea de 2 m.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiție. O ecuație de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde a, b și c sunt numere reale date, $a \neq 0$, se numește *ecuație de gradul al doilea cu necunoscuta* x. Numerele a, b și c sunt *coeficienții ecuației.*

Ecuația	Coeficienții
$x^2 - \sqrt{3}x + \frac{5}{2} = 0$	$a = 1$, $b = -\sqrt{3}$, $c = \frac{5}{2}$.
$x^2 + 2x = 0$	$a = 1$, $b = 2$, $c = 0$.
$-2x^2 - 7 = 0$	$a = -2$, $b = 0$, $c = -7$.

Un număr real care, atribuit necunoscutei x, verifică egalitatea $ax^2 + bx + c = 0$, se numește *soluție* a ecuației.

Mulțimea valorilor reale ale necunoscutei x care verifică ecuația se numește *mulțimea soluțiilor ecuației*, notată, de regulă, cu S.

A rezolva o ecuație înseamnă a determina mulțimea soluțiilor ei.

Exemplu: Pentru ecuația $x^2 + 3x = 0$ și numărul real -3, are loc egalitatea $(-3)^2 + 3(-3) = 0$, deci -3 *este soluție* a ecuației $x^2 + 3x = 0$.

Exemplu: Mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 + 3x = 0$ este $S = \{-3, 0\}$(demonstrația este mai jos).

Exemplu (rezolvarea ecuației $x^2 + 3x = 0$):
$x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x + 3 = 0$, adică $x = 0$ sau $x = -3$, deci $S = \{-3, 0\}$.

În definirea ecuației de gradul al doilea, $ax^2 + bx + c = 0$, condiția $a \neq 0$ este esențială. Ceilalți coeficienți ai ecuației pot fi orice numere reale.
Când cel puțin un coeficient este nul, sunt posibile următoarele cazuri particulare:
1) Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b = 0$, ecuația devine $ax^2 + c = 0$.
2) Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$, $c = 0$, ecuația devine $ax^2 + bx = 0$.

necunoscuta

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,\ a \neq 0$$

coeficientul lui x^2 — coeficientul lui x — termenul liber

1 Rezolvarea ecuației $ax^2 + c = 0$ ($a, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$)

$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$.

Dacă $-\frac{c}{a} < 0$, cum $x^2 \geq 0$, ecuația nu are soluții.

Dacă $-\frac{c}{a} \geq 0$, atunci $x^2 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-\frac{c}{a}} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ de unde $x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ sau $x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, deci $S = \left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$.

Exemple:
1) $3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 | : 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow |x| = 2$ și $S = \{-2, 2\}$.
2) $-2x^2 + 32 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 = -32 | : (-2)$
$\Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow |x| = 4$ și $S = \{-4, 4\}$.
3) $2x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = -4 | : 2 \Leftrightarrow x^2 = -2$.
Cum $-2 < 0$, rezultă $S = \varnothing$.

2 Rezolvarea ecuației $ax^2 + bx = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$)
Se aplică metoda factorului comun.
$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x \cdot (ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $ax + b = 0$.

Rezultă $S = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$.

Exemple:
1) $4x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow 4x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x - 2 = 0$. Rezultă $S = \{0, 2\}$.
2) $-\sqrt{2}\,x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\,x(x - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x - \sqrt{2} = 0$. Rezultă $S = \{0, \sqrt{2}\}$.

3 Rezolvarea ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$)

Împărțim fiecare membru al ecuației cu numărul nenul a.

$$ax^2 + bx + c = 0 \mid \cdot \frac{1}{a}$$

Scriem ecuația echivalentă:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Scriem expresia $x^2 + \dfrac{bx}{a}$ ca diferență de pătrate

$$x^2 + \frac{bx}{a} = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Scriem ecuația echivalentă:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Efectuăm calculul $-\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{c}{a}$

$$-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = -\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Notăm $b^2 - 4ac = \Delta$.

Înlocuim rezultatul în ecuația **(2)** și rezultă ecuația echivalentă:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \qquad \textbf{(3)}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$ se numește *discriminantul ecuației* $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$).
Fiecare din cele trei cazuri posibile, adică $\Delta < 0$, $\Delta = 0$, $\Delta > 0$, împreună cu ecuația (3), determină mulțimea soluțiilor ecuației $ax^2 + bx + c = 0$.

Cazuri posibile	Consecințe rezultate din ecuația (3)	Concluzii privind soluțiile ecuației
$\Delta < 0$	$-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0 \Rightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$	Ecuația nu are soluții în mulțimea $\mathbb{R}$, deci $S = \varnothing$
$\Delta = 0$	$\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b}{2a}\right) = 0$	Ecuația are două soluții reale egale $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$
$\Delta > 0$	$\dfrac{\Delta}{4a^2} = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \Rightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$ $\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$	Ecuația are două soluții distincte în mulțimea $\mathbb{R}$. $x_1 = -\dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ și $x_2 = -\dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Observație. În cazul $\Delta > 0$, vom spune, uzual, că soluțiile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) se calculează cu formula $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

1 Rezolvați ecuațiile:

a) $x^2 - x + 1 = 0$
$a = 1$, $b = -1$, $c = 1$
$\Delta = b^2 - 4ac =$
$= (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$
$\Delta < 0$
Rezultă $S = \varnothing$.

b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$
$a = 4$, $b = 4$, $c = 1$
$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$
$\Delta = 0$ și $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.
Rezultă $x_1 = x_2 = -\dfrac{1}{2}$ și $S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

c) $x^2 - 5x + 6 = 0$
$a = 1$, $b = -5$, $c = 6$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
$\Delta > 0$ și $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
Rezultă $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ și $S = \{2, 3\}$.

Aplicația 1. Descompuneți în factori expresia algebrică $E(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$), dacă este posibil.

Soluție. Scoatem *factor forțat* pe a. Rezultă $E(x) = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right)$.

Folosind notația $b^2 - 4ac = \Delta$, expresia se scrie $E(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\right]$.

Dacă $\Delta > 0$, atunci $E(x) = a(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}) = a(x - x_1)(x - x_2)$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, numită *ecuația atașată expresiei algebrice* $E(x)$.

Dacă $\Delta = 0$, atunci $E(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Dacă $\Delta < 0$, atunci $E(x)$ nu se descompune în factori cu coeficienți reali. Se spune că $E(x)$ este *ireductibilă* peste $\mathbb{R}$.

2 Descompuneți în factori expresiile:

a) $E(x) = x^2 + x + 1$

$x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$

Ecuația atașată expresiei $E(x)$ nu are soluții reale, deci $E(x) = x^2 + x + 1$ este *ireductibilă* peste $\mathbb{R}$.

b) $E(x) = 4x^2 + 12x + 9$

$4x^2 + 12x + 9 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$

Ecuația atașată expresiei $E(x)$ are două soluții egale $x_1 = x_2 = -\frac{3}{2}$ și

$E(x) = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = (2x+3)^2$

c) $E(x) = 6x^2 - 7x + 2$

$6x^2 - 7x + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 1 > 0$.

Ecuația atașată expresiei $E(x)$ are două soluții distincte: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{2}{3}$.

$E(x) = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) =$

$= (2x - 1)(3x - 2)$.

De multe ori, ecuațiile pe care le avem de rezolvat nu sunt scrise în forma $ax^2 + bx + c = 0$, dar sunt echivalente cu ecuații de această formă. Despre o astfel de ecuație vom spune că este reductibilă la o ecuație de gradul al doilea.

Pentru a identifica coeficienții și pentru a aplica algoritmul de rezolvare, este necesar să fie efectuate mai multe transformări echivalente. Ecuația obținută în acest fel este echivalentă cu ecuația inițială și, prin urmare, va avea aceleași soluții.

Aplicația 2. Rezolvați ecuația $\frac{3}{x} + x + 4 = 0$.

Soluție.

Pasul 1. Se aduce ecuația la forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$\frac{3}{x} + x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$ și $x \neq 0$;

$a = 1,\ b = 4,\ c = 3$.

Pasul 2. Se aplică algoritmul de rezolvare a ecuației.

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0$. Soluțiile reale ale ecuației sunt $x_1 = \frac{-4-2}{2} = -3$ și $x_2 = \frac{-4+2}{2} = -1$.

Pasul 3. Se scrie mulțimea soluțiilor ecuației, având în vedere domeniul acesteia.

Condiția $x \neq 0$ este satisfăcută de ambele soluții obținute, deci $S = \{-3, -1\}$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Completați pe caiet fiecare linie a tabelul de mai jos cu coeficienții ecuației corespunzătoare.

$ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c
$-3x^2 - 5x + 0{,}4 = 0$			
$\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{3} = 0$			
$4x^2 - 8x = 0$			
$-\sqrt{3}\,x^2 + 4 = 0$			
$4x^2 = 0$			

2 Rezolvați ecuațiile:
a) $3x^2 = 12$; **b)** $2x^2 - 6 = 0$;
c) $-x^2 + 5 = 0$; **d)** $x^2 + 4 = 0$.

3 Rezolvați ecuațiile:
a) $x^2 - 6x = 0$; **b)** $2x^2 + x = 0$;
c) $-6x^2 + 4x = 0$; **d)** $-3x^2 = 0$.

4 Rezolvați ecuațiile:
a) $3x^2 - 48 = 0$; **b)** $-\sqrt{2}\,x^2 + \sqrt{50} = 0$;
c) $16t^2 + 1 = 0$; **d)** $16(1 - t)^2 - 1 = 0$;
e) $-16(1 - t)^2 - 25 = 0$; **f)** $32 - 2(4x + 3)^2 = 0$.

5 Rezolvați ecuațiile:
a) $-\sqrt{3}\,x^2 + \sqrt{27}\,x = 0$; **b)** $x^2 - 4x = 0$;
c) $3t^2 + 6t = 0$; **d)** $(1 - x)^2 - 4(1 - x) = 0$;
e) $2(t - 2)^2 - t + 2 = 0$; **f)** $-2x + 3 - 2(2x - 3)^2 = 0$.

6 Stabiliți care din următoarele ecuații au soluții reale: **a)** $3x^2 + 5x + 4 = 0$; **b)** $2x^2 + 7x + 5 = 0$; **c)** $9x^2 - 5x - 2 = 0$.

7 Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații de gradul al doilea:
a) $2x^2 + 9x + 10 = 0$; **b)** $x^2 - 5x + 4 = 0$;
c) $2x^2 + x\sqrt{7} - 7 = 0$; **d)** $-3x^2 - x + 2 = 0$;
e) $x^2\sqrt{10} - 7x + \sqrt{10} = 0$; **f)** $x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0$.

8 Aduceți ecuațiile la forma $ax^2 + bx + c = 0$, apoi rezolvați-le:
a) $x(x + 3) = 4$;
b) $(2x - 1)(-x + 3) = -7$;
c) $(x - 3)^2 = 2(x + 1)$;
d) $(3x + 1)^2 = (-x + 3)^2$;
e) $-2x(x + 3) = 6 + x$;
f) $(5x + \sqrt{7})(\sqrt{7} - 5x) = -24x^2$.

9 Descompuneți în factori $E(x)$:
a) $E(x) = x^2 - x + 3$;
b) $E(x) = 4x^2 + 20x + 25$;
c) $E(x) = 6x^2 - 11x - 10$.

L2. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$

Realitatea înconjurătoare poate fi mult mai bine cunoscută și înțeleasă datorită modelărilor matematice, prin soluționarea problemelor obținute și prin interpretarea și selectarea soluțiilor în funcție de condițiile concrete.

Rezolvăm și observăm

Ecuația de gradul al doilea este un instrument de calcul indispensabil multor discipline importante în explorarea cunoașterii umane.

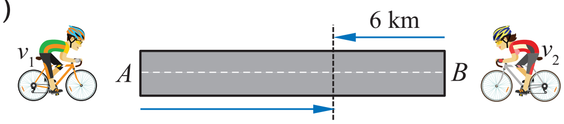
Problema 1. AF Doi cicliști pornesc în același moment, unul către celălalt, din localitățile A și B, și se deplasează dus-întors, pe șoseaua AB, cu viteze constante, dar diferite.

Considerăm x distanța dintre cele două localități. Notăm d_{11}, respectiv d_{21} distanța parcursă de primul, respectiv al doilea ciclist, până la prima întâlnire, iar cu d_{12}, respectiv d_{22} distanța parcursă de primul, respectiv de al doilea ciclist, până la a doua întâlnire.

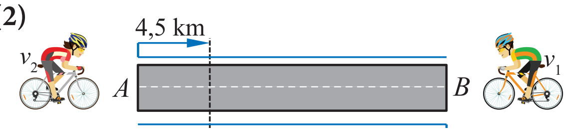
Cicliștii se întâlnesc prima dată la 6 km de localitatea B. La întoarcere, se întâlnesc la 4,5 km de localitatea A.

a) Arătați că d_{11} și d_{12} sunt direct proporționale cu d_{21} și d_{22}.
b) Aflați distanța dintre cele două localități.

(1)



(2)



Rezolvare.

a) Notăm cu v_1, respectiv v_2 viteza primului, respectiv celui de-al doilea ciclist. Notăm cu t_1, respectiv cu t_2, timpul scurs până la prima, respectiv până la a doua întâlnire a cicliștilor.

Atunci, $v_1 = \dfrac{d_{11}}{t_1} = \dfrac{d_{12}}{t_2}$ și $v_2 = \dfrac{d_{21}}{t_1} = \dfrac{d_{22}}{t_2}$, adică $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{d_{11}}{d_{21}} = \dfrac{d_{12}}{d_{22}}$.

Ultima egalitate arată că mărimile d_{11} și d_{12} sunt direct proporționale cu mărimile d_{21} și d_{22}.

b) Din schema **(1)**, care descrie traseul parcurs de cicliști până la prima întâlnire, rezultă $d_{11} = x - 6$ și $d_{21} = 6$.
Din schema **(2)**, care descrie traseul parcurs de cicliști până la a doua întâlnire, rezultă $d_{12} = 2x - 4{,}5$ și $d_{22} = x + 4{,}5$.
Folosind subpunctul **a)**, obținem ecuația $\dfrac{x-6}{6} = \dfrac{2x-4{,}5}{x+4{,}5}$, care conduce la ecuația de gradul al doilea $x^2 - 13{,}5x = 0$, cu soluțiile $x_1 = 0$ și $x_2 = 13{,}5$. Acceptabilă este doar soluția nenulă și $AB = 13{,}5$ km.

Problema 2. În desenul alăturat, punctul C împarte segmentul AB *în raportul* $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{13}{8}$.

a) Identificați, folosind desenul, raportul $\dfrac{AB}{AC}$

b) Aproximați la sutimi fracțiile zecimale corespunzătoare celor două rapoarte și decideți dacă valorile lor sunt apropiate.

c) Considerând $AB = x$ și $AC = 1$, determinați x astfel încât $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AB}{AC}$.

d) Calculați x^2, $x + 1$, $x - 1$ și $\dfrac{1}{x}$.

e) Folosind un calculator, aproximați numărul x printr-o fracție zecimală.

AB este întregul divizat în 21 de părți egale.
Punctul C împarte întregul în două părți.
AC este *partea mai mare, BC* este *partea mai mică.*

Rezolvare.

a) $AB = 21$ u.m., $BC = 8$ u.m., $AC = 13$ u.m., iar $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{21}{13}$

b) $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{13}{8} = 1{,}625$ și $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{21}{13} = 1{,}61\ldots$.

Prin urmare, cele două rapoarte sunt aproximativ egale.

c) Din $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AB}{AC}$, rezultă $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x}{1}$, de unde ecuația

$x^2 - x - 1 = 0$, cu soluțiile $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ și $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Deoarece $x > 0$, rezultă $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

d) $x^2 = x + 1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{1}{x} = x - 1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

e) $x = 1{,}618033988749\ldots$

Parthenonul din Atena
(477–432 î.Hr.)
$\dfrac{MN}{MP} = \dfrac{21}{13} = 1{,}61\ldots$

Numărul de aur.
Matematicienii îl notează cu litera greacă φ (phi), după numele arhitectului *Phidias* (490-431 î.Hr.), care a folosit acest raport la construcția Parthenonului din Atena.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicație. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 1$ dm, $BC = 3$ dm și punctele M, N situate pe laturile BC, respectiv CD, cu $BM - CN = \frac{3}{2}$ dm. Determinați pozițiile punctelor M și N astfel încât aria triunghiului AMN să fie o treime din aria dreptunghiului.

Pasul 1. Necunoscuta va fi lungimea unuia dintre segmentele BM și CN. Fie $CN = x$.

Pasul 2. $BM = x + \frac{3}{2}$, $DN = 1 - x$, $CM = \frac{3}{2} - x$.

$\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot BC = 3$ dm² și $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{AMN} + \mathcal{A}_{ABM} + \mathcal{A}_{CMN} + \mathcal{A}_{ADN}$, iar $\mathcal{A}_{AMN} = 3 - (\mathcal{A}_{ABM} + \mathcal{A}_{CMN} + \mathcal{A}_{ADN})$.

Pe de altă parte, $\mathcal{A}_{AMN} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{ABCD}$, deci $\mathcal{A}_{ABM} + \mathcal{A}_{CMN} + \mathcal{A}_{ADN} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - x\right) \cdot x +$

$+ \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (1 - x) = 2$, care este reductibilă la ecuația de gradul al doilea $2x^2 + x - 1 = 0$.

Pasul 3. $2x^2 + x - 1 = 0$, cu $\Delta = 1 + 8 = 9$ și $x_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$, $x_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$.

Soluțiile ecuației sunt numerele -1 și $\frac{1}{2}$.

Pasul 4. Cum $CD = 1$ dm și N aparține laturii DC, rezultă $0 \le x \le 1$, fiind validă doar soluția $x = \frac{1}{2}$.

$CN = \frac{1}{2}$ dm, deci N este mijlocul segmentului CD, iar M este situat pe segmentul BC astfel încât $BM = 2$ dm.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Calculați aria și perimetrul unui triunghi dreptunghic care are ipotenuza de 10 cm, știind că una dintre catete este cu 2 cm mai mică decât cealaltă.

2 Aflați un număr real pozitiv cu 6 mai mare decât inversul său.

3 **a)** Suma dintre un număr real și inversul său este 2. Aflați numărul.
b) Demonstrați că oricare ar fi un număr real pozitiv, suma dintre acesta și inversul său este cel puțin egală cu 2.
c) Demonstrați că oricare ar fi un număr real negativ, suma dintre acesta și inversul său este cel mult egală cu –2.

4 Calculați diagonala unui dreptunghi știind că are perimetrul 34 m și aria 60 m².

5 Media aritmetică a numerelor $a^2 + 11$, $2ab$ și $b^2 - 8$ este egală cu 1. Aflați raportul numerelor a și b.

6 Stabiliți în două moduri dacă există două numere naturale consecutive al căror produs să fie 136.

7 Un poligon convex are 90 de diagonale. Determinați numărul laturilor acestui poligon.

8 **a)** Scrieți o ecuație de gradul al doilea care are soluțiile $x_1 = 2$ și $x_2 = 5$.
b) Scrieți o ecuație de gradul al doilea care are soluțiile $x_1 = a$ și $x_2 = b$, unde a și b sunt două numere reale date.
c) Știind că suma a două numere este 7 și produsul este 12, scrieți ecuația de gradul al doilea care are ca soluții numerele date.
d) Notând cu s suma numerelor a și b și cu p produsul lor, scrieți, folosind s și p, ecuația care are soluțiile a și b.

9 Aflați două numere reale care au media geometrică 40 și media armonică 32.

10 Determinați numărul real x pentru care diferența dintre acest număr și pătratul său este maximă.

11 Fie numărul real x. Dacă numerele x^7 și x^3 sunt numere raționale, arătați că și x este număr rațional.

TEST DE AUTOEVALUARE *Se acordă 10 puncte din oficiu*

Subiectul I. *Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.*

5p **1.** Numărul a = $\frac{5}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}$ este egal cu:

A. 0 B. 1 C. 5 D. − 5

5p **2.** Dacă $a = -3\sqrt{5}$ şi $b = \sqrt{180}$, atunci $a^2 - \sqrt{5} \cdot b$ este:

A. 10 B. 15 C. 20 D. 30

5p **3.** Efectuând calculele, $2a \cdot 3bc + 3b \cdot (-4ac) - 4c \cdot (-2ab)$, se obține:

A. abc B. $-2abc$ C. $-abc$ D. $2abc$

5p **4.** Calculând, $(a + b)^2 - (b - 2a)^2 + (2a - 3b)(2a + 3b)$, se obține:

A. $a^2 + 6ab - 9b^2$ B. $a^2 - 6ab - 9b^2$ C. $a^2 + 6ab + 9b^2$ D. $a^2 - 6ab + 9b^2$

5p **5.** Simplificând fracția, $\frac{\left(2a^2b^2\right)^2}{a^3b^2}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, se obține:

A. $4a^2b^2$ B. $4a^2b$ C. $4ab^2$ D. $4ab$

5p **6.** Valoarea numerică a fracției $F(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, pentru $x = -1$, $y = 3$, este:

A. 0,25 B. 0,5 C. 0,2 D. 0,52

5p **7.** Prin amplificarea fracțiaei $\frac{x+2}{1+x}$ cu $1 - x$, se obține $\frac{ax^2+bx+c}{1+dx^2}$. Numărul $a + b + c + d$ este:

A. 2 B. −1 C. −2 D. 1

5p **8.** Dacă numărul real $x = -\sqrt{2}$ este soluție a ecuației $x^2 - 2\sqrt{2}x + m = 0$, atunci m este egal cu:

A. $-\sqrt{2}$ B. 4 C. − 6 D. $\sqrt{2}$

Subiectul al II-lea. *La problemele următoare, se cer rezolvări complete.*

5p **1. a)** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $x^2 - 4x + 4 = 0$.

10p **b)** Determinați $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2 - 4x + 4y^2 + 12y + 13 = 0$.

2. Se consideră fracția $F(a, b) = \frac{a^2 + b \cdot (2a+b)}{a^2 + a + b \cdot (2a+b+1)}$, $a \neq -b$, $a \neq -b - 1$.

10p **a)** Simplificați fracția $F(a, b)$.

5p **b)** Calculați valoarea numerică a fracției F, știind că media aritmetică a numerelor a și b este $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

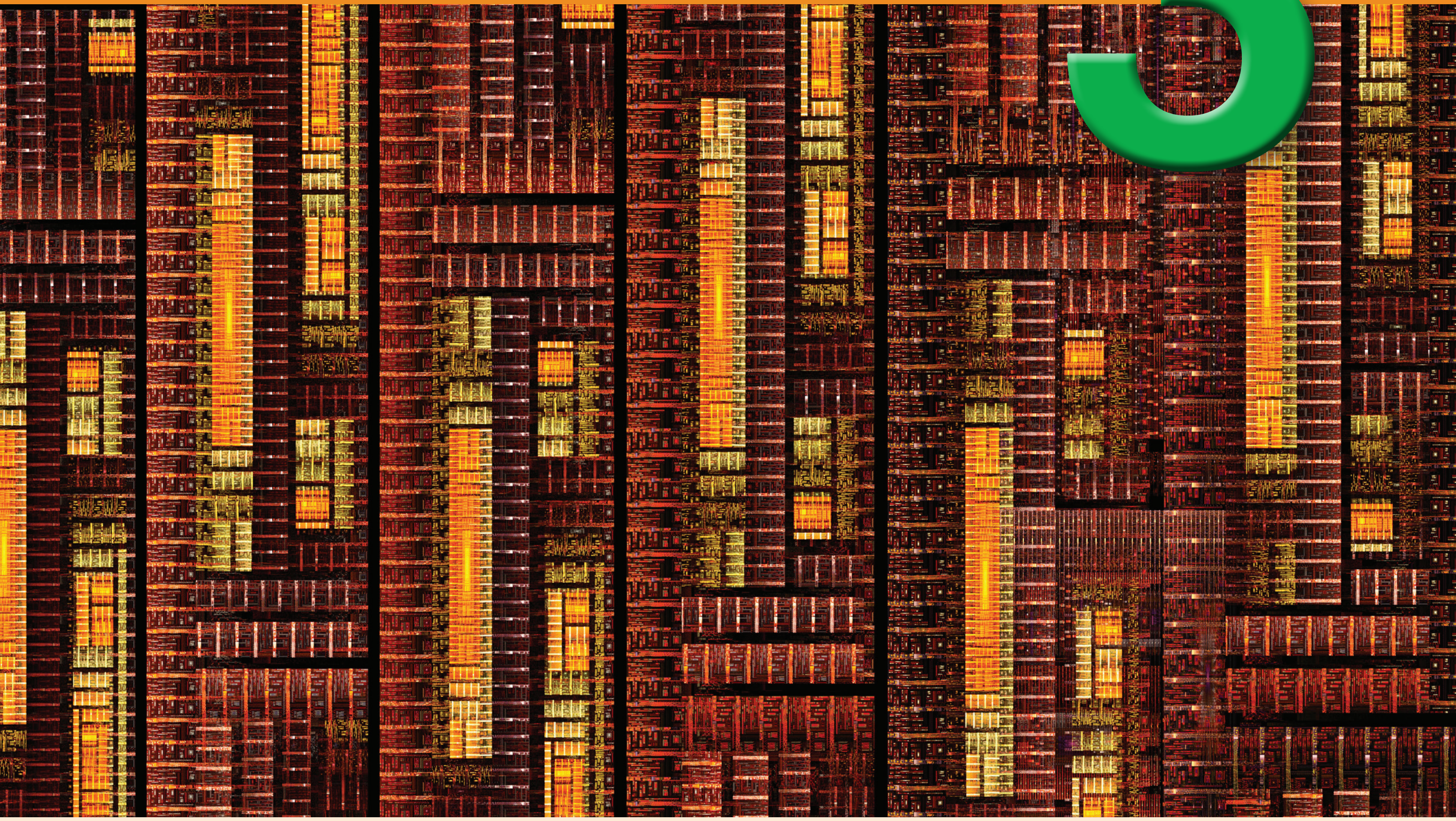
3. Fie expresia $E(x) = \left(\frac{x}{x+1} + 1\right) : \left(1 - \frac{3x^2}{1-x^2}\right)$, $x \in \mathbb{R} - \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

5p **a)** Stabiliți egalitatea: $-\frac{3x^2}{1-x^2} = \frac{3x^2}{x^2-1}$, $x \neq -1$, $x \neq 1$.

10p **b)** Arătați că $E(x) = \frac{x-1}{2x-1}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} - \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

5p **c)** Aflați valorile întregi ale numărului n, pentru care $2 \cdot E(n)$ este număr întreg.

CAPITOLUL 3



Funcții

1 **Funcții definite pe mulțimi finite. Graficul unei funcții. Reprezentarea geometrică a graficului unor funcții numerice**

2 **Funcții de forma $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Interpretare geometrică. Lecturi grafice**

3 **Elemente de statistică**

Competențe specifice

1.3 2.3 3.3 4.3 5.3 6.3

1 Funcții definite pe mulțimi finite. Graficul unei funcții. Reprezentarea geometrică a graficului unor funcții numerice

L1. Noțiunea de funcție. Moduri de a defini o funcție

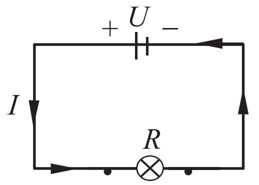
În viața de zi cu zi, dar și în științe (matematică, fizică, economie, sociologie etc.), faptul că o *mărime depinde de una sau mai multe mărimi variabile*, *care sunt independente*, se exprimă printr-o formulă de calcul. Aceast mod de scriere arată *dependența funcțională* dintre mărimile respective.

Exemple:

1 Inversul unui număr nenul depinde funcțional de numărul respectiv. Dacă x este numărul și y este inversul său, atunci dependența funcțională dintre x și y se exprimă prin formula $xy = 1$.

Oricare dinte cele două numere poate fi exprimat în funcție de celălalt: $x = \frac{1}{y}$, $y = \frac{1}{x}$.

2 Între mărimile I, U și R, respectiv intensitatea curentului electric care trece printr-un conductor, exprimată în amperi, tensiunea aplicată la capetele acestuia, exprimată în volți și rezistența electrică a conductorului, exprimată în ohmi, există o dependență funcțională, dată de formula $R = \frac{U}{I}$, numită *legea lui Ohm*.



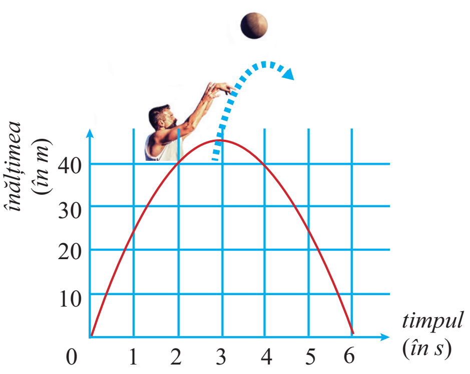
Rezolvăm și observăm

Problema 1. Cu ajutorul unui dispozitiv, se lansează în sus o minge. După 6 secunde de la momentul lansării, mingea ajunge din nou pe sol. Din secundă în secundă, un alt dispozitiv măsoară înălțimea la care ajunge mingea la momentul t, notată cu $h(t)$.

AF

Un cercetător realizează două liste:

- o listă A în care consemnează timpul, din secundă în secundă, de la momentul 0 al lansării și până la momentul în care mingea ajunge din nou pe sol;
- o listă B în care notează înălțimea la care ajunge mingea după t secunde și pe care o notează cu $h(t)$.



Cercetătorul constată că înălțimea h, dependentă de timpul t, se poate exprima prin expresia algebrică $h(t) = -5t^2 + 30t$, apoi realizează desenul în care reprezintă perechile $(t, h(t))$.

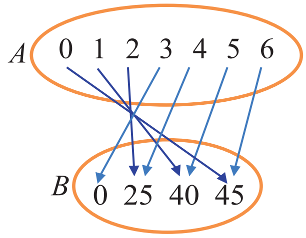
Scrieți listele A și B sub forma unor mulțimi numerice.

a) Timpul, din secundă în secundă, este dat de mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, iar înălțimea la care ajunge mingea la momentul t este $h(t) = -5t^2 + 30t$. Atunci, înălțimea la care se află mingea la momentul 0 este $h(0) = 0$ (metri), înălțimea la care se află mingea după 1 s este $h(1) = 25$ (metri) și așa mai departe, obținând mulțimea $B = \{0, 25, 40, 45\}$.

b) Realizați un tabel astfel: pe prima linie a tabelului scrieți valorile corespunzătoare variabilei t, iar pe a doua linie, scrieți valoarea corespunzătoare înălțimii la care ajunge mingea la momentul t.

t	0	1	2	3	4	5	6
$h(t)$	0	25	40	45	40	25	0

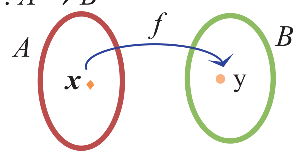
c) Realizați o diagramă în care să reprezentați cele două mulțimi și să asociați corect fiecărui element din mulțimea A elementul corespunzător din mulțimea B.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiție. Fiind date două mulțimi nevide A și B, spunem că am definit *funcția f pe mulțimea A, cu valori în mulțimea B*, dacă, printr-un procedeu oarecare, fiecărui element x din mulțimea A i se pune în corespondență un unic element y din mulțimea B.
Notăm $f : A \to B$ și citim „f definită pe A cu valori în B”.

$f : A \to B$



$x \in A,\ y \in B$ și $y = f(x)$

Mulțimea A se numește *mulțimea de definiție* a funcției sau *domeniul de definiție* al funcției.
Mulțimea B se numește *mulțimea în care funcția ia valori* sau *codomeniul funcției*.
Procedeul f prin care fiecărui element x din mulțimea A i se pune în corespondență un singur element y, din mulțimea B, se numește *lege de corespondență.*
Dacă elementului x din A i se asociază elementul y din B, spunem că y este *valoarea funcției în x* sau că y este *imaginea lui x, prin funcția f*, și scriem $y = f(x)$.

Mulțimea tuturor valorilor unei funcții f se numește *imaginea funcției f* și se notează cu *Im f*.

$y \in Imf \Leftrightarrow$ există $x \in A$ astfel încât $y = f(x)$
sau
$Imf = \{ f(x) \mid x \in A\}$

După modul în care este dată legea de corespondență, o funcție poate fi definită:
- prin diagramă;
- prin tabel;
- prin formule, cu ajutorul uneia sau mai multor expresii algebrice.

Exemplu: În problema anterioară, $h: A \to B$, unde $A = \{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$ și $B = \{0, 25, 40, 45\}$.
- prin diagramă: $h : A \to B$ (vezi diagrama problemei 1)
- prin tabel: $h : A \to B$,

t	0	1	2	3	4	5	6
$h(t)$	0	25	40	45	40	25	0

- prin formulă, cu ajutorul unei expresii algebrice:
  $h : A \to B,\ h(t) = -5t^2 + 30t$.

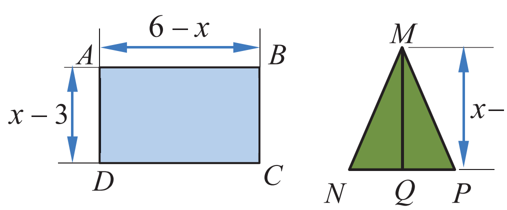
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

În cazul unor funcții, apar condiții suplimentare care impun definirea prin mai multe formule.

Problema 2. În figura alăturată, $ABCD$ este un dreptunghi, MNP un triunghi isoscel cu înălțimea MQ și baza $NP = 4$ cm, iar x este un număr real, care exprimă, în cm, o lungime.

AF

a) Calculați aria suprafeței dreptunghiulare pentru $x = 5$.
b) Calculați aria suprafeței triunghiulare pentru $x = 7$.
c) Aflați mulțimea numerelor reale x pentru care dreptunghiul poate fi construit.
d) Aflați mulțimea numerelor reale x pentru care triunghiul poate fi construit.



Rezolvare:
a) $AB = 6 - 5 = 1$(cm); $AD = 5 - 3 = 2$(cm). Rezultă că aria suprafeței dreptunghiulare este de 2 cm^2.
b) $MQ = 7 - 6 = 1$(cm); $NP = 4$ (cm). Rezultă că aria suprafeței triunghiulare este de 2 cm^2.
c) $AB = 6 - x > 0$ și $AD = x - 3 > 0$. Rezultă $x \in (3, 6)$.
d) $MQ = x - 6 > 0$ Rezultă $x \in (6, \infty)$.

Din rezolvarea cerințelor de mai sus, constatăm:

1. Nu se poate realiza construcția, deci nu se poate calcula aria celor două suprafețe pentru aceleași valori ale numărului x.
2. Pentru $x \in (3, 6)$, aria suprafeței dreptunghiulare este $(x - 3)(6 - x)$.
3. Pentru $x \in (6, \infty)$, aria suprafeței triunghiulare este $2(x - 6)$.

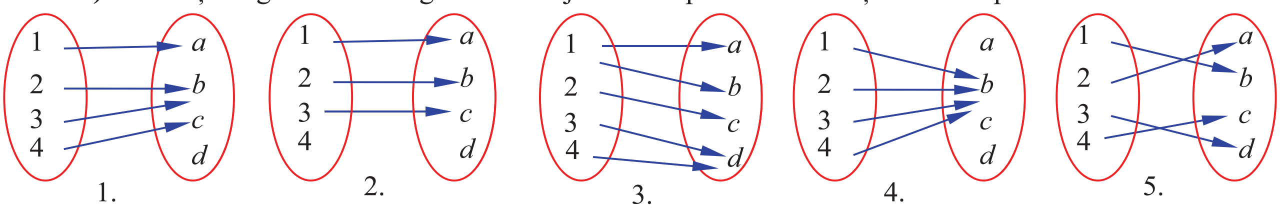
Vom defini o funcție astfel: Considerăm $A = (3, 6) \cup (6, \infty)$. Aria unei suprafețe este un număr pozitiv, deci putem alege $B = (0, \infty)$ (nu este unică alegerea). Legea de corespondență face ca fiecărui număr x, din mulțimea A, să-i corespundă aria suprafeței care poate fi construită, adică aria dreptunghiului, dacă $x \in (3, 6)$ și aria triunghiului, dacă $x \in (6, \infty)$

Prin urmare, $f: (3, 6) \cup (6, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} (x-3)(6-x), \text{ dacă } x \in (3, 6) \\ 2x - 12, \text{ dacă } x \in (6, \infty) \end{cases}$

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

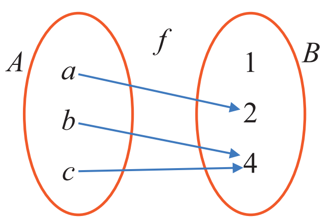
1 Se consideră mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{a, b, c, d\}$.

a) Precizați diagramele din figura de mai jos care reprezintă o funcție definită pe A cu valori în B.



b) Justificați faptul că diagramele rămase nu reprezintă funcții.

2 Funcția $f: A \to B$ este definită prin diagrama următoare.



a) Precizați mulțimea de definiție, mulțimea de valori și enumerați valorile funcției.

b) Copiați pe caiete și completați spațiile libere:

$f(a) = \ldots$ $\quad f(b) = \ldots$

$f(c) = \ldots$ $\quad f(a) + 2 \cdot f(b) + 3 \cdot f(c) = \ldots$

3 Tabelul următor descrie o funcție $f: A \to B$.

x	0	1	2	77
$f(x)$	3	5	7	157

a) Scrieți elementele domeniului de definiție.

b) Scrieți elementele codomeniului funcției.

c) Reprezentați funcția printr-o diagramă.

4 Următoarele funcții sunt definite prin tabele.

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	4	9	16

x	−1	0	1	2	7
$g(x)$	−3	0	3	6	21

a) Precizați domeniul de definiție și mulțimea valorilor pentru fiecare funcție.

b) Descrieți corespondența $x \to f(x)$, respectiv $x \to g(x)$, printr-o formulă.

5 Următoarele funcții sunt definite printr-o formulă. Precizați, în fiecare caz, domeniul de definiție, mulțimea de valori și imaginea funcției.

$g: \{1, 2, 3, 4\} \to (0, \infty)$,

$g(x) = x^2$

$h(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ 1, & \text{dacă } x \in (0, \infty) \end{cases}$

$t(x) = \begin{cases} -2x - 3, & \text{dacă } x \in \{-1, -2\} \\ 3x - 1, & \text{dacă } x \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$

6 Se consideră mulțimile $A = \{1, 2\}$ și $B = \{x, y, z\}$.

a) Scrieți, cu ajutorul unor diagrame, toate funcțiile care pot fi definite pe mulțimea A cu valori în mulțimea B.

b) Determinați numărul funcțiilor care se pot defini pe mulțimea A cu valori în mulțimea B.

7 **a)** Scrieți cele mai mici cinci numere naturale care împărțite la 3 dau restul 1.

b) Identificați regula de construire a șirului de numere 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 …

c) Definiți o funcție de la mulțimea numerelor naturale la mulțimea infinită M ale cărei elemente sunt numerele 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 …

d) Exprimați printr-o formulă legea de corespondență descrisă la punctul c).

8 Se consideră funcția $f : A \to B, f(x) = -x + 1$, unde $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x \leq 2\}$. Scrieți elementele care nu pot lipsi din mulțimea B.

9 Tabelul de mai jos definește o lege de corespondență între două mulțimi A și B.

x	–3	–1	0	2	5	8	10	15
$f(x)$	–6	–2	0	4	10	16	20	30

a) Determinați imaginea numărul –1, prin funcția f.

b) Determinați numărul care are imaginea 10.

c) Scrieți formula care definește legea de corespondență.

d) Calculați:
$3 \cdot f(-3) + f(0) - f(5) + 2 \cdot f(10) - f(15)$.

10 Se consideră funcția $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) =$ ultima cifră a numărului 9^n.

a) Aflați $f(0)$ și $f(3)$.

b) Determinați $Im\, f$.

c) Calculați $f(3) + f(33) + f(333) - 3 \cdot f(3330)$.

11 Fie funcția $f : A \to B$ unde

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 1| \leq 2\}$ și $f(x) = \sqrt{x+1} + x$.

a) Scrieți elementele domeniului de definiție.

b) Precizați care este imaginea lui 3 prin funcția f.

c) Se consideră mulțimea $M = \{ f(x) \mid x \in A\}$. Scrieți elementele mulțimii M.

d) Demonstrați că mulțimea B conține elementele: $-1, 1, \sqrt{2}+1, \sqrt{3}+2, 5$.

e) Stabiliți dacă egalitatea $M = B$ este adevărată.

12 Pentru funcțiile de mai jos, stabiliți domeniul de definiție, știind că fiecare element al codomeniului este imaginea unui element din domeniu:

a) $f: A \to \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}, f(x) = -2x + 1$;

b) $g: A \to \{0, 1, 4, 9\}, g(x) = x^2$;

c) $h: A \to \{-2, -1, 0, 2, 3\}, h(x) = x - 3$.

13 Pentru funcțiile de mai jos, stabiliți codomeniul cu număr minim de elemente, știind că:

a) $f: \{-3, -1, 0, 1, 2\} \to B, f(x) = -x + 1$;

b) $h: \{-2, -1, 1, 2, 0\} \to B, h(x) = x^2$;

c) $g: \{-1, 0, 1, 2, 4\} \to B, g(x) = 2x - 3$.

14 Lungimea laturii unui triunghi echilateral este $(4 - x)$ cm, unde x este un număr natural nenul, iar perimetrul triunghiului este p cm.

a) Exprimați printr-o formulă de calcul dependența funcțională a mărimii p de mărimea variabilă x.

b) Definiți o funcție care exprimă dependența funcțională găsită la subpuncul a), precizând domeniul, codomeniul și legea de corespondență a funcției.

c) Calculați imaginea lui 3 prin funcția găsită la subpunctul a).

d) Verificați dacă 7 este element al mulțimii valorilor funcției.

e) Definiți funcția prin diagrame, apoi cu ajutorul tabelului de valori.

15 Scrieți pe caiete cerințele următoare și completați spațiile libere, așa încât să obțineți propoziții adevărate:

a) Fie $A = \{0, 1, 2\}$ și $B = \{a, b\}$.
Numărul funcțiilor care se pot defini pe mulțimea A, cu valori în mulțimea B este ... .
Numărul funcțiilor care se pot defini pe mulțimea B, cu valori în mulțimea A este ... .

b) Fie $C = \{-3, 3\}$ și $D = \{-2, 1, 2\}$. Numărul funcțiilor $f : C \to D$, cu proprietatea $f(x) > 0$, oricare ar fi $x \in C$ este egal cu ... .

c) Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \to M, g(x) = |x|$.
Cel mai mic element al mulțimii M este …

d) Tabelul următor descrie funcția h: ... → …, $h(n) =$ … .

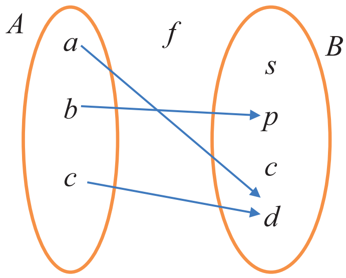
n	–1	0	1	2	10
$h(n)$	5	0	–5	–10	–50

e) Funcția $i: A \to \{-4, 0, 4, 8\}, i(x) = 4x$ are domeniul maxim de definiție $A =$ … .

L2. Graficul unei funcții. Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții numerice

Rezolvăm și observăm

Problema 1. AI În diagrama de mai jos, sunt reprezentate mulțimile $A = \{a, b, c\}$, $B = \{s, p, c, d\}$ și o lege de corespondență f între elementele celor două mulțimi.



a) Stabiliți dacă tripletul (A, B, f) definește o funcție. Justificați răspunsul.
b) Numiți domeniul de definiție și mulțimea în care funcția ia valori.
c) Scrieți tabelul de valori corespunzător funcției.
d) Scrieți mulțimea valorilor funcției $f: A \to B$ prin enumerarea elementelor.
e) Scrieți produsul cartezian $A \times B$.
f) Scrieți, enumerând elementele, submulțimea G_f a produsului cartezian $A \times B$ definită astfel:
$G_f = \{ (x, y) \in A \times B \mid x \in A \text{ și } y = f(x)\}$.

Rezolvare

a) Legea de corespondență f asociază fiecărui element din mulțimea A un element unic din mulțimea B, deci tripletul (A, B, f) definește o funcție.

b) Domeniul de definiție este mulțimea A, iar mulțimea în care funcția ia valori este mulțimea B.

c)

x	a	b	c
$f(x)$	d	p	d

d) Mulțimea valorilor funcției sau imaginea funcției este mulțimea:
$Imf = \{f(x) \cdot x \in A\} = \{f(x) \cdot x \in \{a, b, c\}\} = \{f(a), f(b), f(c)\} = \{d, p\}$.
Observăm că $\{d, p\} \subset \{s, p, c, d\}$, adică $Imf \subset B$.

e) $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y \in B)\}$.
Elementele produsului cartezian $A \times B$ sunt:

(a, s), (a, p), (a, c), (a, d),
(b, s), (b, p), (b, c), (b, d),
(c, s), (c, p), (c, c), (c, d),
(d, s), (d, p), (d, c), (b, d).

f) Deoarece $x \in A$, $A = \{a, b, c\}$ și $y = f(x)$, rezultă $G_f = \{(a, d), (b, p), (c, d)\}$.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Considerăm o funcție $f: A \to B$

Definiție. Submulțimea G_f a produsului cartezian $A \times B$, definită prin $G_f = \{(x, y) \in A \times B \mid x \in A \text{ și } y = f(x)\}$, se numește *graficul funcției f*.

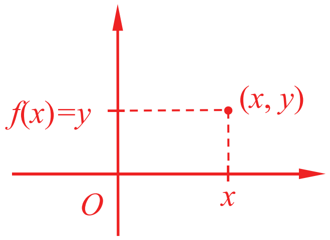
Remarcă. **1)** $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow x \in A$ și $y = f(x)$; **2)** $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$.
Exemplu: Funcția $f: \{-1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$, are tabelul de valori alăturat, de unde rezultă graficul $G_f = \{(-1, -5), (2, 1), (3, 3)\}$.

x	-1	2	3
$f(x)$	-5	1	3

$(2, 1) \in G_f$ deoarece $2 \in \{-1, 2, 3\}$ și $1 = f(2)$.
$(4, 5) \notin G_f$ deoarece $4 \notin \{-1, 2, 3\}$, chiar dacă $2 \cdot 4 - 3 = 5$.

Definiție. O funcție este numită *funcție numerică* dacă mulțimea de definiție și mulțimea în care funcția ia valori sunt submulțimi de numere reale.
$f: A \to B$ este funcție numerică $\Leftrightarrow$ $A \subset \mathbb{R}$ și $B \subset \mathbb{R}$

Fie $f: A \to B$, $A \subset \mathbb{R}$ și $B \subset \mathbb{R}$, o funcție numerică. Graficul funcției f este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$, $A \subset \mathbb{R}$ și $B \subset \mathbb{R}$, deci graficul unei funcții numerice $f: A \to B$ este o submulțime a produsului cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, adică $G_f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Consecință: Orice element al graficului unei funcții numerice, se „identifică” cu punctul de coordonate *x și y*, unde $y = f(x)$, și poate fi reprezentat în plan, într-un sistem de axe ortogonale, xOy.



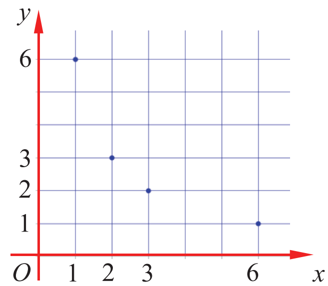
Mulțimea tuturor punctelor având coordonatele *x și y* unde $y = f(x)$ se numește *reprezentarea geometrică a graficului funcției f.*

Observație: Exprimarea „*reprezentarea geometrică a graficului funcției f*”se înlocuiește, în mod uzual, cu „*reprezentarea graficului funcției f*”.

Exemplu. **a)** Reprezentați geometric graficul funcției f, dată prin tabelul de valori:

x	1	2	3	6
$f(x)$	6	3	2	1

b) Definiți funcția f printr-o formulă.
Soluție. **a)** $G_f = \{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\}$
Reprezentăm grafic, într-un sistem de coordonate xOy, elementele mulțimii G_f.

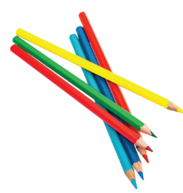


Reprezentarea geometrică este formată din 4 puncte.
b) Observăm că $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6 \cdot 1$, deci mărimile x și y sunt mărimi invers proporționale. Acestea verifică relația $x \cdot y = 6$, sau $y = \frac{6}{x}$, deci $f: \{1, 2, 3, 6\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{6}{x}$.

Știm să aplicăm. Identificăm conexiuni

Problema 2. Ioana cumpără creioane colorate. Prețul unui creion este 1,5 lei. Ioana notează cu n numărul creioanelor cumpărate, cu S suma plătită și realizează tabelul de valori.
AI

n	2	4	5
S			

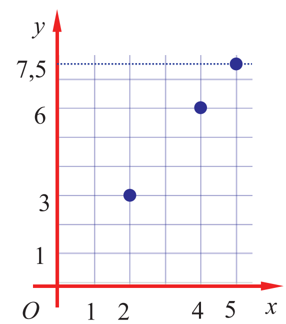


a) Exprimați suma S, în funcție de numărul n al creioanelor cumpărate.
b) Completați tabelul de valori realizat de Ioana.
c) Scrieți funcția definită prin tabelul de valori precizând, printr-o formulă, legea de corespondență.
d) Scrieți mulțimea valorilor funcției găsite la punctul **c)**.
e) Determinați numărul n al creioanelor cumpărate, pentru care s-ar plăti suma de 12 lei.
f) Justificați faptul că $(n, 12)$ nu aparține graficului funcției găsite la punctul **c)**.
g) Scrieți graficul funcției de la subpunctul **c)**, apoi reprezentați grafic funcția.

Rezolvare:
a) $S = 1{,}5 \cdot n$
b) Deoarece $S = 1{,}5 \cdot n$, atunci:

n	2	4	5
S	3	6	7,5

$n = 2 \Rightarrow S = 1{,}5 \cdot 2 = 3$.
$n = 4 \Rightarrow S = 1{,}5 \cdot 4 = 6$.
$n = 5 \Rightarrow S = 1{,}5 \cdot 5 = 7{,}5$.
c) Conform tabelului,
$S: \{2, 4, 5\} \to \{3; 6; 7{,}5\}$,
$S(n) = 1{,}5 \cdot n$.
d) $ImS = \{S(n) \mid n \in \{2, 4, 5\}\} = \{3; 6; 7{,}5\}$.
e) Dacă n este numărul creioanelor cumpărate pentru care s-ar plătit suma de 12 lei, atunci $1{,}5 \cdot n = 12$, deci $n = 8$. Răspuns: 8 creioane.
f) Conform definiției graficului, $(n, 12) \in G_S$
$\Leftrightarrow n \in \{2, 4, 5\}$ și $12 = S(n)$.
Dar $8 \notin \{2, 4, 5\}$, deci $(n, 12) \notin G_S$.
g) $G_S = \{(n, S(n)) \mid n \in \{2, 4, 5\}\} =$
$= \{(n; 1{,}5 \cdot n) \mid n \in \{2, 4, 5\}\} =$
$= \{(2, 3), (4, 6), (5; 7{,}5)\}$.



Reprezentarea graficului funcției S

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Dați exemplu de două funcții numerice și de două funcții care să nu fie funcții numerice.

2 Fie funcția $f : A \to B$. Mulțimea A are a elemente, mulțimea B are b elemente, $a, b \in \mathbb{N}$.
2.1. Comparați numărul elementelor mulțimii G_f cu numărul elementelor mulțimii $A \times B$.
2.2. Găsiți o relație între numerele a și b astfel încât $G_f = A \times B$.

3 Fie funcția g: $\{-2, -1, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$.
a) Determinați mulțimea G_g.
b) Reprezentați G_g într-un sistem de axe ortogonale.

4 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x - 1$ și punctele $A(2, 3)$, $B(-1, -1)$, $C(-2, 1)$, $D(0, -1)$, $E(\sqrt{3}, \sqrt{3} + 1)$. Efectuați calculele necesare, apoi precizați care dintre aceste puncte aparțin și care nu aparțin graficului funcției.

5 **a)** Alcătuiți tabelul de valori al funcției $g : \{0, 1, 4, 9\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$.
b) Scrieți graficul funcției, enumerând elementele acestuia.
c) Reprezentați graficul funcției într-un sistem de axe ortogonale.

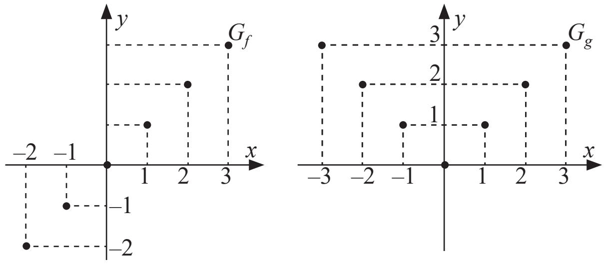
6 Fie funcția h: $A \to \{-2, 0, 4\}$, $h(x) = x + 4$.
a) Determinați elementele mulțimii A, știind că are trei elemente.
b) Reprezentați grafic funcția.

7 Fie funcția f: $\{-1, 0, 1\} \to B$, $f(x) = 3x + 2$.
a) Determinați mulțimea valorilor funcției, apoi scrieți mulțimea B cu număr minim de elemente.
b) Reprezentați grafic funcția.

8 Fie funcția f: $\{0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 4$.
a) Verificați dacă $A(-3, 7)$ aparține graficului funcției.
b) Reprezentați graficul funcției într-un sistem de axe ortogonale.

9 Reprezentarea geometrică a unei funcții h este mulțimea de puncte $\{M, N, P, Q\}$, $M(-3, 1)$, $N(-1, 3)$, $P(1, -3)$, $Q(3, -1)$. Aflați domeniul de definiție al funcției și mulțimea Imf.

10 În figurile următoare sunt reprezentate graficele funcțiilor f și g.



a) Scrieți domeniul de definiție și codomeniul pentru fiecare funcție.
b) Scrieți, cu ajutorul unor formule, legile de corespondență ale celor două funcții.

11 **a)** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$. Determinați a știind că $A(-2, 3) \in G_f$.
b) Punctul $B(b, 3b)$ este situat pe graficul funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{x-4}{3}$. Aflați numărul b.

12 Un dreptunghi are lungimile laturilor de $2x$ cm, respectiv y cm și perimetrul 18 cm, unde x și y sunt numere naturale.
a) Scrieți relația de dependență funcțională dintre x și y, exprimând pe y în funcție de x.
b) Precizați mulțimea A a valorilor naturale pe care le poate lua x și mulțimea B a valorilor naturale pe care le poate lua y.
c) Notăm cu f funcția definită pe A cu valori în B, prin care elementului x din A i se asociază elementul y din B, exprimat în funcție de x la punctul **a)**. Definiți funcția f, în 3 moduri, folosind: o formulă, un tabel de valori, o diagramă.
d) Reprezentați grafic funcția f.
e) Scrieți relația de dependență funcțională dintre x și y, exprimând pe x în funcție de y.
f) Precizați mulțimea B a valorilor naturale pe care le poate lua y și mulțimea A a valorilor naturale pe care le poate lua x.
g) Notăm cu g funcția definită pe B cu valori în A, prin care elementului y din B i se asociază elementul x din A, determinat la punctul **e)**. Definiți funcția g în 3 moduri, folosind: o formulă, un tabel de valori, o diagramă.
h) Reprezentați grafic funcția g.

2 Funcții de forma $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Interpretare geometrică. Lecturi grafice

L1. Funcții de forma $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$

Problema 1. La un supermarket, prețul unei pungi biodegradabile este de b lei.

AF Pe un cântar electronic se așază legumele cumpărate, ambalate în punga biodegradabilă. Automat, se afișează a lei, prețul unui kilogram de legume, precum și suma de y lei pentru cantitatea de x kg legume cumpărate, care include și prețul pungii biodegradabile. Deoarece y este o mărime dependentă funcțional de mărimea variabilei x, vom nota mărimea sumei y, pentru cantitatea de x kg legume cumpărate, cu $f(x)$.

a) Găsiți expresia algebrică a dependenței funcționale $y = f(x)$.

b) Prin dependența funcțională găsită la subpunctul anterior, definiți funcția f *pe mulțimea* A, *cu valori în mulțimea* $\mathbb{R}$, precizând mulțimea A, conform condițiilor impuse de contextul real.

c) Reluați cerința **a)** în cazul particular $a = 1{,}5$ și $b = 0{,}75$.

d) Pentru mulțimea $\{0{,}5;\ 1{,}5;\ 2\} \subset A$, scrieți tabelul de valori al funcției găsite la subpunctul precedent.

e) Din tabelul de valori găsit la punctul **d)** rezultă că elementele $(0{,}5;\ 1{,}5)$, $(1{,}5;\ 3)$ și $(2;\ 3{,}75)$ aparțin mulțimii G_f. Arătați că punctele $A(0{,}5;\ 1{,}5)$, $B(1{,}5;\ 3)$ și $C(2;\ 3{,}75)$ sunt coliniare.

Rezolvare. **a)**
- prețul unui kilogram de legume este a lei;
- suma plătită pentru x kg de legume este ax lei, la care se adaugă prețul pungii biodegradabile.

Suma achitată pentru cantitatea de x kg legume cumpărate este $ax + b$, deci $f(x) = ax + b$, care este forma algebrică a dependenței funcționale $y = f(x)$.

b) Rezultă funcția $f: A \to B$, $f(x) = ax + b$.

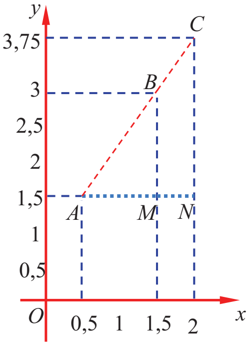
Deoarece elementele mulțimii A sunt numere x, prin care se exprimă în kilograme cantitățile de legume cumpărate, rezultă $x > 0$, deci $A = (0, \infty)$.

Obținem $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

c) $a = 1{,}5$ și $b = 0{,}75$ implică $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1{,}5 \cdot x + 0{,}75$.

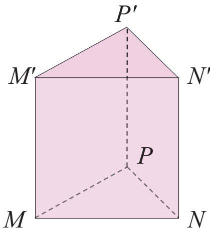
d)

x	0,5	1,5	2
$f(x)$	1,5	3	3,75



e) Reprezentăm punctele $A(0{,}5;\ 1{,}5)$, $B(1{,}5;\ 3)$ și $C(2;\ 3{,}75)$ și, folosind asemănarea triunghiurilor AMB și ANC, demonstrăm coliniaritatea acestora.

Temă de portofoliu



Se consideră prisma triunghiulară dreaptă $MNPM'N'P'$, notată P_1, reprezentată în figura alăturată. Lungimile muchiilor prismei, exprimate în centimetri, sunt: $MN = 4x - 2$, $MP = NP = 10 - x$, $MM' = 1$.

O altă prismă P_2 are aria laterală cu 17 cm² mai mică decât aria laterală a prismei P_1.

a) Pentru $x = 2$, calculați aria laterală a prismei P_1 și aria laterală a prismei P_2.

b) Se consideră legea de corespondență, $x \to f(x)$, unde $x \in A$, cu $A = \{1, 2, 3\}$, iar $f(x) \in \mathbb{R}$ și reprezintă aria laterală a prismei P_2. Scrieți, prin formulă, legea de corespondență $f(x)$.

c) Exprimați legea de corespondență a funcției $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ cu ajutorul unei diagrame, apoi cu ajutorul unui tabel.

d) Scrieți mulțimea G_f, enumerând elementele acesteia.

Observație. Situațiile practice analizate mai sus impun studiul funcțiilor definite prin expresii algebrice de forma $f(x) = ax + b$.

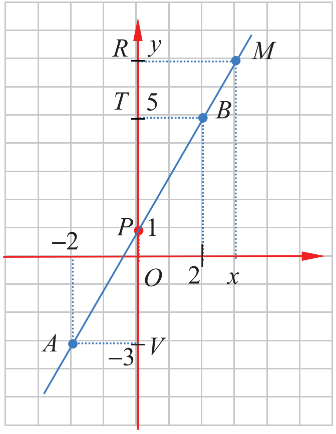
Pentru funcțiile de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde a și b sunt două numere reale date, sunt posibile situațiile:
1) Dacă $a = 0$, atunci funcția devine $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = b, b \in \mathbb{R}$ *și se numește funcție constantă.*
2) Dacă $a \neq 0$, atunci funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ se numește *funcție de gradul I.*

Exemple:
1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4$ este funcție constantă
2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1{,}5 \cdot x + 0{,}75$ este funcție de gradul I cu $a = 1{,}5$ și $b = 0{,}75$.
3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x$ este funcție de gradul I cu $a = -2$ *și* $b = 0$.
Contraexemple: Următoarele funcții nu sunt funcții de gradul I
1) $f: \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 1$ (domeniul de definiție nu este $\mathbb{R}$)
2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -x+1, & x<0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ (expresia $f(x)$ nu este aceeași pentru toate elementele domeniului)

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Problema 2. Într-un reper ortogonal, se consideră două puncte $A(-2, -3)$ și $B(2, 5)$.
AF **a)** Arătați că există o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$, unde a și b sunt două numere reale astfel încât: $(-2, -3) \in G_f$ și $(2, 5) \in G_f$.
b) Determinați punctul $P(x, y)$, pe axa Oy, pentru care $(x, y) \in G_f$.
c) Determinați punctul $Q(x, y)$, pe axa Ox, pentru care $(x, y) \in G_f$.
d) Știm că o dreaptă este determinată de două puncte distincte. Demonstrați că: $M(x, y) \in AB \Leftrightarrow (x, y) \in G_f$.

Rezolvare: **a)** Folosim faptul că $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow ax + b = y$.
$(-2, -3) \in G_f \Leftrightarrow f(-2) = -3 \Leftrightarrow -2a + b = -3$, iar $(2, 5) \in G_f \Leftrightarrow f(2) = 5 \Leftrightarrow 2a + b = 5$. Obținem sistemul de ecuații $\begin{cases} -2a+b=-3 \\ 2a+b=5 \end{cases}$ cu soluția $a = 2$ și $b = 1$. Funcția căutată este $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 1$.
b) $P(x, y) \in Oy \Leftrightarrow x = 0$, deci $P(0, y)$, iar $(0, y) \in G_f \Leftrightarrow y = f(0)$. Rezultă $y = 1$ și $P(0, 1)$.
c) $Q(x, y) \in Ox \Leftrightarrow y = 0$, deci $Q(x, y)$, iar $(x, 0) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = 0$. Rezultă $2x + 1 = 0$ și $Q(-0{,}5; 0)$.
d) Reprezentăm grafic punctele $A(-2, -3)$, $B(2, 5)$ și punctul $P(0, 1)$, care reprezintă $Oy \cap G_f$, conform punctului **b)**.



Deoarece $(-2, -3)$, $(2, 5)$ și $(0, 1)$ aparțin mulțimii G_f, pentru exprimare mai simplă, spunem că punctele $A(-2, -3)$, $B(2, 5)$ și $P(0, 1)$ aparțin graficului funcției f.
Prin urmare, avem de demonstrat că $M(x, y) \in AB \Leftrightarrow M(x, y) \in G_f$. Vom face demonstrația parcurgând următoarele etape:
I) Demonstrăm că punctele graficului $A(-2, -3)$, $B(2, 5)$ și $P(0, 1)$ sunt puncte coliniare:
Punctele $T(0, 5)$, $V(0, -3)$ și $P(0, 1)$ sunt coliniare, deoarece sunt pe axa Oy. Deoarece $\frac{VA}{TB} = \frac{2}{2} = 1$ și $\frac{VP}{TP} = \frac{4}{4} = 1$, triunghiurile dreptunghice AVP și BTP sunt asemenea. Rezultă congruența unghiurilor APV și BPT. Cum punctele T, P, V sunt coliniare, rezultă coliniaritatea punctelor A, P și B.

II) Demonstrăm că, dacă $M(x, y) \in G_f$, atunci $P(0, 1)$, $B(2, 5)$ și $M(x, y)$ sunt coliniare.
Punctele $P(0, 1)$, $T(0, 5)$ și $R(0, y)$ sunt coliniare, iar triunghiurile BPT și MPR sunt dreptunghice.

Din $M(x, y) \in G_f$ rezultă $y = 2x + 1$. Dacă $y > 1$, rezultă $x > 0$. Apoi, $\frac{PT}{PR} = \frac{4}{y-1} = \frac{4}{2x+1-1} = \frac{2}{x}$ și $\frac{TB}{RM} = \frac{2}{x}$.

Rezultă $\frac{PT}{PR} = \frac{TB}{RM} = \frac{2}{x}$, $\Delta BPT \sim \Delta MPR$ (L.U.L), de unde $\sphericalangle BPT \equiv \sphericalangle MPR$, deci punctele P, B, M sunt coliniare.

III) Demonstrăm că, dacă $M(x,y) \in G_f$, atunci $M(x, y) \in AB$.
Din II) rezultă $M(x, y) \in PB$, iar din I) rezultă că dreapta PB coincide cu dreapta AB. Așadar, $M(x, y) \in AB$.

IV) Demonstrăm că, dacă $M(x,y) \in AB$, atunci $M(x, y) \in G_f$. Dacă $M(x, y) \in AB$, atunci triunghiurile BPT și MPR sunt asemenea, iar din asemănarea lor rezultă $\frac{PT}{PR} = \frac{TB}{RM}$. Dar, $\frac{PT}{PR} = \frac{4}{y-1}$ și $\frac{TB}{RM} = \frac{2}{x}$, deci $\frac{4}{y-1} = \frac{2}{x}$, de unde $y = 2x + 1$, adică $y = f(x)$.
Prin urmare, din $M(x,y) \in AB$, rezultă $y = f(x)$, ceea ce probează că $M(x, y) \in G_f$.
Observație. Notația G_f și exprimarea *„graficul funcției f”* sunt folosite atât pentru mulțimea perechilor de numere reale $(x, f(x))$, cât și pentru mulțimea punctelor din plan cu coordonatele $(x, f(x))$, înțelegând din context despre care dintre cele două sensuri este vorba.

- Pentru orice funcție de forma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale date, graficul funcției se notează cu G_f și este o submulțime a produsului cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definit prin egalitatea: $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ sau $G_f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}$ și $y = ax + b\}$.
$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ și $y = f(x)$ sau
$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ și $y = ax + b$.

- Mulțimea tuturor punctelor din plan, raportate la reperul cartezian xOy, având coordonatele $(x, f(x))$ se numește *reprezentarea geometrică a graficului funcției f*. $M(x, y) \in G_f \Leftrightarrow y = f(x)$
Vom folosi una din formulările:
$(x, y) \in G_f$ sau $M(x, y) \in G_f$.

Teoremă. Graficul unei funcții $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale date, este o dreaptă d. Scriem $G_f = d$.

Graficul unei funcții constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = b$ este dreapta paralelă cu Ox, prin punctul $A(0, b)$.
Observație. În acest context, relația $y = ax + b$ se numește *ecuația dreptei d*; scriem d: $y = ax + b$ și citim „dreapta d este de ecuație $y = ax + b$”.

- Pentru a reprezenta geometric graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ sau dreapta d: $y = ax + b$ este nevoie de două puncte distincte oarecare ale dreptei d.

a) În multe situații, este avantajos ca aceste puncte să fie *intersecțiile* graficului *cu axele* de coordonate[1].
- *intersecția graficului cu axa Oy*: $G_f \cap Oy = \{A(x, y)\}$; $A(x, y) \in Oy \Leftrightarrow x = 0$;
$A(0, y) \in G_f \Leftrightarrow y = f(0) \Leftrightarrow y = b$, adică $G_f \cap Oy = \{A(0, b)\}$.
- *intersecția graficului cu axa Ox*: $G_f \cap Ox = \{B(x, 0)\}$; $B(x, y) \in Ox \Rightarrow y = 0$;
$B(x, 0) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0$, adică $G_f \cap Ox = \left\{B\left(-\frac{b}{a}, 0\right)\right\}$.

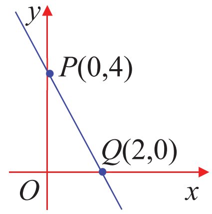
Dreapta AB, cu A și B determinate mai sus, este graficul funcției f.
b) Dacă intersecțiile cu axele nu prezintă interes, atunci identificăm două puncte distincte $M(x_1, y_1)$ și $N(x_2, y_2)$ ale graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.
Alegem, convenabil x_1 și x_2, diferite.
- $M(x_1, y_1) \in G_f \Leftrightarrow M(x_1, ax_1 + b)$; $N(x_2, y_2) \in G_f \Leftrightarrow N(x_2, ax_2 + b)$.

Dreapta MN, cu M și N determinate mai sus, este graficul funcției f.
c) Graficul unei funcții constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = b$ este dreapta paralelă cu Ox, prin punctul $A(0, b)$.

[1] O astfel de reprezentare se numește reprezentarea dreptei prin tăieturi.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 4$.
a) Scrieți mulțimea G_f.
b) Determinați punctele de intersecție ale graficului cu axele de coordonate.
c) Reprezentați grafic funcția f.

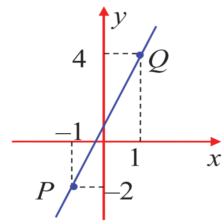


Rezolvare: **a)** $G_f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } y = f(x)\}$ sau $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ sau $G_f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } y = -2x + 4\}$.
b) $G_f \cap Oy = \{P(0, y)\}$ cu $y = f(0)$. Din $f(0) = b$, rezultă $G_f \cap Oy = \{P(0, 4)$;
$G_f \cap Ox = \{Q(x, 0)\}$ cu $f(x) = 0$. Din $-2x + 4 = 0$, rezultă $x = 2$, adică $G_f \cap Ox = \{Q(2, 0)\}$.
c) Graficul funcției este dreapta PQ.

Aplicația 2. Fie $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 3x + 1$.
a) Scrieți mulțimea G_g.
b) Reprezentați grafic funcția g.

Rezolvare. **a)** $G_g = \{(x, g(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ sau $G_g = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}$ și $y = 3x + 1\}$.
b) Pentru reprezentarea graficului sunt suficiente două puncte. Atribuim variabilei x două valori distincte oarecare. Fie $x_1 = -1$ și $x_2 = 1$ aceste valori.

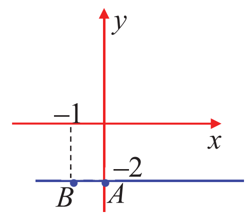
x	-1	1
$y = 3x + 1$	-2	4
puncte (x, y)	$P(-1,-2)$	$Q(1,4)$



Cum $g(-1) = -3 + 1 = -2$ și $g(1) = 3 + 1 = 4$, obținem $P(-1,-2)$ și $Q(1,4)$, puncte care determină dreapta $PQ = G_g$.
Observație. Cele două puncte pot fi găsite și folosind tabelul de valori.

Aplicația 3. Fie $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = -2$.
a) Calculați $h(0)$ și $h(-1)$.
b) Scrieți mulțimea G_h.
c) Reprezentați grafic funcția h.

Soluție. **a)** $h(0) = h(-1) = -2$.
b) $G_h = \{(x, -2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
c) Punctele $A(0, -2)$ și $B(-1, -2)$ determină dreapta $AB = G_h$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Funcțiile următoare sunt de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.
Determinați a și b pentru fiecare funcție:
a) $f(x) = 3x + 2$; **b)** $f(x) = -x + 6$;
c) $f(x) = -4x$; **d)** $f(x) = -1$.

2 Fie funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 3x - 1$.
Calculați $g(-1)$; $g(0)$; $g\left(\frac{1}{3}\right)$; $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3 Fie funcția $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = -x + 2$.
a) Verificați dacă punctele $A(-2; 0)$ și $B(1; 1)$ aparțin graficului funcției h.
b) Reprezentați graficul funcției într-un sistem de axe de coordonate.

4 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$.
a) Determinați punctul de pe grafic care are ordonata 1.
b) Determinați punctul de pe grafic care are abscisa –2.
c) Determinați punctul de pe grafic care are coordonatele egale.
d) Determinați punctul de pe grafic care are ordonata egală cu triplul abscisei.
e) Determinați punctul de pe grafic care are ordonata egală cu opusul abscisei.

5 Stabiliți dacă următoarele puncte sunt coliniare:
a) $A(-2, 1)$, $B(2, 3)$ și $C(-4, 0)$;
b) $A(-3, 2)$, $B(4, -5)$ și $C(2, -1)$;
c) $A(-1, 2)$, $B(1, -2)$ și $C(-2, 3)$;
d) $A(2, -1)$, $B(-1, 5)$ și $C(1, 1)$.

6 Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ ale căror grafice conțin punctele:

a) $A(-1, 2)$ și $B(1, -2)$;
b) $A(-2, 1)$ și $B(2, 3)$;
c) $A(-3, 2)$ și $B(4, -5)$;
d) $A(-1, 5)$ și $B(2, -1)$.

7 Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$.

a) Verificați dacă punctul $M(-1, -3)$ aparține graficului funcției f și reprezentați grafic funcția.
b) Determinați punctele de intersecție ale graficului funcției f cu axele de coordonate.

8 Fie funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = -2x + 4$.

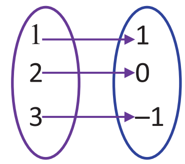
a) Trasați graficul funcției g.
b) Calculați aria triunghiului determinat de graficul funcției g și axele de coordonate.
c) Aflați distanța de la originea sistemului de axe de coordonate la graficul funcției g.

9 Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 2$.

a) Reprezentați, în același sistem de coordonate, graficele funcțiilor f și g.
b) Determinați coordonatele punctului de intersecție dintre graficul funcției f cu graficul funcției g.
c) Calculați $f(1) + f(2) + ... + f(10) + 2[g(1) + g(2) + ... + g(10)]$.

10 Două funcții f și g sunt egale dacă au același domeniu de definiție, același codomeniu și aceeași lege de corespondență ($f(x) = g(x)$ pentru orice x din domeniul de definiție).

a) Fie f funcția dată de diagrama de mai jos și $g: A \to \{-1, 0, 1\}$, $g(x) = -x + 2$. Scrieți elementele mulțimii A, știind că funcțiile f și g sunt egale.



b) Se consideră funcțiile f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 6$ și $g(x) = (a - 3) \cdot x + b - 2$. Calculați a și b, știind că funcțiile f și g sunt egale.

11 Fie funcția $f : \{-3, -1, 0, 1, 2, 5\} \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & x < 0 \\ 2, & 0 \le x < 2 \\ x^2 - x, & x \ge 2 \end{cases}.$$

Calculați $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$.

12 Se consideră funcția $h : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 4\}$, $h(x) = x^2$.

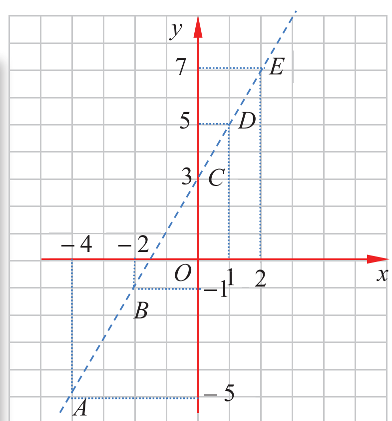
a) Descrieți printr-un tabel funcția.
b) Descrieți printr-o diagramă funcția.
c) Reprezentați grafic funcția.

L2. Reprezentarea grafică a funcțiilor $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și D este un interval de numere reale. Lecturi grafice

Rezolvăm și observăm

1 Se consideră funcțiile:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$,
$g : [-4, -2) \to \mathbb{R}, g(x) = 2x + 3$,
$h : (0, 1) \to \mathbb{R}, h(x) = 2x + 3$,
$u : (2, \infty) \to \mathbb{R}, u(x) = 2x + 3$, iar într-un plan, în care s-a fixat un reper cartezian xOy, se consideră punctele:
$A(-4, -5)$, $B(-2, -1)$, $C(0, 3)$, $D(1, 5)$ și $E(2, 7)$.

a) Reprezentați geometric punctele A, B, C, D și E.
b) Arătați că punctele A, B, C, D și E sunt coliniare.
c) Reprezentați, în același reper cartezian, graficele funcțiilor f, g, h și u.



Rezolvare.

a) Reprezentarea punctelor A, B, C, D și E este realizată în figura de mai jos.

b) Desenul realizat sugerează coliniaritatea punctelor A, B, C, D și E. Deși aceasta nu este o demonstrație, este foarte importantă observarea coliniarității, urmând a fi demonstrată.
O tehnică eficientă pentru a demonstra coliniaritatea punctelor este următoarea: scriem funcția de gradul I al cărei grafic este dreapta determinată de două dintre cele cinci puncte și verificăm dacă punctele rămase aparțin acestei drepte. De exemplu, vom scrie funcția al cărei grafic este dreapta AB și vom verifica dacă punctele C, D și E aparțin graficului acesteia.

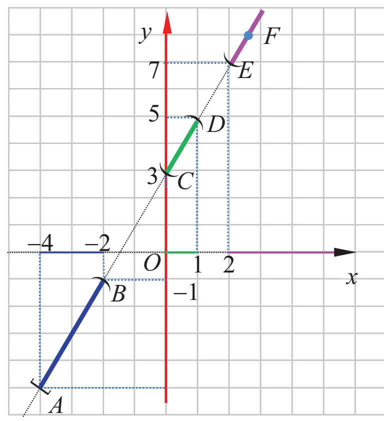
$AB = G_t$, unde $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t(x) = ax + b$.

$A(-4, -5) \in AB \Leftrightarrow -4a + b = -5$;

$B(-2, -1) \in AB \Leftrightarrow -2a + b = -1$.

Obținem sistemul $\begin{cases} -4a + b = -5 \\ -2a + b = -1 \end{cases}$, cu soluția $a = 2$ și $b = 3$.

Rezultă $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t(x) = 2x + 3$, care este egală cu funcția f.



Dreapta AB este reprezentarea grafică a funcției t.
Pentru a verifica dacă un punct oarecare $M(x, y)$ aparține dreptei AB, folosim echivalența $M(x, y) \in AB \Leftrightarrow t(x) = y$.
Astfel, $t(0) = 3$ implică $C(0, 3) \in AB$. Analog, $t(1) = 5$, $t(2) = 7$, adică $D(1, 5)$, $E(2, 7)$ aparțin dreptei AB. În concluzie, punctele A, B, C, D și E sunt puncte coliniare.

c) Pentru a reprezenta grafic funcțiile f, g, h și u, observăm că formula care definește legea de corespondență pentru fiecare dintre cele patru funcții este aceeași, adică $x \to y = 2x + 3$, unde $x \in D$, mulțimea D fiind domeniul de definiție al funcției.
Prin urmare, graficul fiecărei funcții va fi acea porțiune din graficul funcției f, care corespunde domeniului de definiție; un segment sau o semidreaptă, după cum D este un interval mărginit sau nemărginit. În acest context, ne amintim că mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale poate fi privită ca interval deschis și nemărginit $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

- graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dreapta AE;
- graficul funcției $g : [-4, -2) \to \mathbb{R}$ este segmentul închis la stânga, deschis la dreapta $[AB)$;
- graficul funcției $h : (0, 1) \to \mathbb{R}$ este segmentul deschis (CD);
- graficul funcției $u : (2, \infty) \to \mathbb{R}$ este semidreapta deschisă $(EF$.

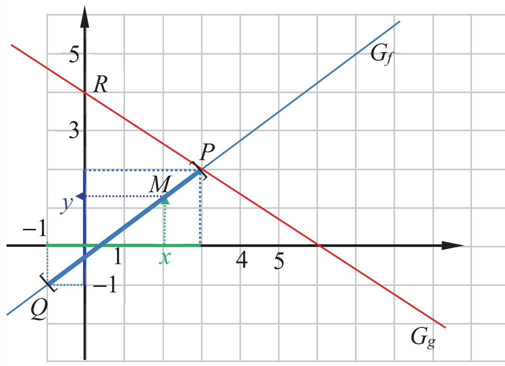
Observație.
Funcțiile g, h, u sunt *restricții* ale funcției f la intervalele $[-4, -2)$, $(0, 1)$, respectiv $(2, \infty)$.
Privim reprezentarea geometrică a graficului unei funcții ca pe un instrument cu ajutorul căruia observăm, „citim”, descoperim, proprietăți ale funcțiilor.
Pentru o funcție $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, prin *lecturi grafice* putem identifica:

1) domeniul de definiție al funcției;
2) valori ale funcției, folosind ordonatele unor puncte ale graficului;
3) elemente ale domeniului, în care funcția are o valoare m (soluții ale ecuației $f(x) = m$);
4) mulțimea valorilor funcției (Imf);
5) elemente ale domeniului în care funcția are valori mai mici sau mai mari decât un număr m (soluții ale inecuației $f(x) < m$, respectiv $f(x) > m$);
6) soluțiile ecuației $f(x) = g(x)$ (abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții), dacă în același reper cartezian sunt reprezentate graficele a două funcții.

2 În figura alăturată, sunt reprezentate grafic trei funcții f, g și h. Graficul funcției f este dreapta PQ, graficul funcției g este dreapta PR, iar graficul funcției h este segmentul închis PQ (punctele P și Q aparțin graficului funcției h).

a) Folosind reprezentarea geometrică a graficelor:
1) stabiliți coordonatele punctelor P, Q și R;
2) aflați imaginea lui 3 prin cele trei funcții;
3) aflați imaginea lui 0 prin funcția g;
4) arătați că -1 este o valoare a funcției h;
5) aflați mulțimea valorilor funcției h.

b) Folosind coordonatele punctelor P, Q și R, precizați, pentru fiecare funcție, domeniul de definiție, codomeniul și legea de corespondență.



Rezolvare:

a) 1) $P(3, 2)$, $Q(-1, -1)$ și $R\ (0, 4)$. 2) $P\in G_f$, $P\in G_g$, $P\in G_h$ și $f(3) = g(3) = h(3) = 2$.
($x = 3$ este soluție a ecuațiilor $f(x) = g(x)$, $f(x) = h(x)$, $g(x) = h(x)$)
3) Din $R\ (0, 4) \in G_g$, rezultă $g(0) = 4$, deci imaginea lui 0 prin funcția g este 4.
4) Din $Q(-1, -1) \in G_h$, rezultă $h\ (-1) = -1$, deci imaginea lui -1 prin funcția h este -1.

5) Reprezentarea grafică a funcției h este segmentul închis PQ cu $P(3,2)$, $Q(-1, -1)$. Observăm, de asemenea că $M(x, y) \in PQ$ implică $y \in [-1, 2]$. Prin urmare, $Imh = [-1, 2]$.

b) Graficul funcției f este dreapta PQ, adică $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

$$\left.\begin{array}{r} P(3,\ 2) \in G_f \\ Q(-1,\ -1) \in G_f \end{array}\right\} \text{ rezultă } \begin{cases} 3a + b = 2 \\ -a + b = -1 \end{cases} \text{ cu soluția } a = \frac{3}{4} \text{ și } b = -\frac{1}{4}.$$

Rezultă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$.

Analog, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\ (x) = mx + n$.

$$\left.\begin{array}{r} P(3,\ 2) \in G_g \\ R(0,\ 4) \in G_g \end{array}\right\} \text{ rezultă } \begin{cases} 3m + n = 2 \\ m \cdot 0 + n = 4 \end{cases} \text{ cu soluția } a = -\frac{2}{3} \text{ și } n = 4.$$

Rezultă $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\ (x) = -\frac{2}{3}x + 4$.

Punctul $M(x, y)$ aparține segmentului închis PQ dacă și numai dacă $x \in [-1,3]$, deci $M(x, y) \in G_h \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in [-1,3]$. Rezultă $h: [-1,3] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ (legea de corespondență are aceeași formulă ca funcția f).

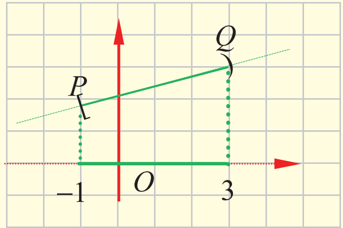
Concluzie.

1) Într-un plan în care s-a fixat un reper cartezian xOy, graficul funcției $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale date, iar D este un interval de forma $(p,\ q)$, $[p,\ q]$, $(p, q]$ sau $[p, q)$, $p, q \in \mathbb{R}$, graficul funcției f, notat cu G_f, este reprezentat printr-un segment PQ, unde $P(p, ap + b)$ și $Q(q, aq + b)$. Fiecare dintre punctele P sau Q aparțin sau nu graficului funcției f, după cum D este interval închis sau deschis la capătul corespunzător.

2) Într-un plan în care s-a fixat un reper cartezian, graficul funcției $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale date, iar D un interval de forma (p, ∞) sau $[p, \infty)$, $p, q \in \mathbb{R}$, graficul funcției f, notat cu G_f, este semidreapta PM, unde $P(p, ap + b)$ și $M(m, am + b)$, unde $m > p$. Punctul P aparține sau nu aparține graficului funcției f, după cum intervalul D este închis la stânga sau deschis la stânga.

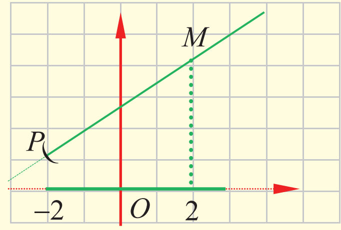
Exemplul 1

Funcția $f : [-1,3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0,25x + 2,25$ este restricție a funcției de gradul I dată de corespondența $x \to y = 0,25x + 2,25$, deci reprezentarea grafică a funcției f este segmentul $[PQ)$, unde $P(-1, 2)$, $Q(3,3)$ și $P \in G_f$, iar $Q \notin G_f$



Exemplul 2

Funcția $g : (-2, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = 0,75x + 2,5$ este restricție a funcției de gradul I dată de corespondența $x \to y = 0,75x + 2,5$, deci reprezentarea grafică a funcției g este semidreapta $(PM$, unde $P(-2, 1)$, $M(2, 4)$ și $P \notin G_g$.



MINITEST La cerințele următoare, alegeți varianta corectă; doar un răspuns este corect.

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$. Punctul care aparține lui G_f este:			
A. $A(1, 2)$	**B.** $B(-1, 2)$	**C.** $C(1, -2)$	**D.** $D(2, 1)$
2. Fie funcția $f : [2 , 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$. Punctul care nu aparține lui G_f este:			
A. $A(2, -1)$	**B.** $B(4, -5)$	**C.** $C(3, -3)$	**D.** $D(1, 2)$
3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 4$. Punctul $A(-1, 1)$ aparține lui G_f dacă valoarea lui a este:			
A. -1	**B.** 1	**C.** 3	**D.** 2

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Se consideră funcțiile:

$f : [2 , 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$

$g : (1, 4) \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 3$

$h : (-4, 1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = 2x + 5$

$u : [-2, 3) \to \mathbb{R}$, $u(x) = -2x + 1$

a) Reprezentați grafic funcțiile.

b) Stabiliți imaginea fiecărei funcții folosind lectura grafică.

2 Fie funcțiile:

$f : [2 , \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$

$g : (-\infty, 4) \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x - 2$

$h : (-4, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = -2x - 5$

$u : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$, $u(x) = -3$

a) Reprezentați grafic funcțiile.

b) Stabiliți imaginea fiecărei funcții folosind lectura grafică.

3 Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (m - 1) \cdot x + 2n + 3$.

a) Determinați m și n astfel încât punctele $A(-1, 1)$ și $B(2, 4)$ să aparțină graficului funcției.

b) Reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe ortogonale.

4 **a)** Determinați funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de forma $f(x) = ax + b$, al cărei grafic trece prin punctele $A\,(5; 6)$ și $B\left(\frac{5}{3}; 4\right)$.

b) Trasați graficul ei și determinați punctele de intersecție ale graficului cu axele de coordonate.

c) Aflați aria cuprinsă între graficul funcției și axele de coordonate.

5 Se dau funcțiile:

$f: [2, 6] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{3x+2}{4}$

g: $[6, 8] \to \mathbb{R},\ g(x) = -\dfrac{3}{2}x + 14$

$h: [2, 8] \to \mathbb{R},\ h(x) = 2.$

Se notează cu A, B și C punctele de intersecție ale graficelor acestor funcții, după cum urmează:
$G_f \cap G_g = \{A\};\ G_g \cap G_h = \{B\};\ G_h \cap G_f = \{C\}$.

a) Reprezentați grafic funcțiile.
b) Prin lectură grafică, aflați coordonatele punctelor A, B și C.
c) Calculați aria triunghiului ABC.
d) Calculați lungimile laturilor triunghiului ABC.

6 Fie funcția $f: A \to \{0, 1, 3, 4\}$, unde $A \subset \mathbb{R}$ și $f(x) = 2x - 1$.

a) Demonstrați că $A \cap \left\{\dfrac{1}{2}; 1; 2; \dfrac{5}{2}\right\} \neq \varnothing$.
b) Scrieți 4 funcții $f: A \to B$.
c) Câte funcții $f: A \to \{0, 1, 3, 4\}$ există? Justificați.

7 Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} |x|, & x \le 2 \\ 7 - 2x, & x > 2 \end{cases}$

a) Calculați $f(-1), f(2), f(a), f(a^2)$, unde $a \in \mathbb{R}$.
b) Rezolvați ecuația $f(x) = 1$.

8 Fie $f: \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + 1$ o funcție.

a) Aflați numărul a, știind că punctul $M(-1, 2)$ aparține graficului funcției f.
b) Pentru $a = -1$, realizați tabelul de valori și reprezentați grafic funcția f.

9 Reprezentările grafice ale funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + b$ conțin punctul $A(-1; 2)$.

a) Aflați numerele a și b și rescrieți legile de corespondență ale celor două funcții.
b) Reprezentați grafic funcțiile f și g în același sistem de coordonate ortogonale xOy.
c) Fie $G_f \cap Oy = \{B\}$, $G_f \cap G_g = \{C\}$, $G_g \cap Ox = \{D\}$.
Calculați aria patrulaterului $BCDO$.

10 **a)** Determinați valoarea lui m pentru care punctul $A(1, m^2) \in G_f$, unde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (m^2 - 2)x + m$.
b) Reprezentați grafic funcția f pentru valoarea lui m determinată la punctul **a)**.

11 **a)** Determinaţi funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de forma $f(x) = ax + b$ al cărei grafic trece prin punctele $A(2; 1)$, $B(6; -1)$.
b) Trasaţi graficul ei şi determinaţi punctele de intersecţie a graficului cu axele de coordonate.
c) Aflaţi aria cuprinsă între graficul funcţiei şi axele de coordonate.

12 Punctul $A(a, 1)$ aparţine graficului funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de relația $f(x) = -x + 0{,}5a$.
Determinaţi valoarea lui a.

13 Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$

b) $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, x < -1 \\ -x + 2,\ x > -1 \end{cases}$$

c) $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = |x| - 1$, unde
$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, -2 \le \frac{2x-1}{3} < 1 \right\}$$

d) $f: \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le \sqrt{3}\} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \sqrt{3} \cdot x - 1$$

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} |x+3|, & x \le -3 \\ x + 1, & x > -3 \end{cases}$

14 Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a \cdot x + b$.

a) Determinaţi valorile lui a și b pentru care punctele $A(2, 0)$ și $B(0, 6)$ aparțin graficului funcției f.
b) Reprezentați grafic funcția f pentru valorile determinate la punctul **a)**.
c) Aflați distanța de la origine la dreapta care reprezintă graficul funcției.
d) Dacă M este simetricul punctului A, iar N este simetricul lui B față de originea sistemului de axe ortogonale, determinați perimetrul și aria patrulaterului $ABMN$.

3 Elemente de statistică

L1. Sortarea și organizarea unor date după criterii de tip dependență funcțională, frecvența absolută

Ne amintim!

Fiind date două mulțim nevide A și B, vom spune că între ele are loc o *dependență funcțională* dacă printr-o regulă oarecare, facem ca *fiecărui element* al mulțimii A să-i corespundă *un singur element* al mulțimii B.

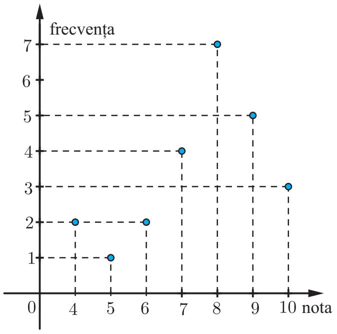
Dependențele funcționale se pot reprezenta prin: *tabele, grafice, diagrame sau formule matematice*

Dacă $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ este mulțimea notelor acordate la un test și $B = \mathbb{N}$, se definește dependența funcțională $x \rightarrow y$, prin care fiecărui x, notă, îi corespunde numărul natural y, al elevilor care au obținut nota x (y se va numi frecvența valorii x).

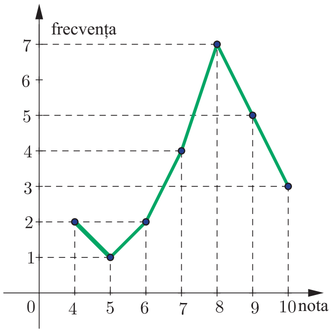
nota	4	5	6	7	8	9	10
frecvența	2	1	2	4	7	5	3

Graficul unei dependențe funcționale de la mulțimea A la mulțimea B este mulțimea perechilor (x, y), $x \in A$, $y \in B$, astfel încât $x \rightarrow y$, adică elementului x, din mulțimea A, îi corespunde elementul y, din mulțimea B.

Exemplu: Graficul dependenței funcționale este mulțimea perechilor (4, 2), (5, 1), (6, 2), (7, 4), (8, 7), (9, 5), (10, 3). *Linia frântă* determinată de segmentele obținute unind, în ordine, punctele graficului, este *poligonul frecvențelor*.



Graficul dependenței funcționale



Poligonul frecvențelor

Mulțimea punctelor de coordonate (4, 2), (5, 1), (6, 2), (7, 4), (8, 7), (9, 5), (10, 3) este reprezentarea geometrică a graficul dependenței date.

Observație. Poligonul frecvențelor ne ajută să comparăm *frecvențele* (numărul aparițiilor unei valori) a două valori diferite, să observăm care dintre aceste valori are *ponderea* mai mare, să estimăm *media* valorilor.

Rezolvăm și observăm

Datele statistice sunt caracterizări ale unor entități reale sau imaginare. Datele pot fi scrise prin simboluri, numere, litere, grupuri de litere, imagini, note muzicale și altele.

Exemplul 1. *Culoarea ochilor* elevilor care participă la cursul de pictură constituie un set de *date* înregistrate într-un tabel:

Elevul	*E* 1	*E* 2	*E* 3	*E* 4	*E* 5	*E* 6	*E* 7	*E* 8
Culoarea ochilor	căprui	albaștri	căprui	verzi	negri	albaștri	negri	căprui

Mulțimea tuturor *unităților* (de orice natură), asupra cărora se realizează un studiu statistic, se numește *populație statistică*.

Trăsătura comună a *unităților* (elevilor), proprietatea de a avea ochii de o anumită culoare, se numește *caracteristică* sau *variabilă*. Aceasta ia *valorile*: albaștri, verzi, căprui, negri.

Exemplul 2. *Notele obținute* de elevii unei clase la un test de cunoștințe determină o *variabilă* notată cu T și un *set de date* corespunzătoare *valorilor* variabilei T.

T: 8, 6, 10, 7, 5, 9, 8, 10, 8, 9, 7, 10, 8, 7, 5, 9, 10, 8, 9, 9, 7, 9, 8, 7, 8

Variabila definită (*caracteristica*) reprezintă nota obținută de elevii clasei la testul de cunoștințe. Această variabilă are valori numerice, numere întregi cuprinse între 5 și 10.
Comparând cele două seturi de date prezentate mai sus, observăm următoarele:

Exemplul 1 prezintă un set de date care face o caracterizare, o apreciere, printr-*o calitate* a ochilor fiecărui elev. Acestea sunt *date calitative* și definesc o *caracteristică* sau o *variabilă calitativă*.

Exemplul 2 prezintă un set de date exprimate prin numere. Acestea sunt *date numerice* sau *cantitative* și definesc o *caracteristică* sau o *variabilă numerică* sau *cantitativă*.

Forma în care sunt prezentate datele este uneori greu de urmărit și de analizat. Ar fi utilă o *grupare* a datelor.

Observație. *Valorile* variabilelor numerice pot fi ordonate, ceea ce aduce avantaje importante în prezentarea sintetică a datelor.

Exemplul 3. Înregistrând înălțimea, în cm, a fiecărui elev dintr-o clasă, obținem setul de date numerice din tabelul alăturat:

159	144	138	147	154	135	159
143	149	149	138	145	145	156
143	154	154	136	149	132	132
156	143	132	152	143	134	155

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Datele din tabelul de mai sus sunt greu de analizat, avem nevoie de o altă scriere mai *organizată* a datelor. Ordonăm crescător valorile *variabilei numerice* dată de *înălțimea* elevilor clasei și alcătuim tabelul alăturat.

132	132	132
134		
135		
136		
138	138	

143	143	143	143
144			
145	145		
147			
149	149	149	

152		
154	154	154
155		
156	156	
159	159	

Am scris, pe coloană, valorile distincte ale înălțimilor, iar pe orizontală, le-am adăugat pe cele care se repetă. Acest tabel ne oferă posibilitatea să răspundem la mai multe întrebări.

Întrebarea	*Răspunsul*
1. Care este diferența dintre cel mai înalt și cel mai scund elev?	159 – 132 = 27 (cm)
2. Care este numărul cel mai mare de elevi care au aceeași înălțime? Ce înălțime au aceștia?	Cel mai mare număr de elevi care au aceeași înălțime este 4. Aceștia au 143 cm.

Valorile variabilei numerice *înălțimea elevilor* sunt numere întregi, cuprinse între 132 și 159. Observând tabelul anterior, constatăm că sunt puțini elevi care au înălțimi egale. Cum diferența de înălțime mai mică de 5 cm nu este relevantă, putem forma *grupe de înălțimi* sau *clase de valori*. Împărțim intervalul [132, 159], de lungime 159 – 132 = 27 (diferența dintre înălțimea maximă și cea minimă) în următoarele intervale: [132, 135), [135, 140), [140, 145), [145, 150), [150, 155), [155, 159], înregistrând înălțimile din fiecare interval în tabelul de mai jos.

Intervalul de înălțime	Înălțimea elevilor clasei a VIII-a	Nr. elevilor care au înălțimea în interval
[132, 135)	132, 132, 132, 134	4
[135, 140)	135, 136, 138, 138	4
[140, 145)	143, 143, 143, 143, 144	5
[145, 150)	145, 145, 147, 149, 149, 149	6
[150, 155)	152, 154, 154, 154	4
[155, 159]	155, 156, 156, 159, 159	5

Remarcă. Valorile aceleiași caracteristici (variabile) au fost înregistrate în tabele diferite. Se poate constata cu ușurință că, dintre ele, cel mai sintetic și cel mai eficient este ultimul tabel.

Definiție. Numărul aparițiilor unei valori a variabilei în setul său de date se numește *frecvența absolută* a acelei valori.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

A realiza *tabelul frecvențelor absolute* înseamnă a înregistra, într-un tabel, dependența funcțională de la mulțimea valorilor caracteristicii, la mulțimea numerelor naturale, prin care fiecărei valori a variabilei i se pune în corespondență frecvența sa absolută.
Revenim la exemplele anterioare, și realizăm tabelul frecvențelor absolute, pentru fiecare.

Exemplul 1. Valorile variabilei sunt culorile ochilor: {albaștri, verzi, căprui, negri}. Frecvențele absolute sunt numere naturale.
Tabelul frecvențelor este alăturat.

Culoarea ochilor	Frecvența absolută
albaștri	2
verzi	1
căprui	3
negri	2

Exemplul 2. Valorile variabilei sunt notele obținute de elevi {5, 6, 7, 8, 9, 10}. Frecvențele absolute sunt numere naturale.
Tabelul frecvențelor este alăturat.

Nota	Frecvența absolută
5	2
6	1
7	5
8	7
9	6
10	4

Exemplul 3. Pe baza tabelului cu intervalele de înălțime a elevilor, obținem frecvențele absolute ale claselor de valori ale înălțimii.

Clasa de înălțime	Frecvența absolută
[132, 135)	5
[136, 140)	3

Clasa de înălțime	Frecvența absolută
[140, 145)	5
[145, 150)	6

Clasa de înălțime	Frecvența absolută
[150, 155)	4
[155, 159]	5

Am văzut că înregistrarea frecvențelor absolute se face prin tabele cu două coloane sau cu două linii. În prima coloană, respectiv linie, se înregistrează valorile variabilei (caracteristicii), iar în cea de-a doua, se înregistrează frecvența absolută corespunzătoare fiecărei valori.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 În vederea unor prelucrări statistice, dirigintele unei clase cu 28 de elevi culege, din catalog, mediile obținute la matematică, în semestrul I. Precizați: populația statistică, volumul (efectivul) populației și caracteristica (variabila) statistică.

2 La o firmă a fost creată o bază de date referitoare la vechimea în muncă și la nivelul studiilor angajaților unui compartiment, după cum urmează:

Angajat	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
Vechime în muncă (ani)	6	8	5	5	6	8	8	7	8	7
Nivelul studiilor	Studii liceale	Studii superioare	Studii superioare	Studii liceale	Studii superioare	Studii superioare	Studii superioare	Studii superioare	Studii superioare	Studii superioare

a) Exprimați în procente cât reprezintă numărul angajaților doar cu studii liceale din numărul celor cu studii superioare.

b) Determinați vechimea în muncă pe care o au cei mai mulți angajați (care are frecvența cea mai mare).

3 Timp de 20 de zile consecutive, s-a înregistrat într-un tabel cantitatea de deșeuri, în kg, rezultată în urma procesului de producție la o fermă.

Ziua	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{14}	z_{15}	z_{16}	z_{17}	z_{18}	z_{19}	z_{20}
Cant.	78	80	76	81	79	80	77	78	81	81	75	83	80	79	78	83	80	80	82	79

a) Grupați datele în clase de valori. Realizați două astfel de grupări.

b) Stabiliți valoarea maximă a cantității de deșeuri care se produce la fermă într-o zi.

4 O fabrică de autoturisme a realizat, în fiecare din ultimii trei ani, o creștere a producției cu 10% față de anul precedent.

a) Știind că în anul 2016 fabrica a produs 100 000 autoturisme, completați tabelul următor:

Anul	2016	2017	2018	2019
Număr autoturisme produse	100 000			

b) Aflați numărul total de autoturisme realizate în ultimii trei ani.

5 La simularea examenului de evaluare națională la disciplina matematică, elevii unei școli au obținut următoarele punctaje (din 100 posibile): 75, 64, 58, 81, 76, 93, 96, 58, 65, 73, 84, 82, 97, 51, 99, 100, 87,100, 64, 86, 99, 53, 77, 62,74, 55, 98, 60, 70, 88.

Grupați datele în clase de valori de lungime 10, completând următorul tabel:

Interval de punctaj	< 50	50 – 59	60 – 69	70 – 79	80 – 89	90 – 100
Număr elevi	0	5				

L2. Reprezentarea geometrică a seriilor statistice

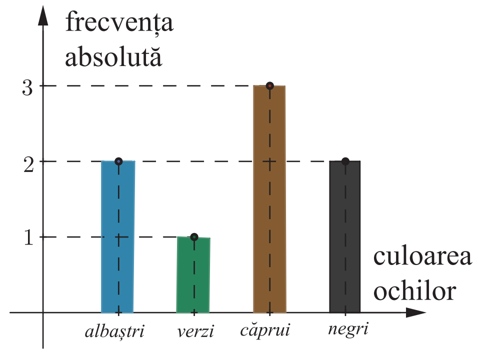
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Pentru a fi cât mai ușor de observat, de comparat și de evaluat dependența funcțională prin care fiecărei *valori a variabilei* i se pune în corespondență *frecvența* sa *absolută*, se reprezintă geometric prin grafice, diagrame, folosind sisteme de axe ortogonale, în plan. Punctele graficului vor avea abscisele date de valorile variabilei și ordonatele date de frecvențele lor absolute.

Ne propunem să realizăm graficele cu bare corespunzătoare exemplelor parcurse în lecția anterioară. Le vom prezenta alături de tabelul frecvențelor, pentru fiecare.

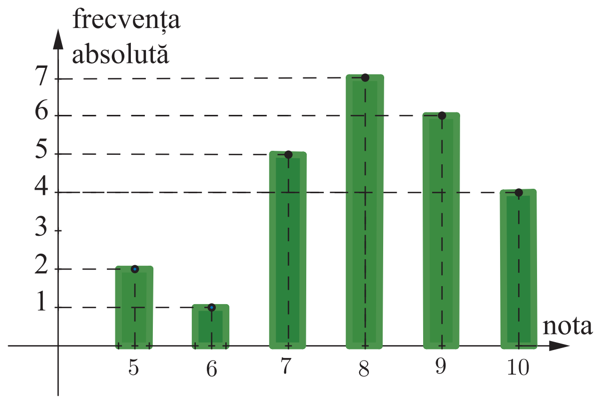
Exemplul 1. Culoarea ochilor elevilor care participă la cercul de pictură

Culoarea ochilor	Frecvența absolută
albaștri	2
verzi	1
căprui	3
negri	2



Exemplul 2. *Notele obținute* de elevii unei clase la un test de cunoștințe

Nota	Frecvența absolută
5	2
6	1
7	5
8	7
9	6
10	4



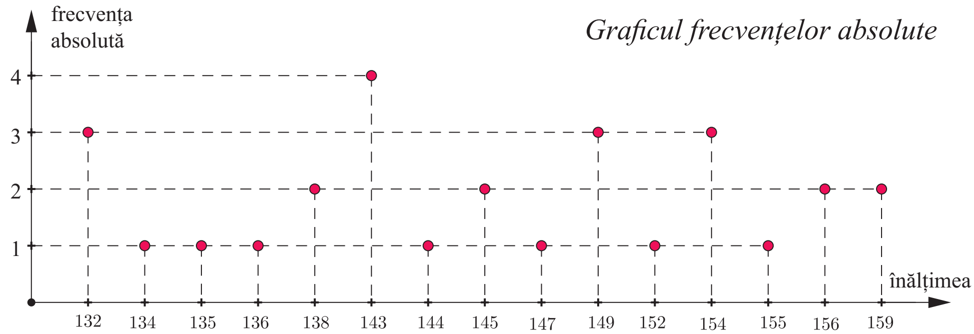
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Exemplul 3. Înălțimea elevilor clasei, graficul frecvenței

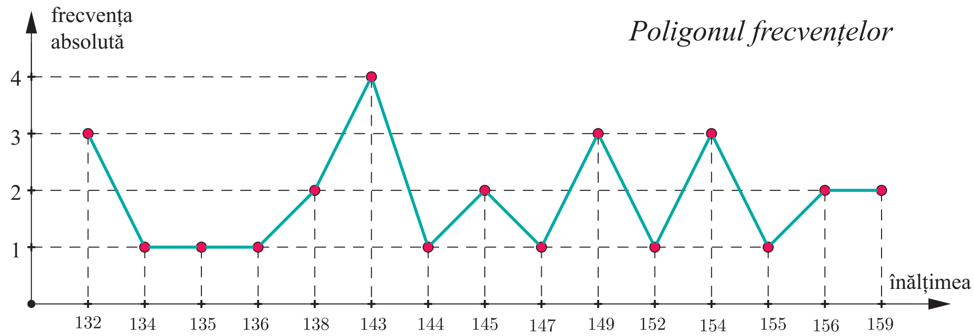
Înălțimea	Frecvența	Înălțimea	Frecvența	Înălțimea	Frecvența
132	3	143	4	152	1
134	1	144	1	154	3
135	1	145	2	155	1
136	1	147	1	156	2
138	2	149	3	159	2

Graficul frecvențelor absolute a înălțimilor elevilor este mulțimea {(132, 3), (134, 1), (135, 1), (136, 1), (138, 2), (143, 4), (144, 1), (145, 2), (147, 1), (149, 3), (152, 1), (154, 3), (155, 1), (156, 2), (159, 2)}, mulțime din care se pot extrage informații cu dificultate.

Vom *reprezenta geometric* acest grafic pentru a avea o imagine mai clară asupra ponderii valorilor înălțimilor.



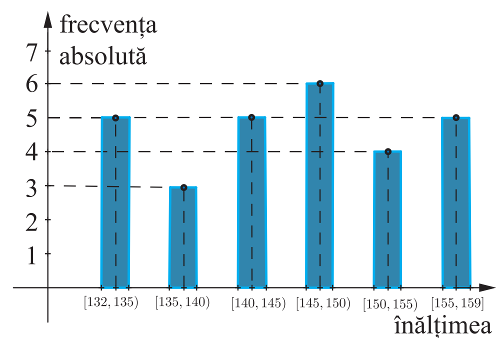
Poligonul frecvențelor oferă o imagine mai clară asupra ponderii valorilor înălțimilor.



Pentru observarea unor aspecte generale, gruparea datelor pe clase de valori oferă posibilitatea realizării unor imagini grafice elocvente.

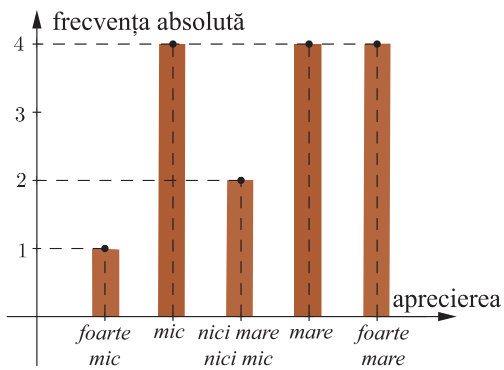
Exemplul 4. Înălțimile celor 28 de elevi, exprimate în cm, grupate pe clase de valori

Clasa de înălțime/ Intervalul	Frecvența
[132, 135)	5
[136, 140)	3
[140, 145)	5
[145, 150)	6
[150, 155)	4
[155, 159]	5



Exemplul 5. *Aprecierea impactului* educațional a unei anumite emisiuni TV asupra *consumatorilor* adolescenți

Aprecierea	Frecvența
Foarte mic	1
Mic	4
Nici mic, nici mare	2
Mare	4
Foarte mare	4



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Datele obținute la sondajul realizat în rândul elevilor de clasa a VIII-a dintr-o școală, cu privire la profilul și specializarea pe care doresc să le urmeze în învățământul liceal sunt date în tabelul următor:

Clasa / Profilul, specializarea	a VIII-a A	a VIII-a B	a VIII-a C	a VIII-a D	Total opțiuni
real, matematică-informatică	6	8	10	8	32
real, științe ale naturii	7	5	8	6	
uman, filologie	3	5	3	8	
sportiv, gimnastică	4	5	-	2	
artistic, arte plastice	4	5	3	-	
număr total al elevilor clasei	24	28	24	24	

a) Copiați pe caiete și completați ultima coloană a tabelului.
b) Stabiliți specializarea dorită de cei mai mulți elevi.
c) Determinați, în procente, numărul elevilor care doresc să urmeze profilul real, matematică-informatică.
d) Realizați un grafic cu bare pentru variabila „Profil, specializare” care să cuprindă elevii claselor a VIII-a și preferințele lor pentru învățământul liceal.
e) Reprezentați geometric graficul corespunzător opțiunilor fiecărei clase.

2 Cinci sportivi participă la o competiție de tir și fiecare trage de trei ori spre o țintă.
Punctajele posibile sunt numerele naturale de la 0 la10, iar rezultatele sportivilor sunt:

Sportiv	S_1			S_2			S_3			S_4			S_5		
Număr puncte	8	9	10	9	9	10	10	9	10	8	8	10	9	8	9

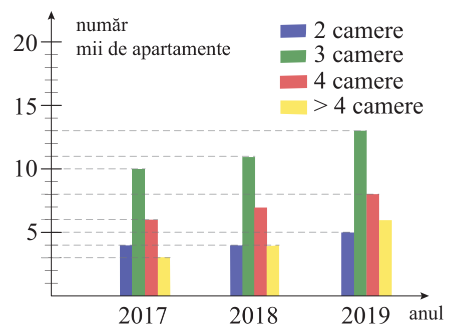
a) Realizați tabelul frecvențelor variabilei care descrie *numărul de puncte obținut la trageri*.
b) Folosind tabelul realizat la subpunctul **a)**, realizați graficul cu bare corespunzător frecvenței numărului de puncte realizate.
c) Stabiliți punctajul pentru tragerea care are frecvența cea mai mare și punctajul pentru tragerea care are frecvența cea mai mică.

3 Tabelul de mai jos clasifică elevii unei clase după tipul de literatură pe care o preferă.

Tip de carte / Elevi	Romane polițiste	Cărți science-fiction	Cărți de aventuri	Total
Fete	1	4		
Băieți	5		3	
Total		10	8	

a) Completați spațiile libere ale tabelului.
b) Indicați tipul de literatură preferat de cele mai multe fete, apoi tipul de literatură preferat de cei mai mulți băieți.
c) Construiți, pe același grafic, poligonul frecvențelor variabilei „Tipul de literatură preferat de fete”, apoi poligonul frecvențelor variabilei „Tipul de literatură preferat de băieți”.

4 Primăria unui oraș a făcut, în fiecare an, câte un studiu cu privire la numărul apartamentelor cu 2 camere, 3 camere, 4 camere și mai mult de 4 camere în care locuiesc cetățenii orașului. Rezultatele sondajului din anii 2017, 2018 și 2019 sunt reprezentate alăturat.
a) Aflați la care tip de apartamente a fost creșterea cea mai mare în 2019 față de 2017.
b) Calculați câte apartamente s-au construit și s-au dat în folosință din 2017 până în 2019.



L3. Indicatorii tendinței centrale

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Statistica studiază fenomene sau procese care se întâlnesc la un număr mare de *unități statistice* și care *variază* ca valoare de la o unitate statistică la alta. Tabelele și reprezentările grafice nu oferă suficiente *indicii* asupra unui fenomen, de cele mai multe ori, fiind necesare caracterizări date de *indicatori* specifici statisticii.
Indicatorii statistici sunt numere reale, care sintetizează o parte din informația conținută de o serie de date, făcând posibilă aprecierea de ansamblu a seriei statistice.
Tendința centrală a unui set de date poate fi exprimată prin valori numerice unice, care oferă o caracterizare sintetică asupra aspectelor tipice, esențiale și stabile ale unei serii de date numerice.
În analiza *variabilelor numerice*, cei mai utilizați indicatori ai *tendinței centrale* sunt: *media aritmetică* simplă, *mediana* și *modul*.

1) *Media aritmetică* a unei variabile reprezintă o valoare în jurul căreia variază datele setului.

a) Pentru o populație cu N unități statistice, se consideră variabila numerică X și numerele reale $x_1, x_2, x_3, ..., x_N$, valorile variabilei X.

Definiția 1. Se numește *media* variabilei numerice X numărul real notat $M(X)$, egal cu media aritmetică a numerelor $x_1, x_2, x_3, ..., x_N$.

Vom scrie $M(X) = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$

b) Pentru o populație cu N unități statistice, se consideră *variabila numerică* X și valorile $x_1, x_2, x_3, ..., x_p$, cu frecvențele (ponderile) $n_1, n_2, n_3, ..., n_p$, astfel încât $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_p = N$.

Definiția 2. *Media variabilei numerice X* este media aritmetică ponderată a valorilor $x_1, x_2, x_3, ..., x_p$, cu ponderile $n_1, n_2, n_3, ..., n_p$.

$$M(X) = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + ... + x_p \cdot n_p}{N}$$

Observație. Ordinea valorilor setului de date nu contează în calculul mediei.

Definiția 3. *Mediana unui set de date numerice* este valoarea care împarte setul de date în două părți egale; jumătate dintre datele numerice au valori mai mici decât mediana, iar jumătate dintre ele au valori mai mari decât aceasta.

2) *Mediana* unui set de date reprezintă valoarea centrală a setului, după *ordonarea acestuia*.

Notăm $Me(X)$.
a) Pentru variabila numerică X cu valorile ordonate: $x_1 < x_2 < ... < x_k < x_{k+1} < x_{k+2} < ... < x_{2k+1}$ avem $Me(x) = x_{k+1}$
b) Pentru variabila numerică X cu valorile ordonate:

$x_1 < x_2 < ... < x_k < x_{k+1} < ... < x_{2k}$ avem $Me(x) = \dfrac{(x_k + x_{k+1})}{2}$

Pentru a calcula mediana unui set de date, se ordonează datele, apoi se determină valoarea din mijloc a variabilei. Atunci când datele sunt grupate în clase de frecvență, *clasa* care conține *mediana* se numește *clasă mediană*.

Aplicația 1. Salariile angajaților unei secții comerciale, în luna ianuarie, sunt date prin următorul set de valori numerice:

S: 2500, 2400, 2100, 2500, 9990, 1980, 1990, 2230, 2780, 2450, 2124.

a) Calculați media salariilor angajaților, pentru luna ianuarie.

b) Ordonați crescător salariile angajaților și determinați mediana variabilei.

c) Alcătuiți setul de date DIF 1, corespunzător diferenței dintre salariul real al fiecărui angajat și media salariilor

d) Determinați *mediana* setului de date DIF 1.

e) Alcătuiți setul de date DIF 2, corespunzător diferenței dintre salariul real al fiecărui angajat și valoarea mediană, apoi calculați *mediana* noului set de date.

f) Stabiliți care dintre indicatorii centrali calculați oferă o caracterizare mai realistă.

Soluție. **a)** Folosim formula mediei aritmetice și M(S) = **3004** lei.

b) S: $\underbrace{1980, 1990, 2100, 2124, 2230}_{\text{cinci valori}}$, **2400**, $\underbrace{2450, 2500, 2500, 2780, 9990}_{\text{cinci valori}}$.

Dintre cele 11 valori ale variabilei, 5 sunt mai mici decât 2400 și 5 sunt mai marii decât 2400. Rezultă că *mediana* este 2400. Vom scrie Me(S) = 2400.

c) Calculăm diferența dintre salariul real și media M(S) = 3004 pentru fiecare angajat și obținem setul de valori

DIF 1: –504, –604, –904, –504, +6986, –1024, –1014, –774, –224, –554, –880.

d) Ordonând valorile, obținem

DIF 1: –1024, –1014, –904, –880, –774, –604, –554, –504 ,–504, –224, +6986.

e) Calculăm diferența dintre salariul real și media Me(S) = 2400 pentru fiecare angajat și obținem setul de valori

DIF 2: –420, –410, –300, –276, –170, 0, 50, 100, 100, 380, 7590.

f) Setul **DIF 1** ne arată că, dintre cei 11 angajați ai secției, 10 au salariul mai mic decât media, cu valori între 224 de lei și 1024 de lei, doar unul având salariul mai mare cu 6986 decât media.

Rezultă că *media* nu este un indicator fidel al mărimii salariilor angajaților secției. Aceasta este puternic influențată de valorile extreme, cea mai mică (1980 lei) și cea mai mare (9990 lei).

Observație. În unele cercetări statistice, valorile extreme se elimină din calculul mediei.

Setul **DIF 2** ne arată că, din cei 11 angajați, 5 au salarii mai mici decât mediana, cu diferențe de la 170 lei la 420 lei, 4 au salarii mai mari, cu diferențe între 50 de lei și 380 lei, iar un salariu este cu 7590 mai mare ca mediana.

Deducem că *mediana* caracterizează valoarea salariului angajaților secției mai realist decât media.

Definiția 4. *Modul* sau valoarea modală a unei variabile este valoarea corespunzătoare celei mai mari frecvențe.

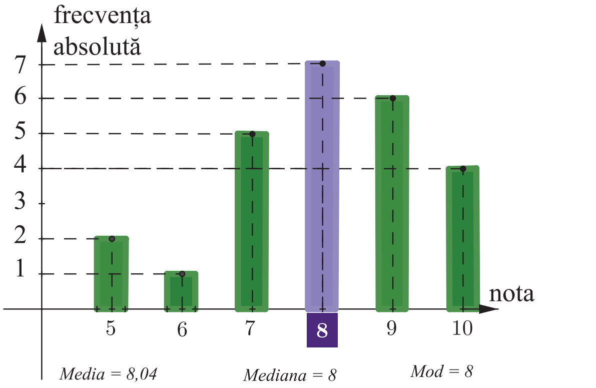
Observație. Modul nu este neapărat unic; există seturi de date cu mai multe valori (sau clase de valori) care corespund frecvenței maxime. Pentru variabila X, notăm modul ei cu Mo(X).

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 2. *Notele obținute* de elevii unei clase la un test de cunoștințe sunt date de tabelul de mai jos. Determinați *valorile indicatorilor centrali* și interpretați geometric aceste valori.

Nota	Frecvența absolută
5	2
6	1
7	5
8	7
9	6
10	4

Mod



Notăm „Nota” variabila descrisă. Obținem $M(Nota) = \dfrac{5\cdot 2+6\cdot 1+7\cdot 5+8\cdot 7+9\cdot 6+10\cdot 4}{25} = 8{,}04$.

$Me(Nota) = 8$, pentru că 12 elevi (2 + 1 + 5 + 4) au obținut nota cel mult egală cu 8 și alți 12 elevi (2 + 6 + 4) au obținut cel puțin nota 8.

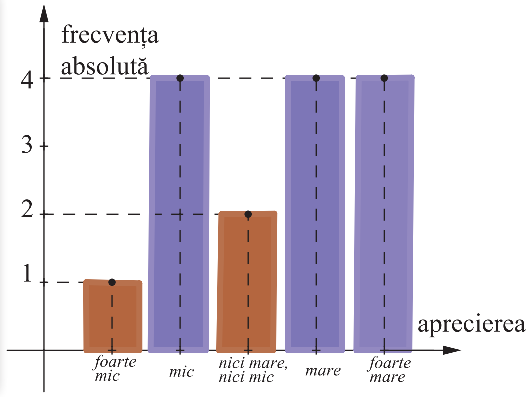
$Mo(Nota) = 8$, pentru că valoarea 8 a variabilei are frecvența maximă, ceea ce ne spune că, la acest test, nota cea mai întâlnită (dominantă) este nota 8.

Observație. Valorile celor trei indicatori sunt atât de apropiate întrucât distribuția este destul de echilibrată, iar diferența dintre valorile extreme este relativ mică.

Observație. Indicatorul de poziție *mod* poate fi folosit și pentru *variabile calitative.*

Aplicația 3. Aprecierea impactului educațional a unei anumite emisiuni TV asupra *consumatorilor* adolescenți este dată în graficul alăturat. Determinați *modul* variabilei date.

Aprecierea	Frecvența
Foarte mic	1
Mic	4
Nici mic, nici mare	2
Mare	4
Foarte mare	4



Frecvența maximă (4) este caracteristică pentru valorile *mic*, *mare* și *foarte mare*. Este interesant să observăm că am întâlnit o variabilă *multimodală* (frecvența maximă caracterizează mai multe valori ale variabilei). Făcând o grupare pe clase de valori, obținem următoarele rezultate.

Clasa de valori	*mic sau foarte mic*	*nici mare, nici mic*	*mare sau foarte mare*
Frecvența	5	2	8

Obținem două informații esențiale: 1. Asupra celor mai mulți adolescenți (mai mult de jumătate), emisiunea a avut un impact mare sau foarte mare. 2. Doar doi dintre repondenți au rămas indiferenți la emisiunea în legătură cu care s-a administrat chestionarul.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Înălțimile elevilor de clasa a VIII-a dintr-o școală, exprimate prin numere întregi în cm, au fost grupate pe intervale de lungime 5. Seria statistică „înălțimea”, pe intervale de înălțimi, este următoarea:

Înălțimea	[155-160)	[160-165)	[165-170)	[170-175)	[175-180)	[180-185)
Număr de elevi	5	11	16	20	8	3
Valoarea centrală	157					
Justificarea răspunsului dat	Acest interval conține număr impar (5) de valori: 155, 156, 157, 158, 159, cea din mijloc fiind valoarea centrală.					

a) Copiați tabelul pe caiete, apoi completați valoarea centrală a înălțimii pentru fiecare interval, *folosind modelul dat.*

b) Folosind valorile centrale obținute, efectuați calculele necesare și demonstrați că înălțimea medie a grupului de elevi este M = 168,90 cm.

2 În vederea analizării productivității într-o întreprindere, s-a ales un eșantion format din 30 de salariați. Datele referitoare la producția de piese realizate în ziua precedentă de către cei 30 de salariați sunt redate în tabelul următor:

Producția (grupe număr piese)	[20-35)	[35-50)	[50-65)	[65-80)	[80-95)
Număr salariați	2	8	9	7	4

a) Calculați numărul mediu de piese produse de un muncitor.

b) Stabiliți intervalul de piese produse pentru care numărul salariaților are frecvența cea mai mare.

3 Calculați media variabilei statistice „Nota la test” a seriei statistice din următorul tabel:

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Frecvența	1	4	5	7	13	14	6

4 Pentru măsurători de laborator, se alege următorul set de greutăți: 4 g, 3 g, 2 g, 5 g, 1 g, 10 g, 15 g. Ordonați crescător valorile greutăților și determinați *valoarea mediană* a seriei statistice. Comparați *valoarea medianei* greutăților cu *valoarea medie* a greutăților.

5 Pe un raft se află patru sticle diferite cu apă minerală, având capacitatea 300 mℓ, 500 mℓ, 1 ℓ și 1,5 ℓ.

a) Determinați valoarea mediană (Me) a seriei statistice corespunzătoare capacităților.

b) Calculați diferența dintre Me și capacitatea medie (M) a sticlelor de pe raft.

6 Pentru cinci tipuri diferite de ciocolată, vândute într-o cofetărie, s-au încasat sume egale de bani pentru fiecare fel de ciocolată, suma totală fiind de *S* lei.

a) Determinați prețul mediu de vânzare a unei bucăți de ciocolată, cunoscând prețurile pentru fiecare tip de ciocolată.

Produsul Felul de ciocolată	A	B	C	D	E
Prețul, în lei/bucată	1	8	5	2	4

b) Dacă suma totală încasată este *S* = 1000 lei, determinați numărul de bucăți de ciocolată vândută din fiecare fel și alcătuiți tabelul frecvenței vânzărilor tipurilor de ciocolată.

7 Situația salariilor primite de angajații unei firme pentru produsele realizate într-o lună este prezentată în tabelul următor:

Salariul lunar încasat, pe grupe, exprimat în (lei)	Număr angajați	Valoarea centrală a grupei de salariu	Justificare
[2350, 2450)	5	2399,5	Această clasă conține valorile: 2350,2351, ..., 2449, adică un număr par (100) de valori. Valorile din mijloc sunt 2399 și 2400, iar media lor este 2399,5.
[2450, 2550)	15		
[2550, 2650)	35		
[2650, 2750)	30		
[2750, 2850)	10		
[2850, 2950)	5		
Total	100		

a) Copiați tabelul pe caiete și completați coloana „Valoarea centrală” pentru fiecare clasă de valori (grupă de salariu), folosind modelul dat.

b) Aproximând toate salariile unei grupe cu valoarea ei centrală, aflați salariul mediu obținut de angajații firmei.

c) Calculați mediana și modul seriei statistice „valoarea centrală a salariul lunar încasat”.

Observație. Calculul medianei unei variabile grupate se face după formule ce depășesc nivelul manualului de față.

8 Consumul de energie electrică în luna aprilie a anului 2019 pentru locatarii unui bloc cu 25 de apartamente a fost exprimat prin numere naturale, în kW. Datele grupate sunt următoarele:

Consum de energie electrică (kW/h)	Număr apartamente	Valoare centrală	Consum de energie *estimat*, pe clase
70 – 79 kW	2		
80 – 89 kW	3		
90 – 99 kW	10	94,5	945
100 – 109 kW	5		
110 – 119 kW	3		
120 – 129 kW	2		
Total	25		

a) Copiați tabelul pe caiete și completați valoarea centrală a fiecărei clase de consum.

b) Calculați consumul mediu de energie electrică estimat că ar reveni fiecărui apartament.

c) Folosind rezultatele obținute, estimați următoarele:

1. Numărul apartamentelor care au consum mai mic decât media.
2. Numărul apartamentelor care au consum mai mare decât media.
3. Reprezentați geometric, prin bare, seria statistică, pe clase de consum și evidențiați clasa modală.

TEST DE AUTOEVALUARE

Se acordă 10 puncte din oficiu

Subiectul I. *Alegeți litera care indică varianta corectă de răspuns; doar un răspuns este corect.*

5p **1.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 1$. Valoarea funcției f pentru $x = -1$ este:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5p **2.** Fie funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax - 1$. Dacă punctul $A(-1, 1)$ aparţine graficului funcției g, atunci valoarea lui a este:

A. 3 B. –2 C. –3 D. 2

5p **3.** Mulțimea valorilor funcției $h : \{-2; -1; 0; 1; 2\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = |x| - 1$, este:

A. $\{-2; -1; 0\}$ B. $\{-1; 0; 1; 2\}$ C. $\{-1; 0; 1\}$ D. $\{0; 1; 2\}$

5p **4.** Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 3$ şi $f(a) + f(b) + f(c) = 10$, atunci suma $a + b + c$ este:

A. –1 B. 0 C. 1 D. 3

5p **5.** Graficul funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3 - x$ intersectează axa Ox în punctul:

A. $A(-3, 0)$ B. $B(0, -3)$ C. $C(0, 3)$ D. $D(3, 0)$

5p **6.** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 2$. Dacă $f(a + b) = a - b$, atunci valoarea lui a este:

A. 1 B. –1 C. 2 D. –2

5p **7.** Punctul de intersecţie a graficelor funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 2$ are coordonatele:

A. $(1, -1)$ B. $(1, 1)$ C. $(-1, 1)$ D. $(-1, -1)$

5p **8.** Într-un sistem de axe ortogonale xOy, în care unitatea de măsură este centimetrul, se reprezintă grafic funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$. Aria triunghiului determinat de graficul funcției şi axele de coordonate este:

A. 2 cm² B. 4 cm² C. 1 cm² D. 3 cm²

Subiectul al II-lea. *La problemele următoare, se cer rezolvări complete.*

1. Fie funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\frac{1}{2}x$, iar d şi d' sunt reprezentările lor grafice.

5p **a)** Aflaţi $u \in \mathbb{R}$, ştiind că $A(2, u) \in d$.

5p **b)** Aflaţi $v \in \mathbb{R}$, ştiind că $B(2, v) \in d'$.

10p **c)** Aflaţi coordonatele punctului de intersecţie a dreptelor d şi d'.

10p **d)** Demonstraţi că $d \perp d'$.

2. O fabrică de autoturisme a realizat în fiecare din anii 2017, 2018, 2019 o creștere a producției cu 5% față de anul precedent.

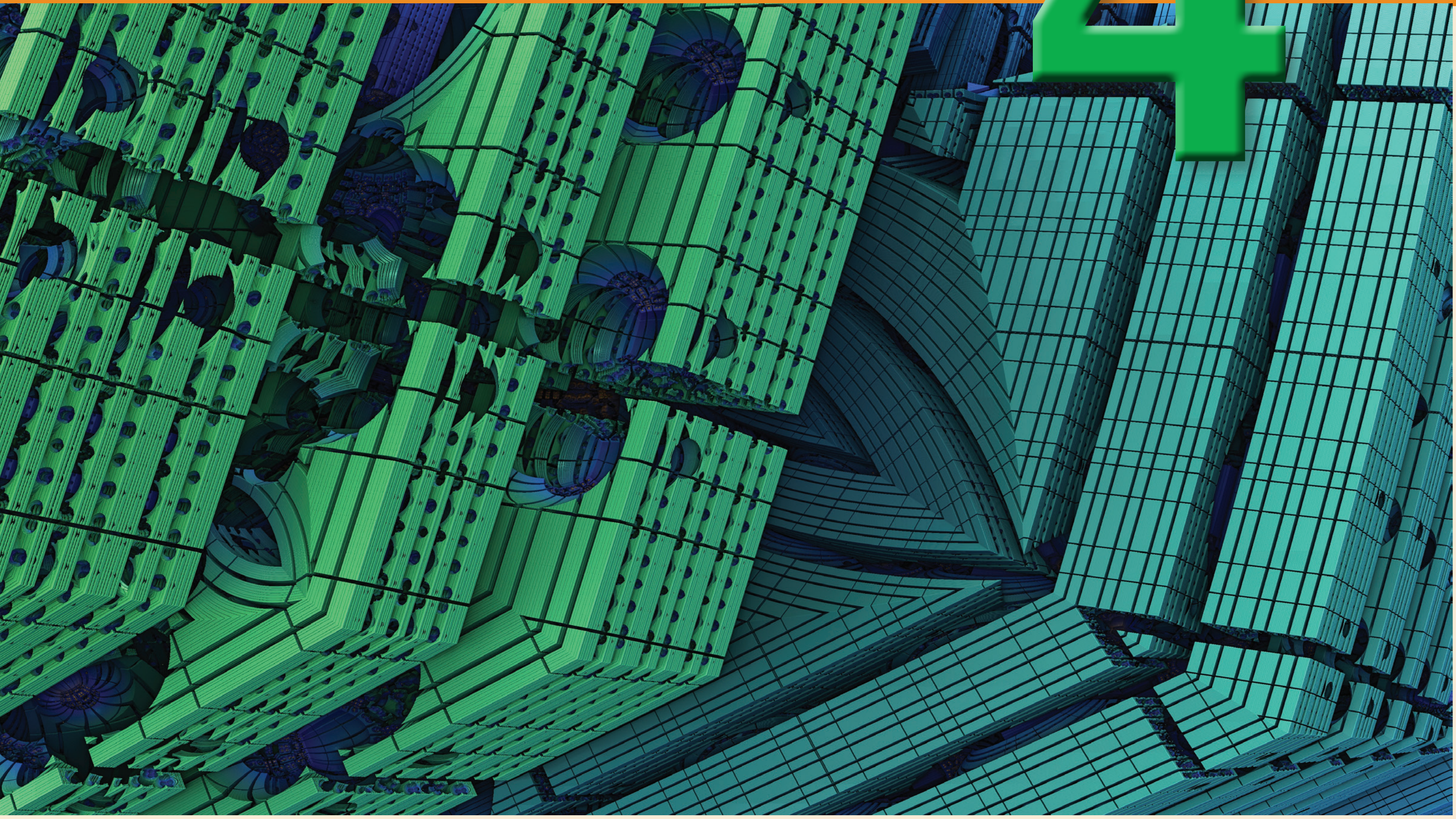
10p **a)** Știind că în anul 2017 fabrica a produs 2 520 000 de autoturisme, completați tabelul următor:

Anul	2016	2017	2018	2019
Număr autoturisme produse		2 520 000		

5p **b)** Aflați numărul total de autoturisme realizate în ultimii patru ani.

5p **c)** Reprezentați printr-o diagramă, considerând unități de măsură potrivite, datele din tabelul obținut.

CAPITOLUL 4



Elemente ale geometriei în spațiu

1 Puncte, drepte, plane
2 Corpuri geometrice
3 Paralelism în spațiu
4 Perpendicularitate
5 Proiecții ortogonale în spațiu
6 Teorema celor trei perpendiculare

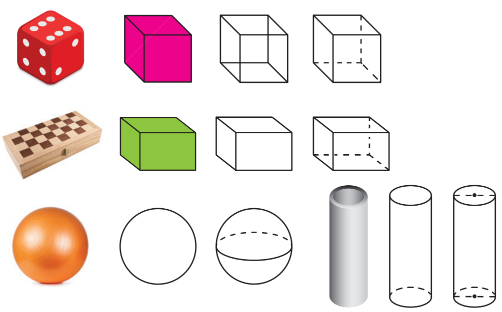
Competențe specifice

1.4 2.4 3.4 4.4 5.4 6.4

1 Puncte, drepte, plane

L1. Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei

Geometria este ramura matematicii care se ocupă cu studiul proprietăților *figurilor* și *corpurilor geometrice*. Pentru a reprezenta *bidimensional* un obiect tridimensional, să observăm și să comparăm imaginile următoare.



Remarcăm importanța convențiilor de realizare a desenelor pentru reprezentarea formelor geometrice. Imaginația ne ajută să privim obiectele desenate, pe care le vom „vedea” corpuri geometrice, din poziții diferite, să înțelegem și elementele care se „ascund” privirii. Convențiile de realizare a reprezentărilor prin configurații geometrice vor fi precizate pentru fiecare tip de corpuri geometrice.

Între imaginile alăturate, recunoaștem corpurile geometrice cubul și paralelipipedul, întâlnite în clasa a V-a, în procesul de reprezentare prin desene plane. Observăm, de asemenea, obiecte cu *contur rotund*, din viața cotidiană. Putem formula următoarele concluzii generale:

Pentru reprezentarea printr-un desen bidimensional a unui obiect din realitate, parcurgem următoarele etape:

1) Observăm obiectul și stabilim corpul geometric (sau corpurile geometrice) care îl caracterizează.
2) Stabilim conturul exterior, vizibil din poziția pe care o dorim.
3) Realizăm reprezentarea corectă a configurației geometrice, folosind convenții care au la origine imaginea intuitivă.

Observații: reprezentare prin desene a corpurilor din spațiu.

1) Dreptunghiul se reprezintă printr-un paralelogram. Unghiurile *drepte* se pot reprezenta, în funcție de poziția din care este „văzut” corpul, prin *unghiuri proprii*, de orice mărime.
2) Cercurile se pot reprezenta ca cercuri propriu-zise sau ca cercuri „turtite”.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

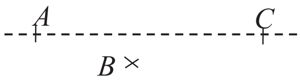
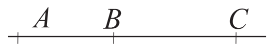
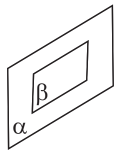
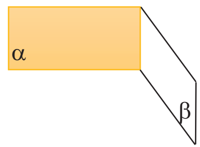
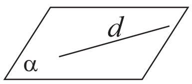
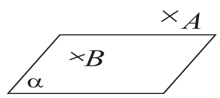
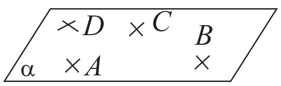
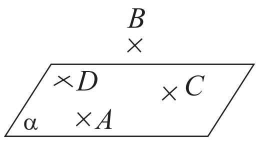
Punctul, *dreapta* și *planul* sunt noțiunile fundamentale ale geometriei în spațiu. Acestea sunt reprezentate în plan prin desene, folosind convenții de notare.
În fiecare plan din *spațiu* rămân adevărate axiomele geometriei plane și, de asemenea, toate rezultatele din geometria plană.

Geometria în *spațiu* adaugă următoarele *afirmații* pe care le vom considera adevărate (*axiome*):

A.1. În spațiu, prin orice două puncte distincte trece o singură dreaptă. Orice dreaptă conține cel puțin două puncte distincte.
A.2. Prin trei puncte necoliniare trece un singur plan; orice plan conține cel puțin trei puncte necoliniare.
A.3. În spațiu, există cel puțin patru puncte necoplanare (adică nu există un plan care să le conțină).
A.4. Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci intersecția lor este o dreaptă.
A.5. Printr-un punct exterior unei drepte, trece o singură dreaptă paralelă cu aceasta.

Observație. Figurile geometrice spațiale pot fi reprezentate într-un desen bidimensional numai în mod convențional.

Aplicația 1. Analizați imaginile următoare, identificați puncte, drepte, plane. Observați notațiile folosite și modul în care se citesc reprezentările în plan ale elementelor spațiului.

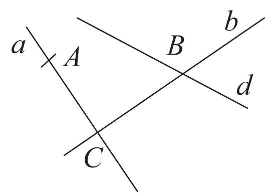
Convenții de reprezentare și de notare	Convenții de citire	Convenții de reprezentare și de notare	Convenții de citire
A B $\times$ $\times$ $A \neq B$	Punctele A și B sunt *distincte.*	D C $\times$ $C = D$	Punctele C și D sunt *identice.*
 $B \notin AC$	Punctele A, B, C sunt *necoliniare.*	 $AB = BC$ sau $A \in BC$	Punctele A, B, C sunt *coliniare.*
 $\alpha = \beta$	Planele α și β sunt *identice.*	 $\alpha \neq \beta$	Planele α și β sunt *distincte.*
 $d \subset \alpha$	Dreapta d este *inclusă* în planul α.	 $A \notin \alpha$ $B \in \alpha$	Punctul A este *exterior* planului α. Punctul B *aparține* planului α.
 $A, B, C, D \in \alpha$	Punctele A, B, C, D sunt *coplanare.*	 $A, C, D \in \alpha$ și $B \notin \alpha$	Punctele A, B, C, D sunt *necoplanare.*

Vom spune că una sau mai multe condiții *determină* o figură geometrică dacă această figură este *singura* care verifică *toate* condițiile date.

Enunțul „Prin orice două puncte distincte trece o singură dreaptă“ poate fi reformulat astfel: „*Orice două puncte distincte determină o dreaptă*“.

Exemplu: În figura alăturată au loc:

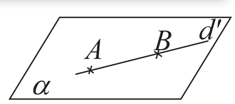
a) $A \notin d$, $A \notin b$;
b) B *nu determină* dreapta d (există mai multe drepte care trec prin B);
c) punctele B și C *determină* dreapta b;
d) punctele A și C *determină* dreapta a;
e) punctele A, B, C sunt necoliniare.



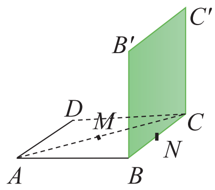
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Teorema 1: Dacă două puncte distincte ale unei drepte aparțin unui plan, atunci această dreaptă este inclusă în plan.

Demonstrație: Fie d o dreaptă și α un plan care conține două puncte distincte A și B ale dreptei d. Din $A, B \in \alpha$, rezultă (aplicând în α una din axiomele geometriei plane) că există $d' \subset \alpha$ astfel încât $A, B \in d'$. Cum prin două puncte distincte trece o singură dreaptă, deducem că d și d' sunt drepte identice. Dar $d' \subset \alpha$, deci $d \subset \alpha$.



Aplicația 2. În figura alăturată, pătratele $ABCD$ și $BCC'B'$ sunt situate în plane diferite. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AC, respectiv BC. Demonstrați că:
a) dreapta $B'M$ nu este inclusă în planul pătratului $ABCD$;
b) dreapta $B'N$ este inclusă în planul pătratului $BCC'B'$;
c) dreapta MN este inclusă în planul triunghiului ABC;
d) dreapta AN nu este inclusă în planul pătratului $BCC'B'$.



Soluție. **a)** Notăm cu α planul pătratului $ABCD$ și cu α' planul pătratului $BCC'B'$. Atunci, $B' \notin \alpha$, deci $B'M \not\subset \alpha$. **b)** $BC \subset \alpha'$, $N \in BC$, deci $N \in \alpha'$. Cum $B' \in \alpha'$ și $N \neq B'$ dreapta $B'N$ are două puncte distincte în planul α', al pătratului $BCC'B'$, deci este inclusă în acest plan. **c)** Planul triunghiului ABC este α. Din $M \in AC$ și $AC \subset \alpha$, rezultă $M \in \alpha$. La fel, $N \in BC$ și $BC \subset \alpha$, rezultă $N \in \alpha$. În concluzie, $MN \subset \alpha$. **d)** $A \notin \alpha'$, deci $A'N \not\subset \alpha'$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Fie α un plan și A, B, C puncte distincte astfel încât $A, B \in \alpha$, iar $C \notin \alpha$.
a) Realizați un desen care să corespundă enunțului.
b) Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:
p_1: „$AB \subset \alpha$“ p_2: „$AC \subset \alpha$“ p_3: „$BC \not\subset \alpha$“.

2 Reprezentați printr-un desen, un plan α, punctele $A, B \in \alpha$, $C \notin \alpha$ și dreapta $AD \subset \alpha$.

3 Reprezentați printr-un desen:
a) planul α, punctele $A, B \in \alpha$ și dreapta AB;
b) planul β, punctul $C \in \beta$, punctul $D \notin \beta$ și dreapta CD;
c) planul γ, punctele $E, F \in \gamma$, punctul $G \notin \gamma$ și triunghiul EFG;
d) planul δ, punctele M, N exterioare planului δ, de aceeași parte a acestuia, și dreapta MN.

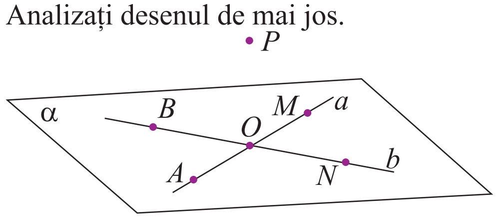
4 Identificați în mediul înconjurător o suprafață plană. Găsiți două puncte și două drepte conținute în acest plan. Reprezentați printr-un desen configurația descrisă. Notați corespunzător figurile reprezentate.

5 Desenați configurația geometrică formată din punctele distincte A, B, C, dreapta d și planul β astfel încât: $A, B \in \beta$, $C \notin \beta$, $d \subset \beta$, $A \in d$, $B \notin d$.

6 Stabiliți valoarea de adevăr a fiecărei propoziții. În cazul propozițiilor adevărate, precizați raționamentul realizat, iar în cazul propozițiilor false, justificați răspunsul printr-un *contraexemplu.*
a) „Orice două puncte distincte aparțin unei drepte.”
b) „Pentru orice dreaptă d, există un singur plan α care o conține.”
c) „Orice plan β conține cel puțin o dreaptă.”
d) „Dacă trei puncte sunt situate într-un plan, atunci ele sunt coliniare.”

7 Se consideră punctele distincte A, B, C, D. Stabiliți numărul dreptelor determinate de aceste puncte, în următoarele situații:
a) A, B și C sunt coliniare.
b) Oricare trei dintre puncte sunt necoliniare.
c) Punctele A, B, C, D sunt necoplanare.

8 Analizați desenul de mai jos.



Dacă $AO = OM$ și $BO = ON$, precizați valoarea de adevăr a propozițiilor.

a) $A \in a$	**e)** $\{A, B, O\} \subset \alpha$
b) $N \notin b$	**f)** $b \subset \alpha$
c) $AM = a$	**g)** $a \cap b = \{O\}$
d) $PO \subset \alpha$	**h)** $MN \cap AB = \varnothing$

9 Fie α un plan, iar M, N, P, Q puncte în spațiu, astfel încât $MN \subset \alpha$, $P \in \alpha$ și $PQ \not\subset \alpha$.
a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.
b) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
p_1: „$Q \in \alpha$“ p_2: „$M \in \alpha$ și $N \in \alpha$“;
p_3: „$M \in \alpha$ și $Q \notin \alpha$“

L2. Determinarea planului, relații între puncte, drepte și plane

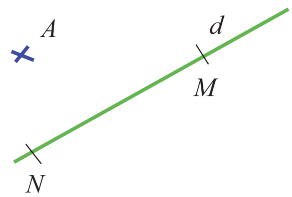
Axioma A2 „Prin trei puncte necoliniare trece un singur plan“ se reformulează astfel:

„Orice trei puncte necoliniare determină un plan.“

Planul determinat de punctele necoliniare A, B, C se notează (ABC).

Pe baza axiomelor, folosind rezultate demonstrate în geometria plană, vom obține rezultate specifice geometriei în spațiu. Căutăm alte elemente care ar putea *determina* un plan.

Teorema 1: O dreaptă d și un punct A, exterior acesteia, determină un plan.



Planul determinat de dreapta d și punctul A se notează (d, A).

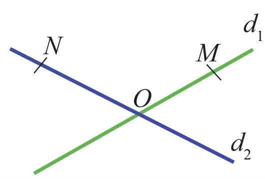
Demonstrație: Vom demonstra că *există un singur* plan α care să conțină dreapta d și punctul A.
Fie M și $N \in d$, distincte. Cum $A \notin d \Rightarrow M, N$ și A sunt necoliniare.
Folosind axioma de determinare a planului, (A.2), obținem că M, N, A determină un plan α. Dreapta determinată de M și N este inclusă în α și $MN = d$, deci $d \subset \alpha$ și $A \in \alpha$.
Rămâne să demonstrăm că α este singurul (*unicul*) plan care verifică aceste condiții. Presupunem, prin reducere la absurd, că există $\beta \neq \alpha$, un plan care conține punctul A și dreapta d, astfel încât $d \subset \beta$ și $A \in \beta$. Vom obține $M, N \in \beta$ și $A \in \beta$. Cum M, N, A sunt necoliniare și sunt conținute în planul β, rezultă că β este planul (unic) determinat de cele trei puncte, adică $\beta = \alpha$. Am ajuns la o contradicție, deci presupunerea a fost falsă și α este unicul plan care conține dreapta d și punctul A, exterior dreptei d.

Aplicația 1. Punctele A, B, C, D sunt necoplanare. Decideți, argumentat, dacă există trei dintre acestea care să fie coliniare.

Soluție. Presupunem că punctele A, B și C sunt coliniare. Atunci, planele (AB, D), (AC, D) și (BC, D) coincid, adică punctele A, B, C, D sunt coplanare, contradicție cu ipoteza. Același raționament se realizează și pentru celelalte triplete de puncte.

Concluzie. Dacă patru puncte sunt necoplanare, atunci oricare *trei dintre acestea sunt necoliniare*.

Teorema 2: Două drepte concurente d_1 și d_2 determină un plan.



Planul determinat de dreptele d_1 și d_2 se va nota (d_1, d_2).
Demonstrația o găsiți în manualul digital.

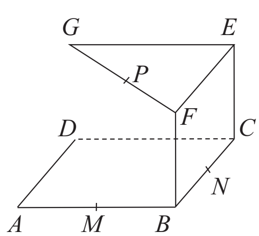
Aplicația 2. Dreptunghiul $ABCD$, pătratul $BCEF$ și triunghiul EFG din desenul de mai jos sunt situate în plane diferite, două câte două. Punctele M, N, P sunt mijloacele segmentelor AB, BC respectiv GF.

a) Identificați, în configurația dată, trei perechi de forma (d, T) care determină plane, altele decât cele trei, date în ipoteză, unde d este o dreaptă și T este un punct.

b) Identificați, în configurația dată, patru perechi de drepte (d_1, d_2), care determină plane, altele decât cele trei, date în ipoteză.

c) Grupați propozițiile următoare în funcție de valoarea lor de adevăr.

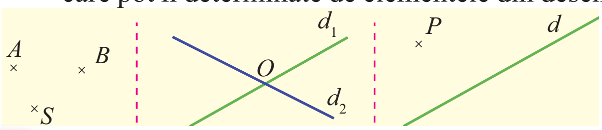
p_1: „Dreapta AB aparține unui singur plan.”
p_2: „Dreapta MN și punctul P determină un plan.”
p_3: „Planele (ABC) și (ADC) coincid.”
p_4: „Dreptele AB și BF determină planul (AMF).”



Soluție. **a)** (AB, P), (AB, E), (AB, G). Se mai pot găsi și alte plane, folosind celelalte drepte reprezentate în configurație. **b)** Dreptele AB și BF sunt concurente, deci determină planul (ABF). În același fel, găsim planele (BFG), (DCE) și (CEG). **c)** Propoziția p_1 este falsă, pentru că există mai multe plane care includ dreapta AB; de exemplu, (ABC) și (ABF). Propozițiile p_2 este adevărată, pentru că punctul P este exterior dreptei MN, deci dreapta MN și punctul P determină un plan. Propoziția p_3 este adevărată, pentru că punctele A, B, C și D sunt vârfurile unui dreptunghi, deci aparțin aceluiași plan. Propoziția p_4 este adevărată, deoarece AB și BF sunt drepte concurente, deci determină un plan.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Pentru fiecare din configurațiile următoare, scrieți notații corespunzătoare pentru planele care pot fi determinate de elementele din desen.



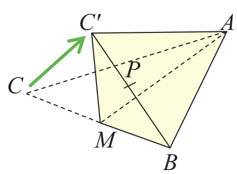
2 Fie A, B, C, D puncte distincte, dintre care trei sunt coliniare. Stabiliți numărul planelor determinate de oricare trei dintre aceste puncte.

3 Fie A, B, C și D puncte necoplanare.
a) Demonstrați că punctele nu pot fi coliniare.
b) Stabiliți numărul planelor determinate de oricare trei dintre puncte și notați aceste plane.

4 Desenați pe carton, folosind instrumentele geometrice, un triunghi echilateral. Reprezentați o linie mijlocie. Decupați triunghiul și îndoiți-l după linia mijlocie. Reprezentați printr-un desen configurația spațială obținută.

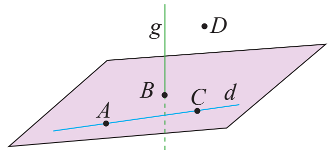
5 Se consideră dreptele concurente a, b și punctele distincte A, B, astfel încât $A \in a$ și $B \in b$.
a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.
b) Demonstrați că mijlocul segmentului AB aparține planului (a, b).
c) Demonstrați că orice punct al dreptei AB aparține planului (a, b).

6 Triunghiul echilateral ABC are latura de 6 cm. Se îndoaie după mediana AM, ca în figura de mai jos.



a) Precizați natura triunghiului ABC'.
b) Dacă $BC' = 4\sqrt{2}$ cm, iar P este mijlocul segmentului BC', determinați lungimea segmentului AP.

7 În figura de mai jos sunt reprezentate punctele A, B, C și D, dreptele d, g și planul α.



Realizați pe caiete un tabel precum cel de mai jos și completați, folosind modelul dat.

Punctul ... aparține dreptei ...	Punctul ... nu aparține dreptei ...	Punctul ... aparține planului ...
$A \in d$	$A \notin g$	$A \in (g, A)$
Punctul ... nu aparține planului ...	**Dreapta ... este inclusă în planul ...**	**Dreapta ... nu este inclusă în planul ...**
$A \notin (BCD)$	$AB \subset \alpha$	$AB \not\subset (BCD)$

8 **a)** Demonstrați că, dacă dreptele distincte a, b, c se intersectează două câte două în puncte distincte, atunci cele trei drepte sunt coplanare.
b) Fie a, b, c trei drepte distincte, necoplanare. Dacă $a \cap b \neq \varnothing$, $a \cap c \neq \varnothing$ și $b \cap c \neq \varnothing$, demonstrați că a, b, c au un punct comun.

9 Se consideră punctele A, B, C, D astfel încât $A, B, C \in \alpha$, $D \notin \alpha$ și $B \notin (DAC)$.
a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.
b) Demonstrați că punctul A este exterior planului (BCD).
c) Determinați numărul planelor determinate de punctele A, B, C, D.
d) Demonstrați că planele (DAB) și (DBC) sunt distincte.

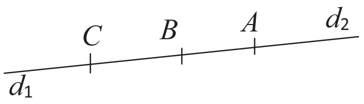
L3. Pozițiile relative a două drepte în spațiu

Ne amintim!

În plan, două drepte pot fi *identice, concurente* sau *paralele*.

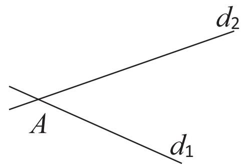
1) Dreptele $AB = d_1$ și $AC = d_2$ sunt *identice* sau *suprapuse*.

$d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2$



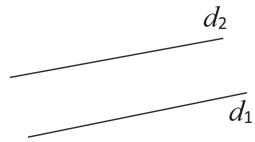
2) Dreptele d_1 și d_2 sunt *secante* sau *concurente*.

$d_1 \cap d_2 = \{A\}$



3) Dreptele d_1 și d_2 sunt *paralele*.

$d_1 \cap d_2 = \varnothing$

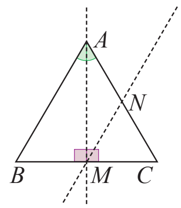


Exemple.

1) Dreapta suport a bisectoarei unghiului A, a triunghiului echilateral ABC și mediatoarea AM a laturii BC a aceluiași triunghi sunt drepte identice.

2) Dreptele AB și AC sunt concurente în punctul A.

3) Dacă N este mijlocul laturii AC, atunci dreptele MN și AB sunt paralele.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

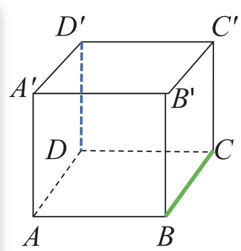
Aplicația 1. În desenul alăturat, este reprezentat un cub.

a) Identificați patru perechi de drepte distincte, *coplanare*.

b) Pentru dreptele găsite la subpunctul **a)**, precizați dacă sunt *concurente* sau *paralele*.

c) Decideți dacă dreptele DD' și BC sunt *coplanare* sau *necoplanare*. Justificați răspunsul dat.

d) Identificați, în mediul înconjurător, perechi de drepte *coplanare* și perechi de drepte *necoplanare*.



Soluție. **a)** (AB, BC), (AB, BB') sunt perechi de laturi alăturate ale unui pătrat, iar $(BC, B'C')$, (BB', CC') sunt perechi de laturi opuse ale unui pătrat. Toate sunt perechi de drepte *coplanare*.

b) Perechi de drepte *concurente:* (AB, BC), (AB, BB') , iar $(BC, B'C')$, (BB', CC') sunt perechi de drepte *paralele*.

c) Punctul $D' \notin (BCD)$. Presupunând că DD' și BC ar fi coplanare, ar rezulta că punctul D' s-ar afla în planul (BCD).

Concluzie. *În spațiu, există drepte necoplanare*.

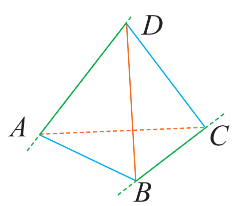
Aplicația 2. Pentru orice patru puncte necoplanare, se formează trei perechi de drepte necoplanare.

Demonstrație. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Punctele A, B, C sunt necoliniare și determină un plan $\alpha = (ABC)$.

Presupunem, prin reducere la absurd, că dreptele AD și BC sunt coplanare.

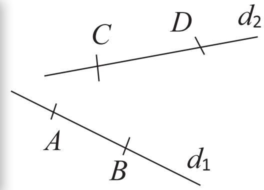
Cum $BC \subset \alpha$ și $A \in \alpha$, obținem $D \in \alpha$, adică A, B, C, D sunt coplanare, contradicție.

Concluzie: Punctele necoplanare A, B, C, D determină perechile de drepte necoplanare (AD, BC), (AB, CD), (AC, BD).



Aplicația 3. Demonstrați că dacă dreptele d_1 și d_2 sunt necoplanare, atunci $d_1 \cap d_2 = \varnothing$.

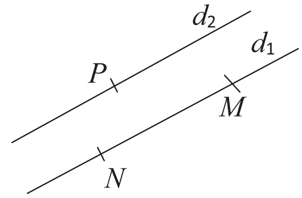
Demonstrație: Fie d_1 și d_2 drepte necoplanare. Presupunem că $d_1 \cap d_2 \neq \varnothing$, deci există $M \in d_1$ și $M \in d_2$. Atunci, dreptele d_1 și d_2 sunt identice sau concurente, deci sunt coplanare, contradicție. Rezultă că intersecția celor două drepte este mulțimea vidă.



Definiție. În spațiu, două drepte d_1 și d_2 sunt *paralele* dacă sunt coplanare și nu au niciun punct comun.

Axioma paralelelor (A.5). Printr-un punct A, exterior unei drepte d, trece o singură dreaptă d', paralelă cu dreapta d.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni



Teoremă: Două drepte paralele d_1 și d_2 determină un plan.
Planul determinat de dreptele d_1 și d_2 se va nota (d_1, d_2).

Demonstrație: Dreptele d_1 și d_2 sunt paralele, deci coplanare. Prin urmare, există un plan α astfel încât $d_1 \subset \alpha$ și $d_2 \subset \alpha$. Vom demonstra că α este *unicul* plan care le include.

Presupunem că există un plan $\beta \neq \alpha$ astfel încât $d_1 \subset \beta$ și $d_2 \subset \beta$. Din $d_1 \subset \beta$ și $d_2 \subset \beta$, rezultă că există punctele M, N distincte pe dreapta d_1 și punctul P, pe dreapta d_2. Cum $d_1 \parallel d_2$, rezultă că M, N și P sunt necoliniare, deci sunt conținute de un plan unic, adică $(MNP) = \beta = \alpha$, contradicție. Presupunerea a fost falsă și planul α este singurul care conține dreptele concurente d_1 și d_2.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Punctele A, B, C sunt coliniare, în această ordine, iar $D \notin AB$.
a) Scrieți două perechi de drepte identice.
b) Scrieți două perechi de drepte distincte.

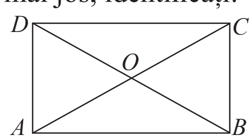
2 Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped.
a) Scrieți două perechi de drepte necoplanare.
b) Scrieți două perechi de drepte coplanare.

3 Copiați pe caiete, stabiliți valoarea de adevăr a fiecărei propoziții.
a) Două drepte care nu au puncte comune sunt paralele.
b) Orice două drepte determină un plan.
c) Două drepte pot fi: identice, paralele, concurente sau necoplanare.
d) Dacă două drepte nu sunt paralele, atunci ele sunt concurente.

4 Fie a și b două drepte necoplanare și punctul C, astfel încât $C \notin a$, $C \notin b$. Arătați că există o dreaptă d care conține punctul C și este coplanară atât cu dreapta a cât și cu dreapta b.

5 În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, iar E este un punct exterior planului trapezului. Folosind unul dintre cuvintele *coplanare* sau *necoplanare*, copiați pe caiete și completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.
a) Dreptele EA și BC sunt ... .
b) Dreptele EB și CD sunt ... .
c) Dreptele AD și BC sunt ... .

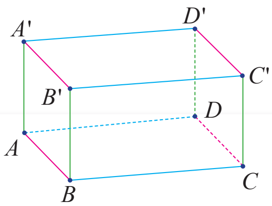
6 În planul dreptunghiului $ABCD$, reprezentat în figura de mai jos, identificați:



a) perechi de *drepte concurente*;
b) perechi de *drepte paralele*.

7 Paralelogramele $ABCD$ și $ABMN$ sunt în plane diferite. Precizați poziția dreptelor:
a) MN și AB; **b)** MN și CD; **c)** AM și BN;
d) MN și BD; **e)** CM și DN;
f) MO și CP, unde O și P sunt mijloacele segmentelor BN, respectiv BD.

L4. Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan



Rezolvăm și observăm

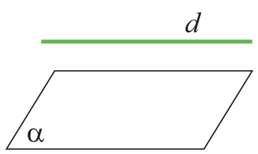
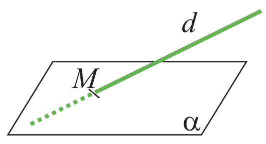
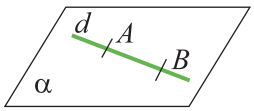
AP Confecționați din carton un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ sau realizați, din bețe de plastic, scheletul aceluiași paralelipiped. Observați paralelipipedul dreptunghic, consultați-vă cu partenerul de echipă și stabiliți, pentru fiecare dintre dreptele AA', $A'B'$, $A'C'$, AD', AB, $A'C$, BB', $A'D$, $B'C'$, BD, *numărul de puncte comune* cu planul (ABC). Grupați aceste drepte după numărul de puncte comune cu planul (ABC).

Soluție. $AA' \cap (ABC) = \{A\}$, $A'B' \cap (ABC) = \varnothing$, $A'C' \cap (ABC) = \varnothing$, $AD' \cap (ABC) = \{A\}$, $AB \cap (ABC) = AB$, $A'C \cap (ABC) = \{C\}$, $BB' \cap (ABC) = \{B\}$, $A'D \cap (ABC) = \{D\}$, $B'C'' \cap (ABC) = \varnothing$, $BD \cap (ABC) = BD$.

0 puncte: $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$;
1 punct: AA', AD', $A'C$, BB', $A'D$
o infinitate de puncte: AB, BD

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Concluzie. Dacă α este un plan și d este o dreaptă oarecare, sunt posibile următoarele situații:

numărul de puncte comune	1. Dreapta și planul nu au niciun punct comun.	2. Dreapta și planul au un singur punct comun.	3. Dreapta și planul au o infinitate de puncte comune.
poziția dreptei față de plan	Dreapta d este *paralelă* cu planul α.	Dreapta d este *secantă* planului α.	Dreapta d este inclusă în planul α.
notația	$d \parallel \alpha$	$d \cap \alpha = \{M\}$	$d \subset \alpha$
reprezentarea bidimensională			

Folosind afirmația „Dacă o dreaptă d are două puncte într-un plan α, atunci $d \subset \alpha$”, deducem:

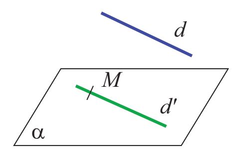
1. Pentru a demonstra că o dreaptă d este inclusă într-un plan α, este suficient să identificăm două puncte distincte ale dreptei, care aparțin planului.

2. Pentru a demonstra că o dreaptă este secantă unui plan, este suficient să identificăm două puncte A și B, ale dreptei d, astfel încât $A \in \alpha$ și $B \notin \alpha$.

Considerăm planul α, dreapta d, paralelă cu α și dreapta $d' \subset \alpha$. Rezultă imediat că dreptele d și d' sunt *drepte paralele* sau *drepte necoplanare*.

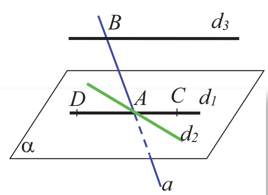
Concluzie. Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, atunci aceasta este sau paralelă sau necoplanară cu orice dreaptă inclusă în acel plan.

Ne propunem să stabilim cum demonstrăm că o dreaptă este paralelă cu un plan.



Teoremă. O dreaptă d este paralelă cu un plan α dacă și numai dacă d nu este inclusă în α și d este paralelă cu o dreaptă d' conținută în acest plan.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni



Aplicația 1. Analizând desenul alăturat, determinați valoarea de adevăr a propozițiilor știind că $d_1 \parallel d_3$, $d_1 \subset \alpha$, $d_2 \subset \alpha$, $d_3 \not\subset \alpha$, $\{B\} = d_3 \cap a$, $\{A\} = d_1 \cap d_2 \cap a$, $C \in d_1$.

a) „Dreapta a este secantă planului α.“

b) „Dreapta d_2 este secantă planului (d_1, d_3).“

c) „Planele (d_1, d_3) și (a, d_3) sunt diferite.“

d) „Dreapta d_3 este paralelă cu planul α.“

e) „Dreapta d_2 este inclusă în planul (d_1, d_3).“

f) „Punctele A, B, C, D sunt necoplanare.“

Soluție. **a)** Punctele A și B sunt situate pe dreapta a, $A \in \alpha$ și $B \notin \alpha$, deci propoziția „Dreapta a este secantă planului α" este adevărată.

b) Din $d_1 \parallel d_3$, știind că $d_1 \subset \alpha$, rezultă $d_3 \parallel \alpha$. Cum $d_2 \subset \alpha$, rezultă că dreptele d_2 și d_3 nu au puncte comune. Prin punctul A, exterior dreptei d_3, singura paralelă la d_3 este d_1, adică dreptele d_2 și d_3 sunt necoplanare. Cum $A \in (d_1, d_3)$, $A \in d_2$ și d_2 nu este inclusă în (d_1, d_3), rezultă că propoziția „Dreapta d_2 este secantă planului (d_1, d_3)" este adevărată.

c) Dreapta a, conține punctele distincte A și B în planul (d_1, d_3), deci $a \subset (d_1, d_3)$, adică propoziția „Planele (d_1, d_3) și (a, d_3) sunt diferite" este falsă.

d) Din $d_1 \parallel d_3$, știind că $d_1 \subset \alpha$, rezultă $d_3 \parallel \alpha$ și propoziția „Dreapta d_3 este paralelă cu planul α" este adevărată.

e) Propoziția „Dreapta d_2 este inclusă în planul (d_1, d_3)" este falsă.

f) $A, D, C \in d_1$, $B \in d_3$. Cum d_1, d_3 sunt paralele, deci coplanare, rezultă $A, B, C, D \in (d_1, d_3)$ și propoziția „Punctele A, B, C, D sunt necoplanare" este falsă.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Folosind bețe de plastic și o suprafață plană, ilustrați împreună cu colegul/colega de bancă pozițiile relative ale unei drepte față de un plan.

2 Identificați în mediul înconjurător:
a) drepte concurente, incluse într-un plan;
b) drepte paralele, incluse într-un plan;
c) o dreaptă paralelă cu un plan;
d) o dreaptă secantă unui plan.

3 Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare.
a) Reprezentați printr-un desen cele patru puncte, apoi uniți-le două câte două.
b) Precizați poziția fiecăreia dintre dreptele AB, AC, AD față de planul (BCD).
c) Precizați poziția dreptelor AB, BC, BD față de planul (ACD).

4 **a)** Reprezentați printr-un desen, un plan α, o dreaptă $d \subset \alpha$, un punct $A \notin \alpha$ și o dreaptă $d' \parallel d$, astfel încât $A \in d'$, apoi determinați poziția dreptei d' față de planul α.
b) Reprezentați printr-un desen un plan α, o dreaptă $d \not\subset \alpha$ cu proprietatea $d \cap \alpha \neq \emptyset$, apoi determinați poziția dreptei d față de planul α.

5 Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Identificați:
a) drepte paralele cu planul (ABB');
b) drepte paralele cu planul (ABC');
c) drepte incluse în planul (ADD');
d) drepte secante planului (ADD');
e) drepte secante planului (ACC').

6 Fie α un plan și A, B, C puncte distincte, astfel încât $A, B \in \alpha$, $C \notin \alpha$. Dacă M este mijlocul segmentului AC și N este mijlocul segmentului BC, determinați poziția dreptei MN față de planul α.

7 Paralelogramul $ABCD$ și triunghiul ABE sunt situate în plane diferite. Se știe că $M \in [AE]$, $N \in [BE]$ și $\frac{ME}{MA} = \frac{NE}{NB}$.
a) Stabiliți poziția dreptei CD față de planul (ABE).
b) Determinați poziția dreptei MN față de planul (ABC).

8 Triunghiul ABC are latura AB inclusă în planul α, iar $C \notin \alpha$. Fie $M \in [AC]$, $N \in [BC]$ astfel încât $MC = 2MA$ și $NB = 2NC$. Determinați poziția dreptei MN față de planul α.

9 Trapezul $ABCD$, cu bazele AB, CD și paralelogramul $BCEF$ sunt situate în plane diferite. Stabiliți:
a) poziția dreptei AD față de planul (BEF);
b) poziția dreptei BF față de planul (DCE);
c) poziția dreptei EF față de planul (ABC);
d) poziția dreptei O_1O_2 față de planul (ABF), unde $\{O_1\} = AC \cap BD$, iar $\{O_2\} = BE \cap CF$.

10 Punctele A, B, C, D sunt necoplanare, $BD = CD$, iar semidreptele DE și DF sunt bisectoarele unghiurilor ADB, respectiv ADC, $E \in AB$ și $F \in AC$. Determinați:
a) poziția dreptei EF față de planul (BCD)
b) poziția dreptei BC față de planul (DEF).

11 Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și M, N puncte ale laturii AB, astfel încât $AM = MN = NB$. Știind că D este un punct exterior planului (ABC), demonstrați că:
a) $GM \parallel (ACD)$; **b)** $BC \parallel (DGN)$.

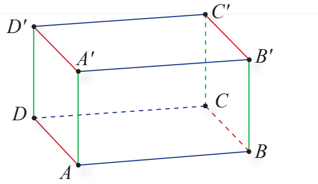
L5. Poziții relative a două plane. Plane paralele: descriere și reprezentare

Ne amintim!

1) *Axioma de determinare a planului* (A.2). Trei puncte necoliniare determină un plan.
2) *Axioma de intersecție a planelor* (A.4). Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci intersecția lor este o dreaptă.

Consecințe: 1) Dacă două plane au trei puncte necoliniare comune, atunci acestea coincid.
2) Există plane care au o dreaptă comună.

Rezolvăm și observăm



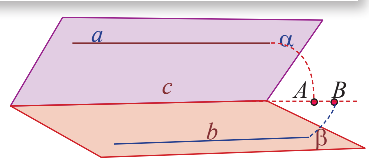
AP Realizați, din bețe de plastic, un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ (scheletul acestuia).
Observați paralelipipedul, consultați-vă cu partenerul de echipă și stabiliți, pentru fiecare dintre planele (DAA'), $(AA'B')$, (ADC), (ABD), $(A'B'C')$, $(A'B'D')$, *mulțimea punctelor comune* cu planul (ABC). Determinați sau intuiți mulțimea punctelor de intersecție cu planul (ABC) pentru fiecare dintre muchiile și diagonalele paralelipipedului dreptunghic. (Diagonalele paralelipipedului sunt segmentele AC', BD', CA', DB'.)

Soluție. Dreapta AD este inclusă atât în (DAA') cât și în (ABC). Cele două plane nu sunt identice deoarece punctul B, de exemplu, aparține planului (ABC), dar nu aparține lui (DAA'). Conform axiomei 2), intersecția lor este *o dreaptă*, deci $(DAA') \cap (ABC) = AD$. Analog, $(AA'B') \cap (ABC) = AB$.
Planul (ADC) conține punctul B, deci (ADC) și (ABC) conțin trei puncte necoliniare comune. Conform consecinței 1) cele două plane *sunt identice*. Analog, planele (ABD) și (ABC) coincid.
Intuitiv, planele $(A'B'C')$ și (ABC) nu au *niciun punct comun*. $(A'B'D')$ coincide cu $(A'B'C')$, prin urmare $(A'B'D')$ și (ABC) nu au puncte comune. Să stabilim câteva din intersecțiile muchiilor sau ale diagonalelor: $A'B' \cap (ABC) = \varnothing$, $A'C' \cap (ABC) = \varnothing$, $AD' \cap (ABC) = \{A\}$, $AB \cap (ABC) = AB$, $A'C \cap (ABC) = \{C\}$, $BB' \cap (ABC) = \{B\}$, $A'D \cap (ABC) = \{D\}$, $B'C' \cap (ABC) = \varnothing$, $BD \cap (ABC) = BD$.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Activitatea de mai sus ne sugerează că există plane care nu au puncte comune. Pentru a demonstra această afirmație, vom rezolva, mai întâi, următoarea aplicație.

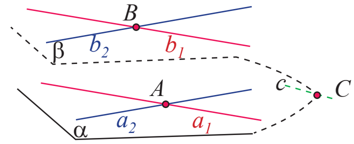
Teorema 1: (Teorema acoperișului) Planele secante α și β care conțin respectiv dreptele paralele a și b se intersectează după o dreaptă paralelă cu acestea.



Ipoteză: $a \parallel b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ și $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$, $\alpha \neq \beta$.
Concluzie: $\alpha \cap \beta = c$ cu $a \parallel b \parallel c$.

Demonstrație. Cazurile $a = c$ sau $b = c$ implică evident concluzia teoremei. Vom considera $a \neq c$ și $b \neq c$. Avem $\alpha = (a, c)$ și $\beta = (b, c)$. Pentru dreptele a și c distincte, incluse în α, sunt posibile situațiile: $a \parallel c$ sau $a \cap c = \{A\}$, iar pentru dreptele b și c distincte, incluse în β, putem avea: $b \parallel c$ sau $b \cap c = \{B\}$.
Dacă $a \parallel c$ și $b \cap c = \{B\}$, atunci prin B, am dus două drepte distincte b și c paralele cu a, contradicție cu axioma paralelelor (A.5).
Dacă $a \cap c = \{A\}$ și $b \parallel c$, atunci, prin A, am dus două drepte distincte a și c paralele cu b, din nou contradicție cu axioma paralelelor (A.5). Dacă $a \cap c = \{A\}$ și $b \cap c = \{B\}$ putem avea situația $A = B$, care ar implica $a \cap b = \{A\}$ și se contrazice ipoteza sau $A \neq B$. În acest caz, $c = AB$ deci $c \subset (a, b)$ sau $\alpha = (a, c) = (a, b) = (b, c) = \beta$, contradicție cu ipoteza.
În concluzie, $a \parallel c$ și $b \parallel c$.

Teorema 2: În spațiu, *există plane paralele*.



Demonstrație: Vom considera α un plan în care, prin punctul $A \in \alpha$, ducem două drepte distincte $a_1 \subset \alpha$ și $a_2 \subset \alpha$, $a_1 \cap a_2 = \{A\}$. Considerând punctul B, exterior planului α, construim, conform axiomei paralelelor, dreptele b_1 și b_2 cu $b_1 \cap b_2 = \{B\}$ și $a_1 \parallel b_1$, $a_2 \parallel b_2$. Notăm $\beta = (b_1, b_2)$ și demonstrăm că α și β nu au niciun punct comun. Folosim, ca de multe ori în demonstrațiile din geometria în spațiu, metoda reducerii la absurd. Presupunem că α și β au punct comun, adică există $C \in \alpha \cap \beta$, deci planele ar fi secante, după o dreaptă c. Planele α și β conțin dreptele a_1, respectiv b_1 cu $a_1 \parallel b_1$. Folosind Teorema 1, avem că $\alpha \cap \beta = c$ și $c \parallel a_1$. Analog pentru $a_2 \parallel b_2$, rezultând $\alpha \cap \beta = c$ și $c \parallel a_2$. Prin urmare, $a_1 \parallel c \parallel a_2$ sau $a_1 \parallel a_2$, contradicție cu $a_1 \cap a_2 = \{A\}$. Presupunerea este falsă, deci cele două plane nu au puncte comune.
Oricare două plane pot avea toate punctele comune, o dreaptă comună, sau niciun punct comun.

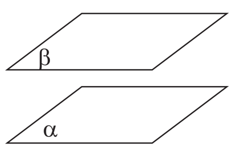
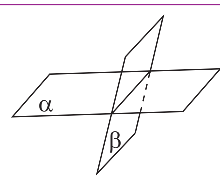
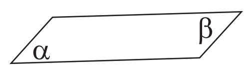
Definiția 1. Două plane *coincid* (sunt identice) dacă orice punct, care se află în unul dintre ele, aparţine şi celuilalt.

Definiția 2. Două plane se numesc *plane secante* dacă intersecţia lor este o dreaptă.

Definiția 3. Două plane α şi β se numesc *plane paralele* dacă nu au niciun punct comun.

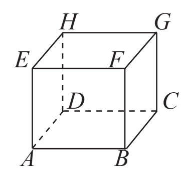
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Concluzie. Dacă α și β sunt două plane oarecare, sunt posibile următoarele situații:

intersecția planelor	1. Planele α și β nu au niciun punct comun. $\alpha \cap \beta = \varnothing$	2. Planele α și β au o dreaptă comună. $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$ și $\alpha \neq \beta$	3. Planele α și β coincid. Acestea au toate punctele comune. $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$
poziția planelor	Planele sunt *paralele*.	Planele sunt *secante*	Planele sunt *identice*
notația	$\alpha \parallel \beta$	$\alpha \cap \beta = d$	$\alpha = \beta$
reprezentarea bidimensională			

Alte rezultate importante despre paralelism în spațiu vor fi tratate într-un capitol viitor.

Temă de portofoliu



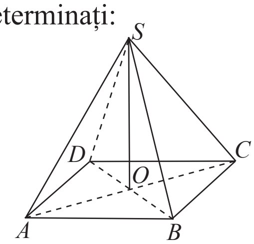
Fie $ABCDEFGH$ un cub. Stabiliți poziția planelor:
a) (ABC) și (BCD) **b)** (ABC) și (BCF) **c)** (ABC) și (EFG)

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Fie $ABCDMNPQ$ un paralelipiped dreptunghic. Stabiliţi poziţiile relative ale următoarelor plane:
a) (ABC) şi (MBQ) **b)** (ACP) şi (BDQ)
c) (AMC) şi (NPQ) **d)** (ADQ) şi (BCN).

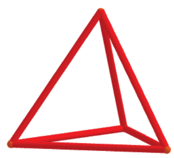
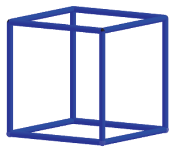
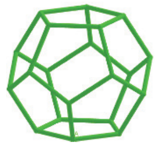
2 Punctul P este mijlocul muchiei CG a cubului $ABCDEFGH$. Stabiliți poziția planelor:
a) (BPH) și (ADE) **b)** (BHP) și (ABC)

3 Fie $ABCD$ un paralelogram și S un punct exterior planului (ABC). Determinați:
a) $(ABC) \cap (SAB)$
b) $(SAB) \cap (SBC)$
c) $(SAB) \cap (SCD)$
d) $(SBD) \cap (ABC)$
e) $(SBD) \cap (SAC)$

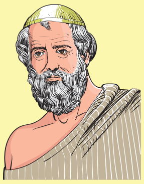


2 Corpuri geometrice

Corpurile geometrice sunt cunoscute din timpuri îndepărtate. Cinci corpuri regulate, considerate corpuri sacre, numite *corpuri platonice*, se găsesc la Muzeul Ashmolean (Oxford), din Anglia.
Acestea sunt sculptate în piatră și se crede că au fost create cu mai mult de 1000 de ani înainte ca filosoful antic Platon să le aducă în atenția matematicienilor.

Tetraedrul regulat	*Cubul*	*Octaedrul*	*Dodecaedrul*	*Icosaedrul*
				

Puțină istorie În viziunea filosofului mitic **Platon** (427-347 î.e.n), simbolistica timpului de acum două milenii jumătate era următoarea: „**Tetraedrul**, *simbolul focului*, fețele lui sunt 4 triunghiuri echilaterale*;* **cubul** are 6 fețe pătrate și este *simbolul pământului*; **octaedrul**, mărginit de 8 triunghiuri echilaterale, este *simbolul aerului*; **icosaedrul**, cu 20 de triunghiuri echilaterale ca fețe, este *simbolul apei* și, în fine, **dodecaedrul**, *simbol al cosmosului* cu tot ce cuprinde el, este singurul poliedru regulat, cu fețe formate din pentagoane în număr de 12 și nu din triunghiuri sau din pătrate".

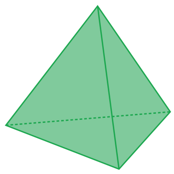
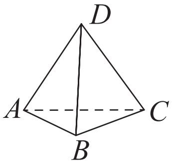


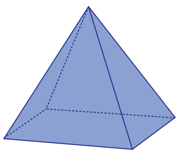
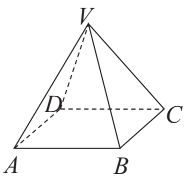
Odată ajunse în atenția matematicienilor, corpurile geometrice au fost studiate din perspectivă realistă. Unele dintre corpurile geometrice sunt *mărginite de suprafețe plane*. Acestea se numesc POLIEDRE.

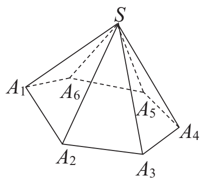
L1. Piramida: reprezentare, elemente caracteristice

Rezolvăm și observăm

Priviți următoarele reprezentări. Extrageți, din trusa de geometrie, *corpurile geometrice* care corespund reprezentărilor.



a) Observați corpuri geometrice reale și identificați pe desen reprezentarea fiecăruia, apoi elemente cunoscute din geometria plană: figuri geometrice, suprafețe poligonale, puncte, segmente.
b) Numiți și descrieți suprafețele poligonale care delimitează fiecare corp.
c) Identificați și numiți figurile geometrice plane din care, prin lipirea laturilor (*muchiilor*) corespunzătoare, s-ar putea obține fiecare corp.

Soluție. **a)** Toate corpurile reprezentate sunt mărginite de suprafețe plane. Poligoanele corespunzătoare au laturile de dimensiuni potrivite pentru ca, prin alăturare, să se suprapună perfect.
b) Primele două corpuri sunt mărginite de patru suprafețe triunghiulare. Următoarele două reprezentări corespund unui corp mărginit de cinci suprafețe poligonale, patru suprafețe triunghiulare și o suprafață patrulateră. Ultima reprezentare este mărginită de o suprafață hexagonală și șase suprafețe triunghiulare.

c) La toate corpurile reprezentate întâlnim triunghiuri cu un vârf comun și un poligon care poate să nu fie triunghi, ale cărui laturi se suprapun cu câte o latură a triunghiurilor.

Concluzie. Caracteristicile comune ale acestor corpuri geometrice sunt următoarele:

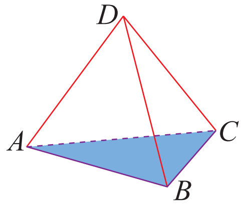
1) Sunt mărginite de suprafețe poligonale convexe plane, deci sunt poliedre.
2) Cel mult una dintre suprafețele care delimitează corpul nu este suprafață triunghiulară.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiția 1. Piramida este corpul geometric mărginit de o suprafață poligonală convexă plană cu n laturi, $n \geq 3$ și de n suprafețe triunghiulare cu vârful comun.
O piramidă este determinată de suprafața poligonală convexă, numită *bază* a piramidei și de un punct exterior planului bazei, numit *vârf* al piramidei.

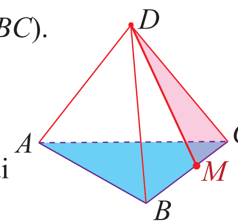
Observații. **1)** Pentru simplificarea limbajului, vom folosi termenul PIRAMIDĂ și pentru a numi corpul geometric și pentru a numi suprafața piramidei (piramida cu interiorul gol). Contextul în care apare acest termen ne spune exact la care dintre cele două concepte ne referim.
2) Convenim ca, în numirea unei piramide, să scriem mai întâi litera corespunzătoare vârfului, apoi pe cele care numesc baza.
În funcție de numărul laturilor bazei, o piramidă poate fi triunghiulară, patrulateră, pentagonală, hexagonală etc.
Cea mai simplă dintre piramide este piramida triunghiulară, care este și cel mai *simplu* dintre poliedre.
Acesta este mărginit de *patru suprafețe* triunghiulare și se numește TETRAEDRU.
Tetraedrul din imagine poate fi descris astfel:

- Suprafața triunghiulară ABC este *bază* a tetraedrului.
- Punctul D, exterior bazei, este *vârful* tetraedrului.
- Punctele A, B, C sunt vârfurile bazei.
- Segmentele AB, BC, AC sunt *muchiile bazei*.
- Segmentele DA, DB, DC sunt *muchiile laterale*.
- Suprafețele triunghiulare DAB, DAC, DBC sunt *fețele laterale*.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1. Considerăm suprafața triunghiulară ABC și D un punct exterior planului (ABC).
a) Numiți suprafața descrisă de segmentele DM, când M parcurge segmentul BC.
b) Precizați suprafețele descrise de segmentele DM, când M parcurge laturile triunghiului ABC.
c) Intuiți mulțimea descrisă de segmentele DM, când M parcurge interiorul triunghiului ABC.



Soluție. **a)** Segmentul DM descrie suprafața laterală DBC.
b) Segmentul DM descrie suprafețele triunghiulare DBC, DAB, DAC, deci cele trei fețe laterale ale tetraedrului.
c) Segmentul DM descrie interiorul tetraedrului. Reuniunea tuturor segmentelor închise DM cu M punct variabil pe suprafața triunghiulară ABC formează tetraedrul $DABC$.

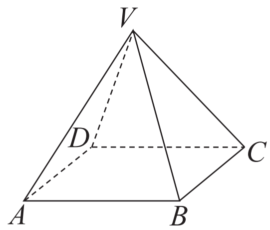
Definiția 2. O piramidă care are baza un poligon regulat, iar muchiile laterale sunt congruente, se numește *piramidă regulată*.

Observație. O reformulare mai riguroasă a acestei definiții, vom întâlni într-unul din paragrafele următoare ale acestui manual.

Aplicația 2. În desenul alăturat, este reprezentată piramida patrulateră regulată *VABCD*.

a) Folosind definiția, stabiliți natura fețelor laterale ale piramidei date.

b) Enumerați triunghiurile congruente, situate în plane diferite.



Soluție. **a)** Din definiție, muchiile laterale sunt congruente, adică triunghiurile *VAB*, *VBC*, *VCD* și *VDA* au câte două laturi congruente, deci sunt isoscele. Baza fiecărui astfel de triunghi este una dintre muchiile bazei piramidei.

b) Conform cazului de congruență L.L.L, $\Delta VAB \equiv \Delta VBC \equiv \Delta VCD \equiv \Delta VDA$.

Concluzie. Fețele laterale ale oricărei piramide regulate sunt *triunghiuri isoscele congruente*.

Definiția 3. Un tetraedru care are toate cele patru fețe triunghiuri echilaterale se numește *tetraedru regulat*.

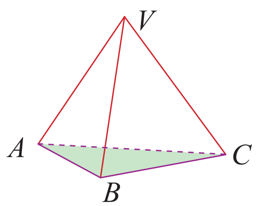
Aplicația 3. Se consideră tetraedrul *SABC*, unde triunghiul *ABC* este echilateral, iar *SA* = *SB* = *SC*. Stabiliți dacă *SABC* este un tetraedru regulat.

Soluție. Triunghiul *ABC* este echilateral, iar *SA* = *SB* = *SC* ne arată că *SABC* este o piramidă *triunghiulară regulată*. Pentru a fi tetraedru regulat, este necesar ca fețele laterale să fie, de asemenea, triunghiuri echilaterale. Triunghiul *VAB*, de exemplu, este echilateral doar dacă *VA* = *AB*, adică muchiile laterale ar trebui să fie congruente cu muchiile bazei.

Concluzie. Un tetraedru care are toate muchiile congruente este un tetraedru regulat.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Piramidă triunghiulară (baza este triunghi)



Elemente

Vârful piramidei: V

Baza: suprafața triunghiulară *ABC*

Vârfurile bazei: A, *B*, *C*

Muchiile bazei: segmentele *AB*, *BC*, *AC*

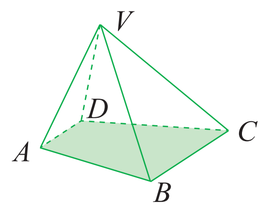
Muchiile laterale: VA, *VB*, *VC*

Fețele laterale: suprafețele triunghiulare *VAB*, *VBC*, *VCA*

Numărul elementelor

Numărul fețelor	$f = 1 + 3 = 4$
Numărul total al muchiilor	$m = 3 + 3 = 6$
Numărul total al vârfurilor	$v = 3 + 1 = 4$
Observație. $f + v = m + 2$	

Piramidă patrulateră (baza este patrulater)



Elemente

Vârful piramidei: V

Baza: suprafața patrulateră *ABCD*

Vârfurile bazei: A, *B*, *C*, *D*

Muchiile bazei: segmentele *AB*, *BC*, *CD*, *DA*

Muchiile laterale: VA, *VB*, *VC*, *VD*

Fețele laterale: suprafețele triunghiulare *VAB*, *VBC*, *VCD*, *VDA*

Numărul elementelor

Numărul fețelor	$f = 1 + 4 = 5$
Numărul total al muchiilor	$m = 4 + 4 = 8$
Numărul total al vârfurilor	$v = 4 + 1 = 5$
Observație. $f + v = m + 2$	

Piramidă hexagonală este prezentată în manualul digital.

Pentru prisma patrulateră, elementele pot fi observate în manualul digital.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 **a)** Desenați pe caiete, utilizând rigla, o piramidă hexagonală, cu vârful S.
b) Notați piramida, folosind pentru bază ce litere doriți.
c) Numiți elementele piramidei reprezentate.

2 Copiați pe caiete și completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate:
a) Baza unei piramide cu 7 fețe laterale are … vârfuri.
b) O piramidă cu 5 fețe se numește … .
c) O piramidă cu 7 vârfuri se numește … .

3 Desenați, numiți și descrieți piramida în care baza și fețele laterale sunt reprezentate prin aceeași figură geometrică.

4 Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției „Numărul muchiilor oricărei piramide este un număr par”, argumentând răspunsul dat.

5 Piramida $EABCD$ are ca bază dreptunghiul $ABCD$ și toate muciile laterale congruente. Știind că $AE \perp EC$, demonstrați că $BE \perp ED$.

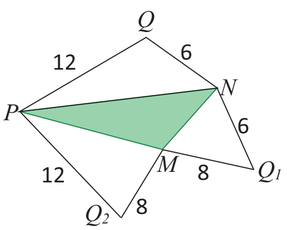
6 Desenați o piramidă patrulateră $VABCD$, apoi reprezentați punctele M, N, P, Q, mijloacele muchiilor VA, VB, VC, VD.
Fie mulțimea $L = \{A, B, C, D, M, N, P, Q, V\}$.
a) Scrieți câte trei submulțimi de câte patru elemente ale mulțimii L care să conțină puncte coplanare.
b) Scrieți câte trei submulțimi de câte patru elemente ale mulțimii L care să conțină puncte necoplanare.
c) Cercetați dacă există două submulțimi de câte cinci elemente ale mulțimii L care să reprezinte vârfurile unor piramide. Justificați răspunsul.

7 Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub.
a) Numiți tetraedrele ale căror vârfuri sunt și vârfuri ale cubului și care au baza ACD.
b) Numiți piramidele patrulatere ale căror vârfuri sunt și vârfuri ale cubului.

8 Determinați numărul fețelor și numărul muchiilor unei piramide care are 10 vârfuri.

L2. Desfășurarea piramidei

Rezolvăm și observăm



a) Desenați pe carton configurația alăturată, respectând dimensiunile înscrise, decupați și îndoiți după MN, MP, NP, astfel încât segmentele congruente să se suprapună.
b) Observați poziția punctelor Q, Q_1, Q_2, după îndoire.
c) Considerând corpul $QMNP$, obținut la subpunctele anterioare, desprindeți muchiile MQ, NQ, PQ, pentru a le aduce în planul (MNP).

Soluție. **a)** Se desenează un triunghi MNP, pe laturile căruia se reprezintă, în exterior, triunghiurile MNQ_1, MPQ_2, NPQ, cu dimensiunile din imagine. (Pentru laturile triunghiului MNP se vor folosi dimensiuni convenabile, presupunând respectate condițiile de existență.)
b) Din $MQ_1 = MQ_2$ rezultă că Q_1 și Q_2 se suprapun. Din $NQ_1 = NQ$ rezultă că Q_1 și Q se suprapun. Cum $PQ = PQ_2$ rezultă că și aceste segmente se suprapun perfect, iar punctele Q, Q_1, Q_2 coincid, după îndoire.
c) Prin plierea suprafeței date, am obținut o piramidă triunghiulară (un tetraedru). Să procedăm acum, invers. Considerăm tetraedrul $QMNP$. Alegem ca bază suprafața MNP. Desprindem muchiile MQ, NQ, PQ și *rabatăm* cele trei fețe laterale, în jurul muchiilor bazei, fără modificarea fețelor, pentru a le aduce pe toate în planul bazei. Figura plană obținută reprezintă *desfășurarea piramidei triunghiulare QMNP*.

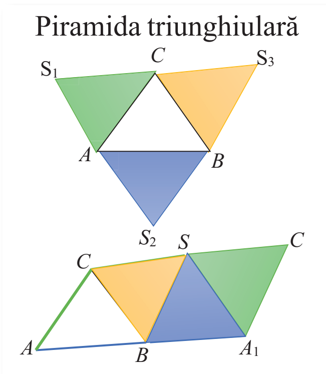
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

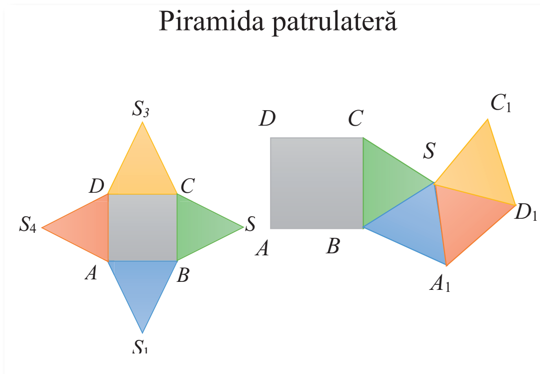
Desfășurarea piramidei ne oferă multiple posibilități de folosire a cunoștințelor de geometrie plană pentru calculul unor distanțe, calculul unor arii, determinarea unor măsuri de unghiuri și chiar determinarea unor poziții pentru elemente geometrice.

Observație. Desfășurarea piramidei se poate realiza și prin alte tehnici. Este esențial ca toate fețele laterale să fie alăturate, într-un același plan.

Desfășurarea unei *piramide regulate* constă în alăturarea unui *poligon regulat cu n laturi*, baza piramidei și a *n triunghiuri isoscele*, fețele laterale ale piramidei având bazele congruente cu latura bazei.

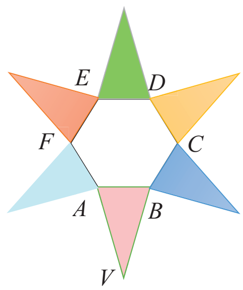
Comentariu.
Alăturat sunt schițate desfășurarea tetraedrului regulat și desfășurarea piramidei patrulatere regulate, în câte două prezentări diferite.
Temă. Realizați pe carton, o a treia variantă de prezentare a desfășurării.
Pentru a ușura măsurarea, folosiți *triunghiuri echilaterale congruente.*

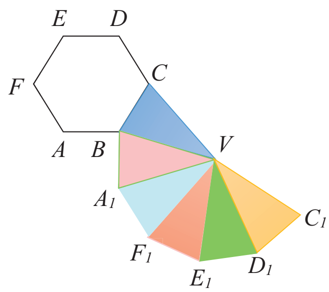




Exercițiu. Realizați piramidele corespunzătoare *înfășurând* (pliind, îndoind) figura plană desenată.

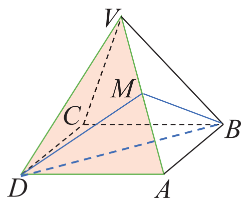
Aplicația 1. Considerăm piramida hexagonală regulată *VABCDEF*. Realizați, în două moduri, desfășurarea piramidei.



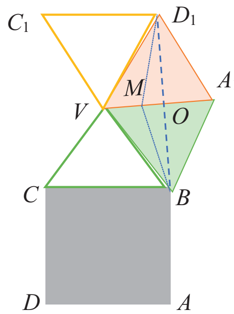


Soluție. Baza piramidei este hexagon regulat, iar fețele laterale sunt triunghiuri isoscele congruente.
Baza fiecărei fețe laterale este congruentă cu latura bazei.

Aplicația 2. Toate fețele laterale ale piramidei patrulatere *VABCD* sunt triunghiuri echilaterale cu latura *a*. Determinați poziția punctului $M \in VA$, astfel încât perimetrul triunghiului *MBD* să fie minim.



Soluție. Fie $M \in VA$. Perimetrul triunghiului *MBD* este $P_{MBD} = BD + MB + MD$.
Cum *BD* este diagonala bazei și are lungime constantă, rezultă că perimetrul este minim atunci când suma $MB + MD$ este minimă.

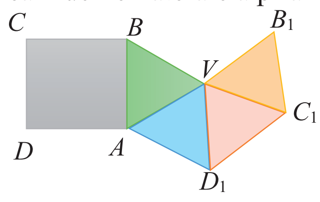


Pentru a putea evalua această sumă, o vom aduce într-un același plan cele două segmente. Vom desfășura piramida, decupând baza, astfel încât muchia *VA* să rămână latură comună pentru triunghiurile provenite din fețele laterale *VAB* și *VAD*. Prin desfășurare, am obținut configurația plană alăturată, în care VBA_1D_1 este un romb. Considerând *O* mijlocul segmentului VA_1; oricare ar fi punctul $M \in VA_1$, $MB + MD = MB + MD_1 \geq OB + OD_1 = BD = a\sqrt{3}$. În concluzie, perimetrul triunghiului este minim dacă și numai dacă *M* coincide cu *O*, adică este mijlocul muchiei *VA*.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 **a)** Desenați pe carton un triunghi oarecare *ABC*. Folosind instrumentele geometrice, marcați punctele *M*, *N*, *P*, mijloacele laturilor *BC*, *AC*, *AB*, ale triunghiului dat, apoi desenați liniile mijlocii.
b) Decupați triunghiul și demonstrați că, prin îndoire, obțineți un tetraedru.
c) Dacă *ABC* este un triunghi echilateral cu perimetrul 36 cm, demonstrați că, prin îndoire după liniile mijlocii, se obține un tetraedru regulat, apoi aflați muchia acestui tetraedru.

2 Desfășurarea piramidei patrulatere regulate *VABCD* este reprezentată în figura de mai jos. Știind că $AC = 4\sqrt{2}$ cm, și $AB \parallel VD_1$, aflați lungimea muchiei laterale a piramidei.



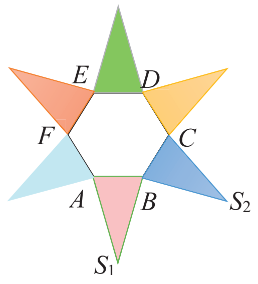
Observație. D_1 reprezintă poziția pe care vârful *D* al triunghiului *VAD* o va ocupa în planul bazei *ABCD*, după desfășurare.

3 Desenați un triunghi echilateral și trei triunghiuri dreptunghice isoscele, ale căror ipotenuze sunt laturile triunghiului echilateral desenat, iar vârfurile unghiurilor drepte sunt în exteriorul triunghiului echilateral.
a) Arătați că suprafața obținută este desfășurarea în plan a unei piramide triunghiulare regulate.
b) Calculați lungimea muchiei bazei și lungimea muchiei laterale a piramidei, dacă aria acestei suprafețe este $8 \cdot (3+\sqrt{3})$ cm².

4 Fie *ABCD* un tetraedru. Notăm A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3 și D_1, D_2, D_3 măsurile unghiurilor situate pe fețe diferite cu vârful în *A*, *B*, *C*, respectiv *D*. Știind că $A_1 + A_2 + A_3 = B_1 + B_2 + B_3 = C_1 + C_2 + C_3 = D_1 + D_2 + D_3 = 180°$, demonstrați că orice două muchii opuse ale tetraedrului sunt congruente.

5 Piramida patrulateră regulată *SABCD* are fețele laterale triunghiuri echilaterale.
a) Realizați un desen care să reprezinte desfășurarea în plan a piramidei obținute prin rotirea fețelor în jurul muchiilor bazei.
b) Calculați măsura unghiului format de dreptele *SA* și *SC* (în planul (*SAC*)), înainte de desfășurare.
c) Calculați măsura unghiului format de dreptele S_1A și S_2C (în planul (*ABC*)) după desfășurare, unde S_1 și S_2 reprezintă pozițiile pe care capătul *S* al muchiei *SB* le va ocupa în planul bazei, prin desfășurare.

6 Desenul următor reprezintă desfășurarea piramidei hexagonale regulate *SABCDEF*. Se știe că $S_1B \perp S_2B$.



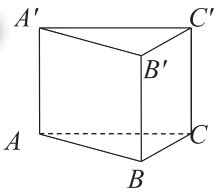
a) Aflați măsurile unghiurilor unei fețe laterale.
b) Aflați măsura unghiului format de dreptele S_1A și S_2C.

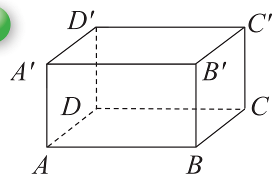
L3. Prisma dreaptă: reprezentare, elemente caracteristice

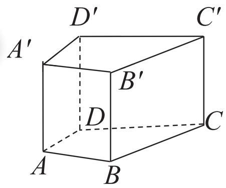
Unele întrebări foarte simple, cum ar fi: „Când ați văzut pentru prima dată un cub?” sau „Cu ce corp geometric se identifică piesa de Lego pe care ați ales-o la întâmplare?”, este foarte probabil să vă pună pe gânduri. Cubul este unul dintre primele obiecte cu care fiecare copil a interacționat; un corp geometric aparent simplu, cu o formă regulată, ușor de manevrat și care oferă nenumărate variante de aranjare în scopul realizării construcțiilor creative.

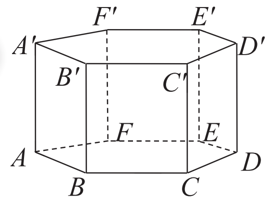
Rezolvăm și observăm

AP Priviți următoarele reprezentări:

1


2


3


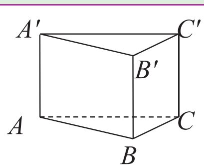
4


Extrageți, din trusa de geometrie, *corpurile geometrice* care corespund acestor reprezentări.
Observați corpurile geometrice extrase din trusă, identificați și numiți figurile geometrice plane determinate de fețele acestor corpuri.
Soluție. La toate corpurile întâlnim două suprafețe poligonale cu aceleași dimensiuni (sunt congruente), numite *baze*. Laturile bazelor se numesc *muchii ale bazei*.
Pe lângă baze, toate corpurile sunt mărginite de suprafețe ale căror laturi formează paralelograme (în particular, dreptunghiuri sau pătrate), pe care le numim *fețe laterale*. Laturile fețelor laterale care nu sunt muchii ale bazelor se numesc *muchii laterale*. Numărul muchiilor laterale este egal cu numărul vârfurilor unei baze.
Concluzie. Caracteristicile comune ale acestor corpuri geometrice sunt următoarele:
1) Au două baze care sunt suprafețe poligonale convexe cu n laturi, $n \geq 3$. Poligoanele convexe determinate de baze *sunt congruente*.
2) Au n fețe laterale, care sunt paralelograme.

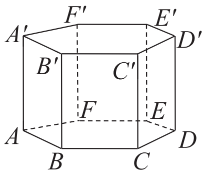
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Cu elementele pe care le cunoaștem, putem formula următorul enunț:
Prisma este un poliedru mărginit de două *baze*, suprafețe poligonale convexe congruente cu n laturi, $n \geq 3$, situate în plane paralele, și de n fețe laterale, ale căror laturi determină paralelograme.
Elementele unei prisme sunt: *bazele*, *muchiile bazelor, fețele laterale*, *muchiile laterale*, *vârfurile*, la care se adaugă *diagonalele*, atunci când numărul muchiilor laterale este mai mare sau egal cu patru.
Un vârf al unei baze și un vârf al celeilalte baze, care nu aparțin aceleiași fețe laterale, determină o *diagonală a prismei.*
Ca și la piramidă, în funcție de numărul laturilor bazelor, prismele pot fi: triunghiulare, patrulatere, pentagonale, hexagonale etc.
Pentru corpurile prezentate și analizate mai sus, elementele sunt următoarele:

Prismă triunghiulară

Bazele	Muchiile bazelor	Fețele laterale	Muchiile laterale	Numărul muchiilor și numărul vârfurilor
 Suprafețele poligonale ABC și $A'B'C'$, cu $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, A'B'C'$	AB, BC, AC, respectiv $A'B'$, $B'C'$, și $A'C'$. Numărul muchiilor bazelor este $3 \cdot 2 = 6$.	Suprafețele delimitate de paralelogramele: $ABB'A'$, $BCC'B'$ *și* $ACC'A'$. Numărul fețelor laterale este 3.	AA', BB' și CC', paralele și congruente. Numărul muchiilor laterale este 3.	Numărul muchiilor prismei este $3 \cdot 2 + 3 = 9$ Numărul vârfurilor este $3 \cdot 2 = 6$

Prismă hexagonală

Bazele	Muchiile bazelor	Fețele laterale	Muchiile laterale	Numărul muchiilor și numărul vârfurilor
 Suprafețele delimitate de hexagoanele $ABCDEF$ și $A'B'C'D'E'F'$	AB, BC, CD, DE, EF, FA, respectiv $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'F'$, $F'A'$. Numărul muchiilor bazelor este $6 \cdot 2 = 12$.	Suprafețele delimitate de paralelogramele: $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$, $EFF'E'$, $FAA'F'$ Numărul fețelor laterale este 6.	AA', BB', CC', DD', EE' și FF', paralele și congruente. Numărul muchiilor laterale este 6.	Numărul muchiilor prismei este $6 \cdot 2 + 6 = 18$ Numărul vârfurilor este $6 \cdot 2 = 12$

Observație. Prisma hexagonală are 18 diagonale: AC', $A'C$, AD', $A'D$, AE', $A'E$, BD', $B'D$, BE', $B'E$, BF', $B'F$, CE', $C'E$, CF', $C'F$, DF', $D'F$.

Pentru simplificarea exprimării, referindu-ne la bazele prismei sau la fețele ei laterale, vom menționa doar poligoanele care le delimitează.
Prismele care au toate *fețele laterale suprafețe dreptunghiulare* se numesc **prisme drepte**.
Prin urmare, vom întâlni prismă triunghiulară dreaptă, prisma patrulateră dreaptă, prisma pentagonală dreaptă, prismă hexagonală dreaptă etc.

Definiție. O prismă *dreaptă* a cărei bază este o suprafață poligonală delimitată de un *poligon regulat* se numește *prismă regulată*.

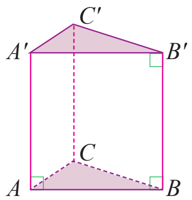
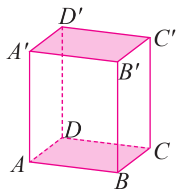
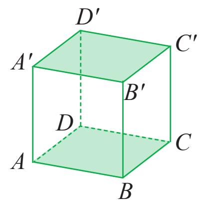
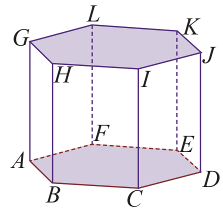
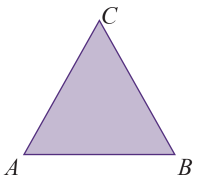
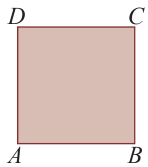
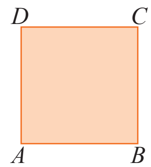
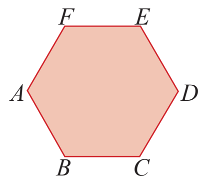
Observație. Pentru că reprezentarea bidimensională a unui poligon regulat văzut tridimensional nu păstrează lungimile segmentelor și măsurile unghiurilor, desenul realizat pentru o prismă dreaptă și cel pentru o prismă regulată nu sunt neapărat diferite. Din enunțul problemei trebuie să deducem natura prismei (dacă este prismă regulată sau nu).

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Dintre prismele patrulatere drepte, paralelipipedul, paralelipipedul dreptunghic și cubul sunt cele mai des întâlnite în viața cotidiană. Elementele lor *caracteristice sunt deja cunoscute.* Le vom relua, evidențiind proprietățile specifice fiecăruia.
Reprezentările lor geometrice sunt asemănătoare și nu oferă suficiente informații privind particularitățile acestora. Datele complete trebuie extrase din enunțul problemelor.

Paralelipipedul drept	**Paralelipipedul dreptunghic**	**Cubul**
1. Baza este paralelogram 2. Fețele laterale sunt dreptunghiuri	1. Baza este dreptunghi 2. Fețele laterale sunt dreptunghiuri	Toate fețele sunt pătrate.
Prisma patrulateră dreaptă cu baza paralelogram	a) Prisma patrulateră dreaptă cu baza dreptunghi. b) Paralelipipedul drept, cu baza dreptunghi. c) Prisma care are toate fețele dreptunghiuri.	a) Prisma patrulateră regulată cu fețele laterale pătrate. b) Paralelipipedul dreptunghic, având toate muchiile congruente. c) Prisma cu toate fețele pătrate d) Prisma patrulateră regulată cu toate muchiile congruente.

Tabelul de mai sus conține definiții echivalente pentru paralelipipedul drept, paralelipipedul dreptunghic și pentru cub, foarte utile în rezolvarea problemelor.
Dintre prismele drepte, o clasă specială este aceea a prismelor regulate.

Tipul prismei	Prisma triunghiulară regulată	Prisma patrulateră regulată	Cubul – prisma patrulateră regulată, cu fețele laterale pătrate	Prisma hexagonală regulată
Reprezentarea				
Reprezentarea bazei prismei				

Observație. Dacă *muchiile laterale* sunt reprezentate în *poziție verticală* și nu se fac alte precizări, vom considera că prisma este *dreaptă*.

Aplicație. Se consideră suprafața delimitată de un poligon convex $A_1A_2\ldots A_n$, cu n laturi, și M un punct situat pe suprafața poligonală dată (pe laturile poligonului sau în interiorul său). Considerăm, de asemenea, segmentul fix A_1P_1, unde P_1 este exterior planului poligonului. Reuniunea tuturor segmentelor închise MN, paralele și congruente cu A_1P_1, când M parcurge întreaga suprafață poligonală, formează *prisma* cu baza $A_1A_2\ldots A_n$ în care segmentul A_1P_1 este muchie laterală. Urmăriți, împreună cu partenerul de echipă, prisma triunghiulară și prisma patrulateră generate în acest fel. Consultați manualul digital.

Temă de portofoliu

Folosind aplicația de mai sus și vizionând filmulețul din manualul digital, precizați:

1. Mulțimea punctelor descrisă de segmentul MN, când M se deplasează pe latura BC a triunghiului ABC.

2. Mulțimea punctelor descrisă de segmentul MN, atunci când M parcurge laturile triunghiului ABC.

3. *Traseul* parcurs de punctul M, astfel încât segmentul MN să *genereze* suprafața laterală a prismei patrulatere $ABCDA'B'C'D'$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 **a)** Identificați, în mediul înconjurător, obiecte care au formă de prismă dreaptă, triunghiulară sau patrulateră.
b) Realizați un desen în care să reprezentați prismele corespunzătoare.
c) Notați prismele și precizați elementele acestora.

2 Baza unei prisme este un patrulater cu perimetrul 64 cm, iar o muchie laterală are lungimea 9 cm. Determinați suma tuturor muchiilor prismei.

3 Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară, M mijlocul segmentului BC și M' mijlocul segmentului $B'C'$.
a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.
b) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
p_1: „Punctele B', A, B, C sunt coplanare.“
p_2: „Paralelogramul $ABB'A'$ și punctul C determină o piramidă patrulateră.“
p_3: „Reuniunea prismelor $ABMA'B'M'$ și $ACMA'C'M'$ este prisma $ABCA'B'C'$.“

4 Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră, iar M și M' intersecțiile diagonalelor bazelor $ABCD$, respectiv $A'B'C'D'$.

a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

b) Denumiți câte o prismă triunghiulară, cu baza: ABD, ACD, ABC, respectiv BCD.

c) Precizați elementele prismei cu baza MAB și muchia laterală MM'.

d) Identificați 4 tetraedre care au toate vârfurile printre vârfurile prismei date.

5 Fețele laterale ale unei prisme hexagonale sunt congruente și au perimetrul 30 cm. Știind că perimetrul bazei este egal cu perimetrul unei fețe laterale, aflați:

a) lungimea unei muchii laterale;

b) suma lungimilor tuturor muchiilor prismei.

6 Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

a) Muchiile paralelipipedului care conțin punctul D sunt … .

b) Fețele paralelipipedului care conțin vârful D sunt … .

c) Fețele paralelipipedului care conțin muchia AD sunt … .

7 În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ se cunosc: $AB = 7$ cm, $B'C' = 8$ cm, $DD' = 9$ cm.

a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

b) Calculați suma tuturor muchiilor paralelipipedului.

8 Două cuburi cu muchia de 5 cm se alătură astfel încât să se obțină un paralelipiped dreptunghic.

a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

b) Determinați cea mai mare dintre ariile fețelor paralelipipedului obținut.

c) Calculați suma tuturor muchiilor paralelipipedului obținut.

L4. Prisma dreaptă: desfășurare

Ne amintim!

O prismă care are toate fețele laterale dreptunghiuri se numește *prismă dreaptă*.
O prismă dreaptă a cărei bază este un poligon regulat se numește *prismă regulată*.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Ne propunem să analizăm posibilitatea desfășurării prismei.
Desfășurarea unei prisme drepte va fi o configurație geometrică plană obținută prin alăturarea dreptunghiurilor care reprezintă fețele laterale și a poligoanelor care reprezintă bazele.
Pentru a obține desfășurarea unei prisme, o decupăm după anumite muchii, astfel încât fețele laterale și bazele să poată fi „aduse” într-un plan.
Deducem că fiecare dintre muchiile prismei poate avea, în realizarea desfășurării, unul din rolurile:

1. Este *dedublată*, câte una pentru fiecare față pentru care este latură, cele două suprafețe fiind separate prin decupare (tăiere).

2. Este muchie *balama*, după care cele două fețe se pot roti, rabata.

Afirmația de mai sus ne arată că există multe variante de desfășurare a unei prisme, în funcție de rolul pe care îl atribuim fiecărei muchii. Imaginația fiecăruia va găsi desfășurări interesante și potrivite, în funcție de scopul pentru care realizăm desfășurarea, modelarea matematică a procesului nefiind ușoară.

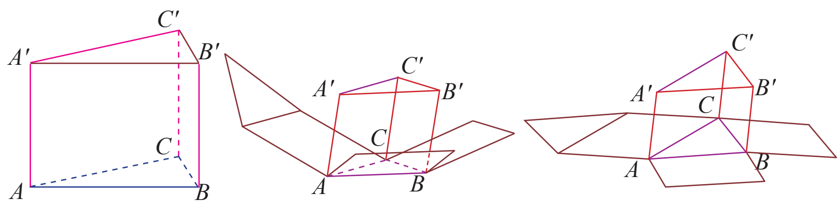
Aplicația 1. Considerăm prisma triunghiulară dreaptă $ABCA'B'C'$.

a) Dorim să realizăm desfășurarea acesteia în planul bazei ABC. Alegem să decupăm muchiile $A'B'$ și $B'C'$ ale bazei $A'B'C'$ și muchiile laterale, apoi rotim fețele în jurul celorlalte muchii până la planul (ABC) și anume: $ABB'A'$ se rotește în jurul muchiei AB, apoi $BCC'B'$ se rotește în jurul muchiei BC, baza $A'B'C'$ se rotește în jurul muchiei $A'C'$, iar $ACC'A'$ se rotește în jurul muchiei AC.

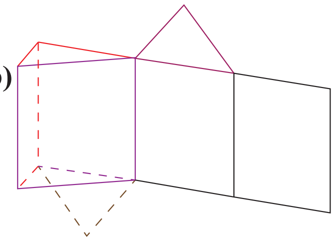
b) Realizați schița desfășurării în planul unei fețe laterale.

Soluție

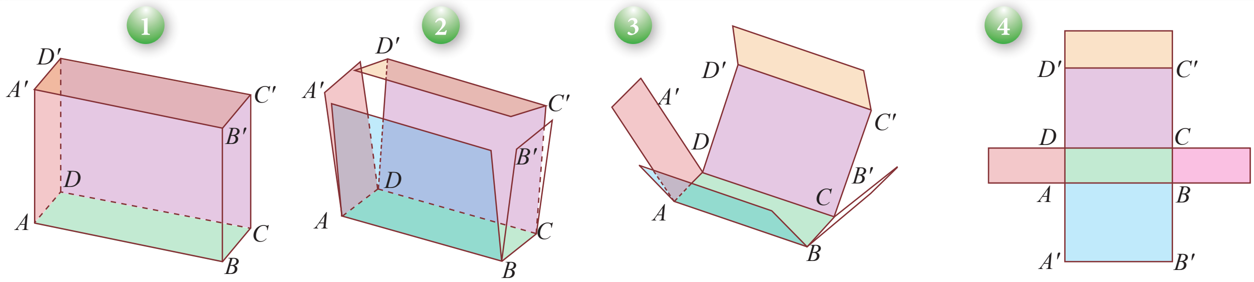
a)



b)



Aplicația 2. Realizați desfășurarea paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în planul dreptunghiului $ABCD$.



Concluzii

1. Desfășurarea paralelipipedului este formată din 6 suprafețe dreptunghiulare. Cele 6 dreptunghiuri sunt grupate în 3 perechi de dreptunghiuri congruente (corespunzătoare fețelor opuse ale paralelipipedului).
2. În funcție de tehnica de desfășurare, cele 6 suprafețe dreptunghiulare pot fi alăturate în configurații diferite, dimensiunile lor rămânând neschimbate.
3. Desfășurarea unui cub este, de fapt, desfășurarea unui paralelipiped dreptunghic, având dimensiunile egale.

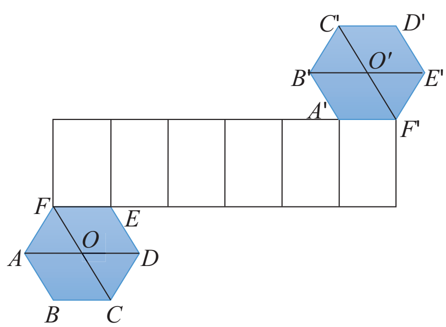
Temă de portofoliu

a) Realizați desfășurarea unei prisme patruletere regulate.
b) Realizați desfășurarea unui cub, în trei moduri.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 3. Se consideră configurația alăturată, formată din 2 hexagoane regulate cu latura de lungime a și 6 dreptunghiuri cu dimensiunile a și b.

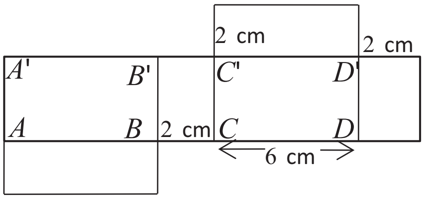
a) Justificați faptul că această suprafață plană reprezintă desfășurarea unei prisme.
b) Numiți prisma identificată la subpunctul a) și precizați natura ei.
c) Realizați pe caiete altă desfășurare a aceleiași prisme.



Indicație. **a)** Hexagoanele regulate $ABCDEF$ și $A'B'C'D'E'F'$ au laturile congruente, deci pot fi bazele unei prisme hexagonale regulate. Cele 6 dreptunghiuri au o dimensiune egală cu latura hexagoanelor, iar cealaltă dimensiune este aceeași pentru toate, deci ar putea fi fețe laterale ale prismei.
Observăm, de asemenea, că poziția celor 8 suprafețe permite, prin „înfășurare”, realizarea prismei hexagonale regulate cu muchia bazei a și muchia laterală b.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Realizați pe carton desenul de mai jos, respectând dimensiunile înscrise.

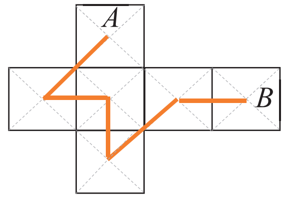


a) Decupați după conturul exterior, apoi îndoiți cartonul pentru a obține o prismă cu baza $ABCD$.
b) Denumiți prisma obținută.
c) Identificați și descrieți elementele prismei.
d) Repetați subpunctele **a)**, **b)**, **c)** pentru a obține o prismă cu baza $ABB'A'$, apoi $ADD'A'$.

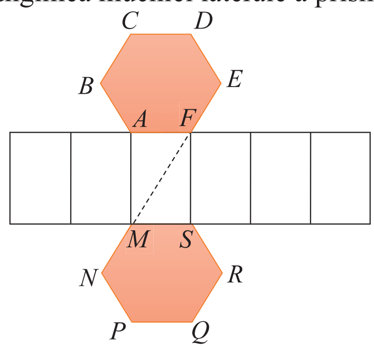
2 Realizați pe carton un desen care să reprezinte desfășurarea unui cub cu lungimea muchiei de 0,8 dm. Decupați și îndoiți cartonul pentru a obține cubul. Notați cubul și identificați muchiile, fețele, diagonalele.

3 Desfășurarea suprafeței laterale a unui cub este dreptunghiul $MNPQ$, $MN > NP$, iar punctul R este mijlocul laturii NP. Dacă $MR = \sqrt{65}$ cm, aflați lungimea muchiei cubului.

4 În desenul alăturat este reprezentată desfășurarea în plan a unui cub care are muchia de 6 cm. Calculați lungimea traseului AB, marcat în desen.



5 În figura de mai jos, este reprezentată desfășurarea în plan a unei prisme hexagonale $ABCDEFMNPQRS$. În desfășurare, se știe că punctele E, F, M sunt coliniare și $EM = 27$ cm.
a) Demonstrați că N este situat pe dreapta EM.
b) Calculați lungimea muchiei bazei prismei și lungimea muchiei laterale a prismei.



L5. Cilindrul circular drept: reprezentare, elemente caracteristice, desfășurare

Omul a trăit în armonie cu natura din cele mai vechi timpuri. A observat formele și fenomenele, le-a înțeles, apoi a creat în mod ingenios obiecte care să-i ușureze munca, să-i înfrumusețeze viața și, mai ales, să-l ajute în permanentele preocupări pentru cunoaștere.

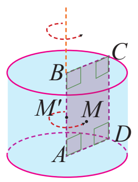
Din motive practice care țin de economie de spațiu, de viteza de deplasare, de echilibru, de rezistența la intemperii[1], o mare parte dintre obiectele care ne înconjoară sunt mărginite de forme rotunde. Imaginile de mai sus reprezintă exemple de corpuri din natură sau create de om, mărginite de forme rotunde.

La fiecare dintre aceste corpuri putem identifica, într-un plan convenabil ales, un cerc, adică o figură plană, formată cu mulțimea tuturor punctelor din acel plan, situate la o distanță constantă de un punct fix, numit centru.

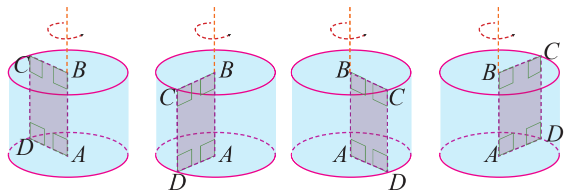
[1] *Intemperie* = Stare atmosferică neprielnică, dăunătoare; vreme rea (cu ploaie, vânt, viscol).

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Vom modela matematic doar câteva corpuri care sunt mărginite și de suprafețe rotunde, prin alăturarea sau îmbinarea cărora se pot realiza multe altele.
Considerăm o suprafață dreptunghiulară pe care o rotim în jurul uneia dintre laturile sale, până când suprafața ajunge din nou în poziția inițială. Identificați în trusa de geometrie un corp care ar putea fi generat în acest mod.



Fie $ABCD$ suprafață dreptunghiulară, pe care o rotim în jurul dreptei AB, numită *axă de rotație*. Punctul D va descrie cercul de centru A și rază AD, punctul C va descrie cercul de centru B și rază BC. Fiecare punct M, situat pe suprafața dreptunghiulară $ABCD$, va descrie, la rândul său, un cerc, având centrul M' pe segmentul închis AB și de rază MM'.
Corpul obținut în acest fel este un *cilindru circular drept*.
Discul de centru A și rază AD, respectiv discul de centru B și rază BC sunt *bazele* cilindrului.
Segmentul CD și orice alt segment PQ, cu $P \in \mathcal{C}(A, AD)$ și $Q \in \mathcal{C}(B, BC)$, astfel încât $PQ \parallel AB$, sunt *generatoare* ale cilindrului.

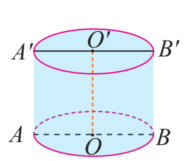


Vom spune că cilindrul circular drept este un *corp de rotație*.
Axa de rotație a unui cilindru circular drept este dreapta determinată de centrele bazelor.

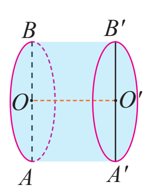
Definiție. Corpul geometric obținut prin rotația completă a unei suprafețe dreptunghiulare în jurul uneia dintre laturile sale se numește *cilindru circular drept.*

Comentariu. Un astfel de cilindru este *circular* pentru că bazele sale sunt delimitate de cercuri și este drept pentru că fiecare generatoare formează unghiuri drepte cu razele corespunzătoare în cele două baze.
Elementele cilindrului circular drept sunt: două *baze*, discuri congruente, situate în plane diferite, *centrele bazelor*, *raza* bazelor, *generatoarea*, suprafața laterală.
Observație.
1. În numeroase situații practice, atunci când ne referim la un cilindru, avem în vedere doar suprafața bazelor și suprafața sa laterală, făcând abstracție de punctele din interiorul cilindrului.
2. Convențional, pentru reprezentarea unui cilindru, când nu există alte precizări, vom nota cu O și O' centrele celor două baze și vom desena două generatoare, AA' și BB', unde A și B sunt puncte diametral opuse în baza $\mathcal{C}(O, OA)$.
Poziția axei în jurul căreia se rotește suprafața dreptunghiulară nu este relevantă, aceasta poate fi verticală, orizontală sau oblică, cilindrul generat având aceleași caracteristici.

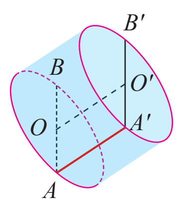
Cilindru cu axa verticală



Cilindru cu axa orizontală



Cilindru cu axa oblică

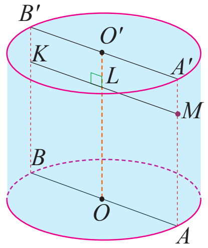


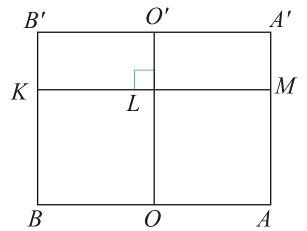
În desenele alăturate: discul de centru O și rază AO, respectiv discul de centru O' și rază $A'O'$ sunt bazele cilindrului.
Segmentele OA și OB sunt raze ale unei baze, iar $A'O'$, $O'B'$ sunt raze ale celeilalte baze. Razele celor două baze sunt congruente și se notează, de regulă, cu R.
Segmentele AA' și BB' sunt generatoare ale cilindrilor și se notează, de regulă, cu G.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1. Demonstrați că dacă M este un punct oarecare pe suprafața laterală a cilindrului, atunci simetricul său față de dreapta OO' aparține suprafeței cilindrului.
(Axa de rotație a cilindrului este *axă de simetrie* pentru suprafața sa laterală.)

Demonstrație. Dreapta OO' este axa cilindrului cu raza R. Fie M un punct situat pe suprafața laterală a cilindrului și AA' generatoarea care îl conține. Reprezentăm diametrele AB și $A'B'$, în cele două baze. Atunci $ABB'A'$ este dreptunghi format prin alăturarea dreptunghiurilor congruente $OBB'O'$ și $OAA'O'$.





În planul (ABM), construim $ML \perp OO'$. $L \in OO'$ și fie K, punctul de intersecție a dreptelor ML și BB'.
Atunci, $OBKL$ și $OAML$ sunt dreptunghiuri congruente și $KL = OB = OA = ML$, deci K este, în același timp, simetricul punctului M față de dreapta OO'și punct al generatoarei BB', adică aparține suprafeței cilindrului.

Observație. În demonstrația de mai sus am folosit raționamente uzuale din geometria plană (construcții, proprietăți ale figurilor plane), toate aplicate într-un plan convenabil ales. Pentru aceasta, am făcut abstracție de elementele cilindrului care nu aparțin acelui plan. Privind planul ca și cum ar fi în planul cărții, am obținut figura plană, în care raționamentul este ușor de construit și de urmărit.
Acest demers metodic face din geometria în spațiu o *construcție* care folosește conceptele și rezultatele geometriei plane într-un mod interesant, plăcut, util și practic.

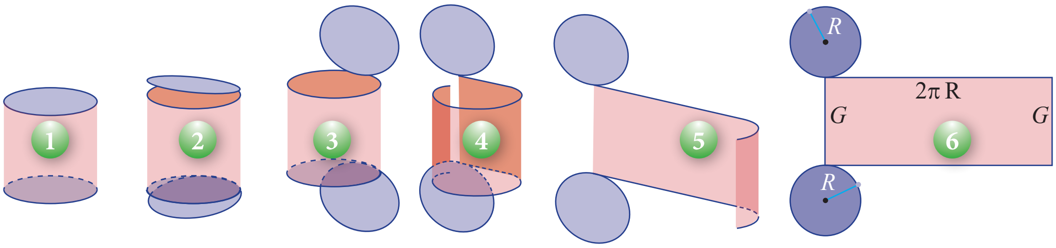
Temă de portofoliu

Demonstrați că afirmația din **Aplicația 1** rămâne adevărată și dacă M este situat pe baze sau în interiorul cilindrului, deci „Axa de rotație a cilindrului circular drept este *axă de simetrie* a acestuia”.

Aplicația 2. Considerăm cilindrul circular drept, având raza R și generatoarea G. Așezați cilindrul, proaspăt vopsit, pe un carton, pe planul băncii, astfel încât o generatoare să fie inclusă în acest plan. Rostogoliți cilindrul, până când aceeași generatoare ajunge din nou pe bancă. Ridicați cilindrul și lăsați baza să „se așeze”, pe planul băncii, apoi procedați la fel cu cealaltă bază. Descrieți suprafața obținută.

Soluție. Rulând cilindrul în plan, colorează o suprafață dreptunghiulară care are ca dimensiuni generatoarea cilindrului și lungimea cercului bază. Cele două baze vor colora două discuri tangente la câte una din laturile dreptunghiului.
Practic, ne imaginăm că decupăm bazele după cercurile care le delimitează, apoi tăiem suprafața laterală a cilindrului după o generatoare. Obținem astfel, în plan, două discuri de raze egale (bazele) și un dreptunghi care are ca dimensiuni generatoarea cilindrului și lungimea cercului bază și spunem că am realizat desfășurarea cilindrului în plan.

Imaginile alăturate prezintă câteva etape din realizarea desfășurării unui cilindru.



MINITEST La cerințele următoare alegeți varianta corectă; doar un răspuns este corect.

1. Dacă suprafața laterală a unui cilindru se desfășoară după un dreptunghi cu dimensiunile G, respectiv 12,6 cm, atunci cea mai bună aproximare a razei bazei este:			
A. 1,5 cm	B. 2 cm	C. 2,5 cm	D. 3 cm
2. Raza bazei unui cilindru este 3 dm.Dacă raportul dintre generatoarea cilindrului și diametrul bazei este 5/2, lungimea generatoarei este:			
A. 7,5 dm	B. 75 cm	C. 15 dm	D. 15 cm
3. Pătratul $ABCD$, înscris în cercul de la baza unui cilindru, are aria 8 dm^2. Raza bazei este:			
A. 4 dm	B. 2 cm	C. 2 dm	D. 4 cm

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Fie $ABCD$ un dreptunghi. Efectuăm o rotație completă a dreptunghiului în jurul laturii AB. Reprezentați pe caiete, printr-un desen, corpul descris.

2 Desfășurarea în plan a suprafeței laterale a unui cilindru circular drept este un pătrat. Calculați raportul dintre raza și generatoarea cilindrului.

3 Un dreptunghi se rotește în jurul lungimii și apoi în jurul lățimii, obținând de fiecare dată câte un cilindru.

a) Realizați un desen cu cei doi cilindri obținuți.

b) Reprezentați desfășurarea în plan a cilindrului în fiecare caz.

c) Notăm a, b dimensiunile dreptunghiului, $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ ariile suprafețelor obținute prin desfășurarea celor doi cilindri.

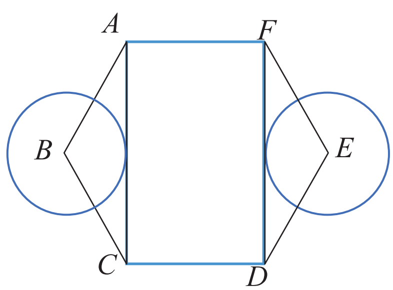
Dacă $\frac{a}{b}=\sqrt{2}$, aflați raportul $\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2}$.

4 Dreptunghiul $ABCD$ este desfășurarea în plan a suprafeței laterale a unui cilindru circular drept, cu generatoarea de lungime 24 cm. Știind că punctul P este mijlocul segmentului AB și $CP = 40$ cm, aflați lungimea razei cilindrului.

5 **a)** Punctele O și O' sunt mijloacele laturilor AB, respectiv CD, ale dreptunghiului $ABCD$. Se rotește dreptunghiul în jurul dreptei OO'. Reprezentați printr-un desen corpul obținut, apoi numiți elementele acestuia.

b) Punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv CD, ale pătratului $ABCD$. Se rotește pătratul în jurul dreptei MN. Reprezentați printr-un desen corpul geometric obținut, apoi numiți elementele acestuia.

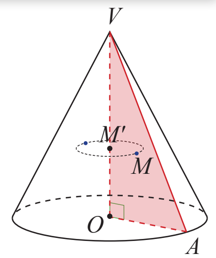
6 În imaginea de mai jos, $ABCDEF$ este hexagon regulat. Punctele B și E sunt centrele cercurilor. Stabiliți, argumentat, dacă în configurația dată, este reprezentată desfășurarea unui cilindru circular drept.



L6. Conul circular drept: reprezentare, elemente caracteristice, desfășurare

Rezolvăm și observăm

1. Considerăm triunghiul dreptunghic VOA, cu $\sphericalangle VOA = 90°$. Rotim complet suprafața triunghiulară VOA în jurul catetei VO (până când suprafața triunghiulară ajunge din nou în poziția inițială). Identificați în trusa de geometrie un corp care ar putea fi generat în acest mod.



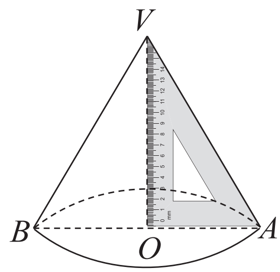
Fie VOA o suprafață triunghiulară, pe care o rotim în jurul dreptei VO numită *axă de rotație*. Punctul A va descrie cercul de centru O și rază OA. Fiecare punct M, situat pe suprafața triunghiulară VOA, va descrie, la rândul său, un cerc, având centrul M', pe segmentul închis VO și de rază $MM' \perp VO$. Punctul V și toate punctele situate pe segmentul închis VO sunt fixe.
Corpul obținut în acest fel se numește *con circular drept*.
Discul de centru O și rază OA este *baza* conului. Punctul V este vârful conului.
Segmentul VA și orice alt segment VP, cu $P \in \mathcal{C}(O, OA)$ sunt *generatoare* ale conului.
Conul circular drept este un *corp de rotație*.
Axa de rotație a conului circular drept este dreapta determinată de vârful conului și centrul bazei.

Definiție. Corpul geometric obținut prin rotația completă a unei suprafețe triunghiulare, mărginite de un triunghi dreptunghic în jurul uneia dintre catetele sale se numește *con circular drept*.

Reformulare. Dacă VOA este triunghi dreptunghic ($\sphericalangle VOA = 90°$), atunci reuniunea segmentelor închise VM, unde M este situat pe discul de centru O și rază OA, formează *conul circular drept* pentru care discul de centru O și rază OA este bază, iar punctul V este vârf.
Pentru simplificarea exprimării, deoarece am definit numai conul circular drept, convenim să-l numim, simplu, *con*.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Aplicația 1. Fixați echerul pe o foaie de hârtie așezată pe suprafața băncii. Rotiți echerul în jurul catetei verticale și imaginați-vă *corpul* geometric a cărei suprafață ar putea fi generată în acest fel.

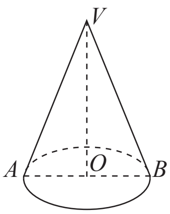
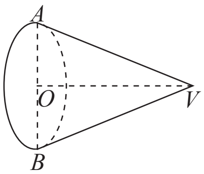
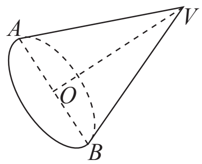


Soluție. Fie AOV triunghiul determinat de vârfurile echerului ($\sphericalangle VOA = 90°$). Rotim echerul în jurul catetei VO, astfel încât cateta OA să rămână în planul foii de hârtie. Prin rotirea catetei AO se obține un disc cu centrul în O și de rază OA. Fiecare punct al ipotenuzei descrie câte un cerc, având centrul pe cateta OV, deci ipotenuza AV *generează*, prin rotire, suprafața laterală a conului circular drept, cu baza $\mathcal{C}(O, OA)$ și cu vârful V.

Observație. **1.** În numeroase situații practice, atunci când ne referim la un con, avem în vedere doar suprafața bazei și suprafața laterală a conului, făcând abstracție de punctele din interiorul său.

2. Convențional, pentru reprezentarea unui con, când nu există alte precizări, vom nota cu O centrul bazei și vom desena două generatoare, AV și BV, unde A și B sunt puncte diametral opuse în baza $\mathcal{C}(O, R = OA)$.

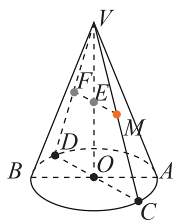
Poziția axei în jurul căreia se rotește suprafața triunghiulară nu este relevantă; aceasta poate fi verticală, orizontală sau oblică, conul generat având aceleași caracteristici.

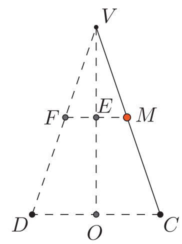
Conul cu axa verticală	Conul cu axa orizontală	Conul cu axa oblică
		

În desenele alăturate, punctul V este vârful conului.
Discul de centru O și rază OA este baza conului.
Segmentele OA și OB sunt raze ale bazei conului și lungimile lor se notează, de regulă, cu R.
Segmentele VA și VB sunt generatoare ale conului și lungimile lor se notează, de regulă, cu G.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Aplicația 2. După modelul prezentat la cilindru, arătați că *axa de rotație* a conului este *axă de simetrie* pentru conul circular drept.



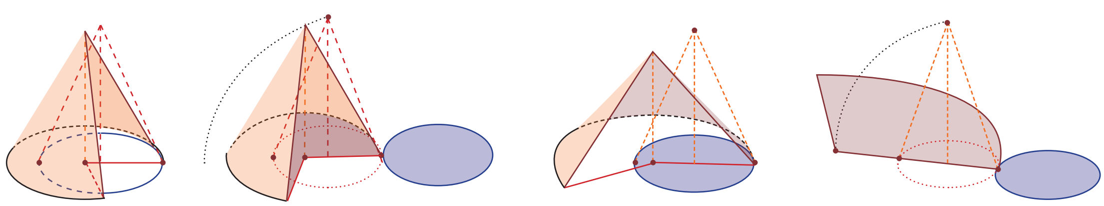


Indicație. Intuitiv, folosim figurile alăturate pentru a demonstra proprietatea de simetrie față de dreapta VO a suprafeței laterale a conului.
Considerăm un punct M pe suprafața laterală, CV generatoarea pe care este situat punctul M, și D punctul diametral opus lui C, pe cercul de bază.
Construim $ME \perp VO$, $E \in VO$ și notăm cu F intersecția dintre ME și VD. Demonstrăm că $EM \equiv EF$, deci F este simetricul punctului M față de VO și aparține suprafeței laterale a conului.

Temă de portofoliu

Demonstrați afirmația de la **Propoziția 2** este valabilă și pentru un punct M situat pe baza sau în interiorul conului.

Aplicația 3. Imaginile de mai jos ilustrează o metodă de desfășurare a conului circular drept.



a) Analizați imaginile și descrieți etapele parcurse pentru desfășurarea conului.
b) Descrieți suprafața obținută (desfășurarea conului).

Soluție. **a)** Se decupează baza conului și se rabatează în planul în care dorim să obținem desfășurarea.
Decupăm suprafața laterală a conului după o generatoare oarecare, apoi se aduce în planul de desfășurare.
Observație. Dacă planul de desfășurare coincide cu planul bazei, atunci baza rămâne în poziția inițială, iar suprafața laterală se decupează și se aduce în planul bazei.
b) Toate generatoarele unui con circular drept sunt congruente, iar suprafața laterală este formată din mulțimea tuturor generatoarelor. Prin urmare, desfășurarea suprafeței laterale va fi un sector de cerc, având ca rază generatoarea conului.
Concluzie. Desfășurarea conului circular drept este suprafața formată din discul de bază a conului și un sector de cerc a cărui rază este egală cu generatoarea conului și care are lungimea egală cu lungimea cercului de bază.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

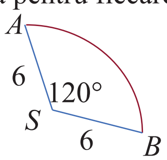
1 Prin rotirea în jurul catetelor AB, respectiv AC ale triunghiului dreptunghic ABC, se obțin două conuri circulare drepte.

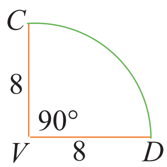
a) Realizați câte un desen pentru fiecare din cele două rotații.

b) Pentru $AB = a$ cm, $AC = b$ cm, $a > b$ copiați în caiete tabelul următor, completați și comparați rezultatele știind că R și G reprezintă raza și generatoarea conului circular drept.

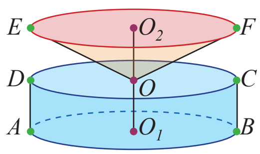
	Conul 1	Conul 2
R	b	a
G		

2 Se știe că suprafața laterală a unui con se poate obține prin „înfășurarea“ unui sector de cerc. În desenul de mai jos sunt reprezentate două sectoare de cerc, din care se obțin suprafețele laterale pentru două conuri circulare drepte. Determinați raza bazei și lungimea cercului de bază pentru fiecare dintre cele două conuri.





3 Schița unui vas ornamental este reprezentată în desenul de mai jos.



a) Identificați și numiți corpurile geometrice din care este compus vasul ornamental.

b) Precizați elementele fiecărui corp din care este compus acest vas.

4 $ABCD$ este un pătrat, $AC \cap BD = \{O\}$ și $AC = 6\sqrt{2}$ cm.

a) Rotiți pătratul în jurul diagonalei BD și descrieți corpurile geometrice obținute.

b) Numiți elementele celor două corpuri și precizați raza și generatoarea fiecărui corp.

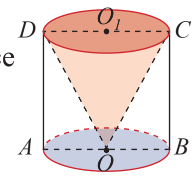
5 Lungimile laturilor triunghiului isoscel ABC sunt $AB = 2a$, $AC = 2a$, $BC = 3a$, cu $a > 0$.

a) Desenați un triunghi care să corespundă datelor problemei, apoi reprezentați axa de simetrie a triunghiului.

b) Demonstrați că dacă suprafața triunghiulară se rotește în jurul axei sale de simetrie, atunci se obține un con circular drept.

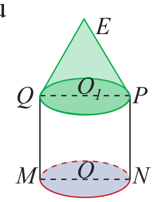
c) Precizați lungimea generatoarei și lungimea razei conului obținut.

6 Priviți și analizați figurile alăturate.



a) Numiți corpurile geometrice reprezentate și elementele lor.

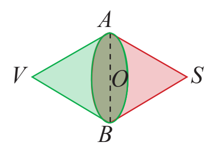
b) Determinați raza și generatoarea conului, respectiv ale cilindrului pentru următoarele situații:



b1. $ABCD$ este pătrat, $AB = 6$ cm, O este mijlocul segmentului AB.

b2. $MNPQ$ este pătrat, PQE este triunghi echilateral, $\mathcal{P}_{MNPEQ} = 20$ cm.

7 Piesa din figură se obține alăturând două conuri circulare drepte care au aceeași bază, de centru O și rază OA.



a) Numiți elementele fiecărui con.

b) Arătați că punctele V, O, S sunt coliniare.

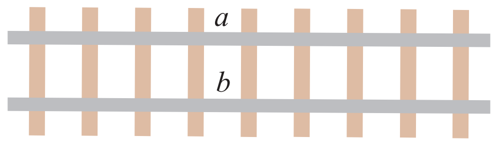
c) Dacă $VASB$ este romb, $VS = 40\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle AVB = 60^\circ$, calculați raza și generatoarea fiecărui con.

3 Paralelism în spațiu

L1. Drepte paralele, unghiul a două drepte în spațiu

Geometria s-a conturat, în ansamblu, printr-un efort de interpretare a realității fizice care ne înconjoară, rezultând modelări din ce în ce mai fidele ale acesteia. Modelarea prin mărimi numerice este benefică, dar nu este suficientă.

Gândindu-ne, de exemplu, la o locomotivă care se deplasează *rectiliniu*[1], știm că aceasta *trage o garnitură cu o anumită forță* (mărimea forței fiind exprimată printr-un număr), dar trebuie să precizăm *direcția* pe care această forță acționează.

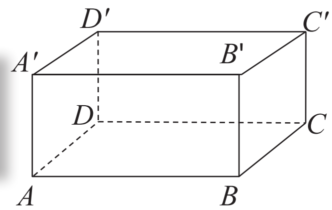


Roțile locomotivei merg pe *două șine* care pot avea ca model simplificat *două drepte*, evident situate în același plan și paralele.

Modelarea obiectelor fizice cu ajutorul segmentelor de dreaptă este una dintre cele mai simple.

Rezolvăm și observăm

Aplicația 1. a) Aplicați *axioma paralelelor* muchiilor AB, AD, respectiv AA' și vârfurilor care nu aparțin acestora, în paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$.
b) Găsiți patru perechi de drepte (suport ale muchiilor) care sunt necoplanare.

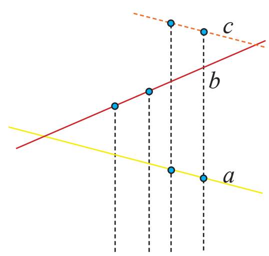


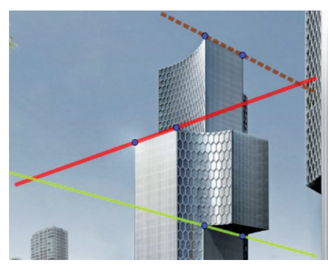
Soluție. **a)** Singura paralelă la dreapta AB, prin punctul A', este $A'B'$, prin punctul C este CD, iar prin punctul C' este $C'D'$. Procedăm la fel pentru celelalte segmente.
b) Dreptele care nu sunt nici paralele, nici concurente cu AB sunt DD', CC', $A'D'$ și $B'C'$. Se formează, astfel, perechile de drepte necoplanare AB și DD', AB și CC', AB și $A'D'$, AB și $B'C'$.

În geometria plană, două drepte distincte sunt sau *paralele* (nu au niciun punct comun) sau *concurente* (au exact un punct comun).

În spațiu, am aflat deja că există drepte care nu sunt nici concurente, nici paralele. Este vorba despre drepte *necoplanare*.

Problemă. Observați următoarele două desene. Decideți dacă dintre dreptele a, b, c există două drepte care au puncte comune.





Analizând primul desen, nu putem stabili cu certitudine că dreptele reprezentate au puncte comune sau nu au astfel de puncte. Dreptele a și b, ca și dreptele b și c, par să se intersecteze. Avem nevoie de informații suplimentare. Dreptele a și c ar putea fi paralele, dar nu suntem siguri.

Clădirea ale cărei muchii au fost *modelate* ca drepte ne oferă suficiente date să răspundem corect. Dreptele a și c sunt coplanare și corespund unor muchii paralele, deci nu au puncte comune. Dreptele a și b sunt necoplanare, ca și dreptele b și c, prin urmare nu au puncte comune.

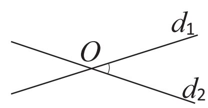
[1] *rectiliniu* = în linie dreaptă.

În reprezentarea plană a figurilor geometrice spațiale, convențiile trebuie respectate cu strictețe.
Dacă în geometria plană, o figură realizată corect oferă o viziune generală asupra variantelor de abordare a problemei, asupra relațiilor elementelor care apar, vom constata că, în spațiu, desenul nu este suficient, el arată doar „o față" a configurației. Cu puțin antrenament, folosindu-ne imaginația, vom reuși să „vedem în spațiu", adică să intuim poziții, relații, măsuri pe care desenul nu ni le poate da.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

A. Unghiul a două drepte, în spațiu

Pentru orice două drepte din spațiu, putem vorbi de unghiul format de acestea.
Valorificând informația că, în spațiu, două drepte pot fi identice, paralele, concurente sau necoplanare, apar următoarele situații:
1. Dacă $d_1 = d_2$, atunci $\sphericalangle(d_1, d_2) = 0°$. (Două drepte identice formează un unghi nul.)
2. Convenim că dacă $d_1 \parallel d_2$, atunci $\sphericalangle(d_1, d_2) = 0°$. (Două drepte paralele formează un unghi nul.)
3. Dacă dreptele d_1 și d_2 sunt concurente, atunci acestea determină planul (d_1, d_2).
În planul (d_1, d_2), cele două drepte determină 4 unghiuri, în jurul punctului de intersecție, mai precis, două perechi de unghiuri opuse la vârf.
Oricare două unghiuri adiacente dintre cele patru sunt suplementare.

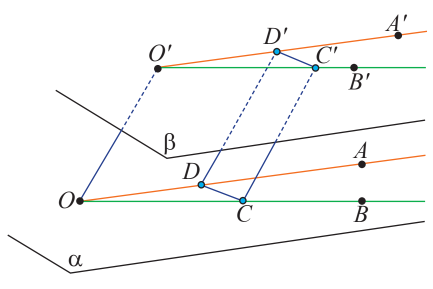


Cea mai mică dintre măsurile celor patru unghiuri formate în jurul punctului O se numește *măsura unghiului* format de dreptele d_1 și d_2, pe care o notăm $\sphericalangle(d_1, d_2)$.

4. Elementul specific geometriei în spațiu se referă la unghiul format de două drepte necoplanare.
Vom formula o definiție pentru unghiul a două drepte, folosind cunoștințele de geometrie plană, care să cuprindă toate cazurile posibile.
Demonstrăm, mai întâi, că rezultatul din geometria plană referitor la congruența sau suplementaritatea unghiurilor cu laturile respectiv paralele rămâne valabil și pentru geometria în spațiu.

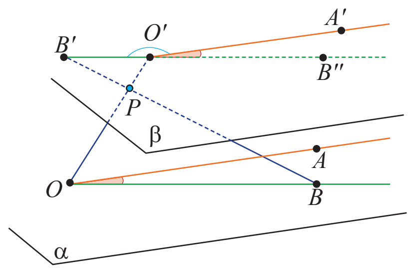
Propoziția 1. Dacă unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle A'O'B'$ au laturile respectiv paralele, $OA \parallel O'A'$, $OB \parallel O'B'$, atunci $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'O'B'$ sau $\sphericalangle AOB + \sphericalangle A'O'B' = 180°$.
Demonstrație. Notăm cu α, respectiv β, planele (AOB), respectiv $(A'O'B')$.

Cazul 1: Dacă în planele $(OA, O'A')$ și $(OB, O'B')$ dreapta OO' nu intersectează segmentele AA' și BB', considerăm punctele C și D pe segmentele OA, respectiv OB și punctele C' și D' pe segmentele $O'A'$, respectiv $O'B'$, astfel încât $OO' \parallel CC' \parallel DD'$. Patrulaterele $OO'C'C$ și $OO'D'D$ sunt paralelograme (laturile opuse sunt respectiv paralele), deci $OC \equiv O'C'$ și $OD \equiv O'D'$. Mai mult, CC', OO' și DD' sunt paralele și congruente, adică $CC'D'D$ este paralelogram și rezultă $CD \equiv C'D'$.
Aplicând cazul de congruență L.L.L. rezultă $\Delta OCD \equiv \Delta O'C'D'$, adică $\sphericalangle COD \equiv \sphericalangle C'O'D'$ sau $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'O'B'$.



Cazul 2: Dacă dreapta OO' intersectează atât segmentul AA', cât și BB', vom considera $O'A''$, respectiv $O'B''$ semidreptele opuse semidreptelor $O'A'$, respectiv $O'B'$. Obținem $\sphericalangle A''O'B'' \equiv \sphericalangle A'O'B'$, ca unghiuri opuse la vârf. Se demonstrează similar că $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'O'B'$.

Cazul 3. Considerăm că dreapta OO' nu intersectează segmentul AA', dar intersectează segmentul BB'. Fie $OO' \cap BB' = \{P\}$. Notăm cu OB'' semidreapta opusă semidreptei OB', în planul β. Evident $\sphericalangle A'O'B' + \sphericalangle A'O'B'' = 180°$, iar $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle A'O'B''$ respectă cazul 1, deci sunt congruente. Rezultă $\sphericalangle AOB + \sphericalangle A'O'B'' = 180^0$.



Același raționament se folosește și în cazul în care OO' nu intersectează segmentul BB', dar intersectează segmentul AA'.

Suntem acum pregătiți să definim unghiul a două drepte oarecare din spațiu:

Definiție. Unghiul a două drepte oarecare este unghiul format de paralelele la cele două drepte, printr-un punct fixat, oarecare.

Observație. Rezultatul demonstrat mai sus ne asigură că definiția nu depinde de punctul prin care se construiește paralela.
În particular, putem să ducem printr-un punct al unei drepte, paralela la cealaltă, definiția putând fi reformulată:

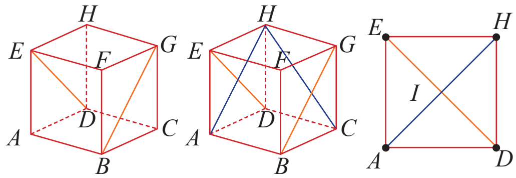
Unghiul format de dreptele oarecare d_1 și d_2 este unghiul format de dreapta d_1 cu o paralelă la d_2, printr-un punct oarecare al dreptei d_1.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1. AP Considerăm cubul din sârmă $ABCDEFGH$. Acesta are 12 muchii, 12 diagonale ale fețelor și 4 diagonale ale cubului. Determinați măsurile unghiurilor formate de perechile de drepte:
a) AE și ED; **b)** CD și HG; **c)** AD și BF; **d)** AH și CG; **e)** BG și DE; **f)** BG și CH.

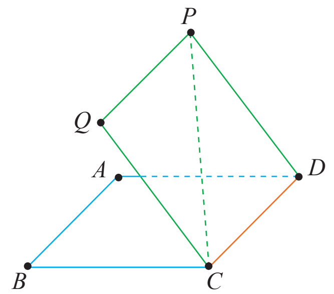
Soluție. Fețele cubului sunt suprafețe pătratice și atunci:

(1) Laturile opuse ale fiecărei fețe sunt congruente și situate pe drepte paralele.
(2) Laturile alăturate ale fețelor cubului formează unghiuri drepte.
(3) În fiecare față a cubului, diagonalele formează unghiuri de 45° cu laturile pătratului.
(4) În fiecare față a cubului, diagonalele sunt perpendiculare.



a) Dreptele AE și ED sunt concurente și $\sphericalangle(AE, ED) = \sphericalangle(AED) \overset{(3)}{=} 45°$. **b)** Dreptele CD și HG sunt paralele ($CDHG$ este pătrat) și $\sphericalangle(CD, HG) = 0°$. Celelalte sunt perechi de drepte necoplanare, deci vom *căuta* paralele la cel puțin una dintre ele. **c)** $ABFE$ este pătrat și $BF \parallel AE$. $\sphericalangle(AD,BF) = \sphericalangle(AD, AE) = \sphericalangle(DAE) \overset{(2)}{=} 90°$. **d)** $CDHG$ este pătrat și $CG \parallel HD$. Se obține $\sphericalangle(AH, CG) = \sphericalangle(AH, HD) = \sphericalangle(AHD) \overset{(3)}{=} 45°$. **e)** Determinăm unghiul format de dreptele BG și ED. Cele două drepte fac parte din fețele $ADHE$ și $BCGF$. Identificăm diagonala AH care se intersectează cu DE.
Vom demonstra că $AH \parallel BG$. Muchia AB este paralelă și congruentă cu CD, iar aceasta este paralelă și congruentă cu HG, de unde AB este paralelă și congruentă cu HG, deci $ABGH$ este paralelogram și rezultă $AH \parallel BG$. Unghiul dreptelor BG și ED este unghiul format de DE cu AH, care se găsesc pe fața $ADHE$. Detașăm această față a cubului, care este pătrat și pentru care AH și ED sunt dreptele suport ale diagonalelor.
Diagonalele pătratului sunt perpendiculare, deci $\sphericalangle(BG,DE) = \sphericalangle(AH,DE) \overset{(4)}{=} 90°$. **f)** Din $AH \parallel BG$, avem $\sphericalangle(BG, CH) = \sphericalangle(AH, CH) = \sphericalangle(AHC)$. Triunghiul AHC este echilateral, laturile lui fiind diagonale în pătrate congruente, deci $\sphericalangle(BG, CH) = 60°$.

Aplicația 2. Romburile $ABCD$ și $CDPQ$ sunt situate în plane diferite. Se știe că $\sphericalangle BAD = 140°$ și $CD \equiv CP$. Aflați măsurile unghiurilor:
a) $\sphericalangle(AB, DP)$ **b)** $\sphericalangle(PQ, BC)$.



Soluție. **a)** Laturile rombului $CDPQ$ sunt congruente și din $CD \equiv CP$, rezultă că triunghiul CDP este echilateral, $\sphericalangle CDP = 60°$.
Dreptele AB și DP sunt necoplanare. Căutăm o dreaptă concurentă cu una dintre dintre drepte și paralelă cu cealaltă dreaptă.
Deoarece $ABCD$ este romb, dreptele CD *și* DP sunt concurente și $CD \parallel AB$. Atunci $\sphericalangle(AB, DP) = \sphericalangle(CD, DP) = \sphericalangle CDP = 60°$ sau $\sphericalangle(AB, DP) = 60°$.
b) Procedăm la fel pentru aflarea măsurii unghiului $\sphericalangle(PQ, BC)$.
$CDPQ$ este romb, deci $CD \parallel PQ$. Atunci, $\sphericalangle(PQ, BC) = \sphericalangle(CD, BC) = \sphericalangle(BCD)$. Dar unghiul BCD este obtuz, $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD = 140°$ (unghiuri opuse ale rombului).
Unghiul format de dreptele PQ și BC are măsura $\sphericalangle(PQ, BC) = 180° - \sphericalangle BCD = 40°$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 În planul α se consideră unghiul AOB. Prin punctul $Q \notin \alpha$ se construiesc dreptele $QC \parallel OA$ și $QD \parallel OB$. Aflați măsura unghiului CQD în fiecare din situațiile:
a) $\sphericalangle(AOB) = 72°$; **b)** $\sphericalangle(AOB) = 123°$.

2 Unul dintre unghiurile formate de dreptele concurente a și b are măsura de $130°$. Prin punctul O, nesituat *în planul* (a, b) se duc dreptele c și d, $c \parallel a$, iar d paralelă cu bisectoarea unuia dintre unghiurile determinate de dreptele a și b. Calculați măsura unghiului $\sphericalangle(c, d)$.

3 Fie cubul $ABCDEFGH$.
a) Dați exemplu de două perechi de drepte necoplanare care formează un unghi de $90°$.
b) Dați exemplu de două drepte necoplanare care formează un unghi cu măsura de $45°$.
c) Dați exemplu de două drepte care formează un unghi cu măsura de $60°$.

4 Se consideră piramida regulată $VABC$, cu $AB = 2a$, $VA = a\sqrt{2}$. Dacă punctul M este mijlocul muchiei AB, iar N este mijlocul muchiei AC, calculați măsura unghiului format de dreptele:
a) VA și VB; **b)** VN și BC; **c)** VB și MN.

5 Rombul $ABCD$ și dreptunghiul $ADEF$ sunt situate în plane diferite, $AB = 2$ cm, $\sphericalangle(BAD) = 60°$, $AF = 2\sqrt{2}$ cm și $EC = 2\sqrt{3}$ cm. Calculați măsura unghiurilor formate de dreptele:
a) AB și EF; **b)** AE și EC;
c) BF și EC; **d)** EF și AC.

6 În paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$, $AC \cap BD = \{O\}$, $EG \cap FH = \{Q\}$.
a) Demonstrați că $AE \parallel OQ$.
b) Folosind $HD \perp BD$ calculați măsura unghiului dreptelor AE și BD.

7 În tetraedrul regulat $ABCD$, punctele M, N, P sunt mijloacele segmentelor BC, BD, respectiv CD. Determinați măsurile unghiurilor formate de dreptele:
a) AD și MN; **b)** AM și NP.

8 $ABCDEFGH$ este cub, iar punctele O și Q sunt centrele fețelor $ABCD$, respectiv $BCGF$. Calculați măsurile unghiurilor: $\sphericalangle(GO, BD)$, $\sphericalangle(HO, BG)$, $\sphericalangle(AB, OQ)$, $\sphericalangle(BO, EF)$.

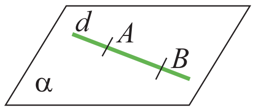
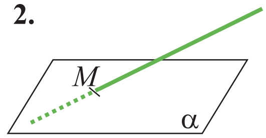
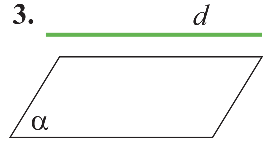
9 Punctul M este mijlocul muchiei DD' a paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, $AB = 4\sqrt{3}$ cm, $BC = 4$ cm, $CC' = 8$ cm.
a) Arătați că $MD \perp B'C'$.
b) Calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle(AM, CC')$, $\sphericalangle(AB, MC)$, $\sphericalangle(AA', MC)$.

10 Fie paralelogramul $CDEF$ și $M \notin (CDE)$, astfel încât $\sphericalangle MED = 90°$, $\sphericalangle DME = 55°$, $\sphericalangle EMF = \sphericalangle EFM = 45°$.
a) Arătați că $CF \perp ME$ și $ME \perp CD$.
b) Calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle(CF, DM)$ și $\sphericalangle(CD, MF)$.

L2. Dreaptă paralelă cu un plan

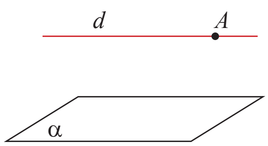
Ne amintim!

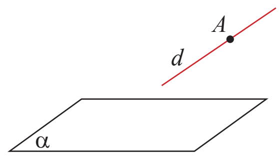
Dacă se dau o dreaptă d și un plan α, atunci drepta d are una din pozițiile:
1. Este inclusă în planul α.
2. Este secantă planului α.
3. Este paralelă cu planul α.

$d \subset \alpha \Leftrightarrow d \cap \alpha = d$ *d și* α au o infinitate de puncte comune	$d \cap \alpha = \{M\}$ d și α au un singur punct comun	$d \cap \alpha = \varnothing$ d și α nu au niciun punct comun
1. 	**2.** 	**3.** 

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiție. Dacă dreapta d și planul α nu au niciun punct comun, spunem că d este paralelă cu α și notăm $d \parallel \alpha$.



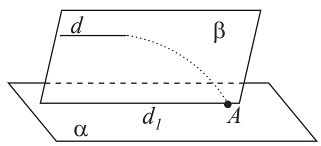


Observație. $d \parallel \alpha \Leftrightarrow d \cap \alpha = \varnothing$
Atunci când trebuie desenată o singură dreaptă d paralelă cu planul α, convenim să o reprezentăm, dacă se poate, paralelă cu una din marginile porțiunii de plan reprezentate.
Propoziția următoare furnizează un rezultat foarte util pentru formularea unei tehnici de a demonstra că o *dreaptă este paralelă cu un plan*.

Propoziția 1. Dacă o dreaptă d este paralelă cu o dreaptă d_1, inclusă într-un plan α, atunci dreapta d este paralelă cu α, sau este inclusă în α.

Ipoteză: $d \parallel d_1$ și $d_1 \subset \alpha$ | *Concluzie:* $d \parallel \alpha$ sau $d \subset \alpha$

Demonstrație. Considerăm dreapta d_1, inclusă în planul α și $d \parallel d_1$, $d \not\subset \alpha$. Vom folosi metoda reducerii la absurd.
Presupunem că $d \cap \alpha \neq \varnothing$. Cum $d \not\subset \alpha$, rezultă că d este secantă planului, adică $d \cap \alpha = \{A\}$. Dreptele paralele d și d_1 determină un plan β, diferit de α, iar $d_1 \subset \alpha$ și $d_1 \subset \beta$ adică $\alpha \cap \beta = d_1$. Cum $A \in \alpha$ și $A \in d \subset \beta$ rezultă $A \in \alpha \cap \beta$ sau $A \in d \cap d_1$, contradicție cu $d \parallel d_1$. Presupunerea este falsă, rezultând $d \cap \alpha = \varnothing$, adică $d \parallel \alpha$.

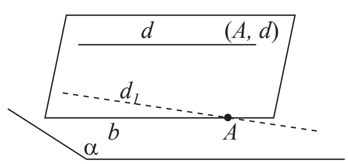


Cazul $d \subset \alpha$ implică direct concluzia propoziției.
Concluzie. Pentru a demonstra că dreapta d, care conține un punct exterior planului α, este paralelă cu acesta, este suficient să identificăm o dreaptă, inclusă în planul α, paralelă cu dreapta d.
Rezultatul următor ne oferă o tehnică da a demonstra că o *dreaptă este inclusă într-un plan*, pe baza paralelismului dintre o dreaptă și un plan.

Propoziția 2. Dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan α, iar d_1 este paralelă cu dreapta d *și* conține un punct A situat în planul α, atunci dreapta d_1 este inclusă în planul α.

Ipoteză: $d \parallel \alpha$, $d_1 \parallel d$, $A \in d_1$ și $A \in \alpha$ | *Concluzie:* $d_1 \subset \alpha$.

Demonstrație. Considerăm $d \parallel \alpha$ și $A \in \alpha$. Dreapta d și punctul exterior A determină un plan care are un punct comun cu α și este diferit de acesta, deci se intersectează după o dreaptă $b = \alpha \cap (d, A)$. Din $d \parallel \alpha$ și d, b coplanare rezultă $d \parallel b$ (d $\nparallel$ b ar implica a $\nparallel$ α). Așadar, dreptele d_1 și b sunt paralele la dreapta d, prin punctul A.



Aplicând *Axioma paralelelor,* (*A*.5), obținem $d_1 = b$ și cum $b \subset \alpha$, rezultă $d_1 \subset \alpha$.

Propoziția 3. (Consecință a Propoziției 2) Un plan α care conține o dreaptă d, paralelă cu un alt plan β, se intersectează cu acesta după o dreaptă paralelă cu d.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

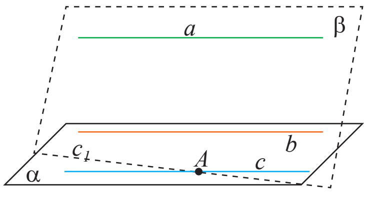
Suntem acum în măsură să demonstrăm tranzitivitatea relației de paralelism.

Propoziția 4. Dacă două drepte distincte sunt paralele cu o a treia dreaptă, atunci acestea sunt paralele.

Considerăm dreptele a, b și c, astfel încât $a \parallel b$ și $b \parallel c$.

Ipoteză: a, b și c sunt distincte, $a \parallel b$ și $b \parallel c$.	*Concluzie*: $a \parallel c$.

Demonstrație. **1.** Dacă cele trei drepte sunt toate într-un același plan, reducem problema la geometria plană, rezultatul fiind cunoscut.



2. Dacă dreptele a, b și c nu sunt incluse într-un același plan, considerăm că dreptele paralele b *și* c determină un plan α.

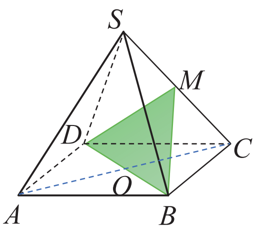
Din $a \parallel b$ și $b \subset \alpha$, conform Propoziției 1, rezultă $a \parallel \alpha$. Considerăm punctul $A \in c$, $c \subset \alpha$ și notăm $\beta = (a, A)$. Planul β conține dreapta a, și $a \parallel \alpha$. Conform Propoziției 3, planele α și β se intersectează după o dreaptă parelelă cu a. Fie $\{c_1\} = \alpha \cap \beta$, deci $c_1 \parallel a$ și $A \in c_1$. Din $b \parallel a$ și $a \subset \beta$, rezultă $b \parallel \beta$. Dar, $b \subset \alpha$, de unde, $b \parallel \alpha \cap \beta = \{c_1\}$. Dreptele c și c_1 sunt paralele prin A la dreapta b și folosind axioma paralelelor obținem $c = c_1$ și $c_1 \parallel a$, deci $c \parallel a$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Identificați:
a) drepte paralele cu planul (ABB');
b) drepte paralele cu planul (ABC').

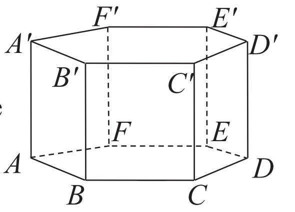
2 $ABCDMNPQ$ este paralelipiped dreptunghic.
a) Scrieți dreptele determinate de două vârfuri ale paralelipipedului, care sunt paralele cu planul (ADQ).
b) Scrieți planele determinate de trei vârfuri ale paralelipipedului, care sunt paralele cu dreapta NP.
c) Demonstrați că $MP \parallel (ACQ)$.

3 Baza piramidei $SABCD$ este pătrat. Notăm cu M mijlocul muchiei laterale SC. Demonstrați că dreapta SA este paralelă cu planul (MBD).



4 $ABCDEFGH$ este un paralelipiped dreptunghic, BK este bisectoarea unghiului CBD, $K \in CD$, iar DL este bisectoarea unghiului ADB, $L \in AB$. Demonstrați că:
a) $BK \parallel (DEL)$; **b)** $DL \parallel (BFK)$

5 Triunghiul echilateral ABC are latura $AB = 24$ cm, inclusă în planul α, iar $C \notin \alpha$. Punctul M este situat pe semidreapta AC, astfel încât $MC = 3 \cdot MA$. Determinați NC, cu N pe dreapta BC, astfel încât $MN \parallel \alpha$.



6 În desenul alăturat este reprezentată o prismă hexagonală regulată.
a) Precizați dreptele paralele cu planul (ABA').
b) Demonstrați că dreapta AB' este paralelă cu planul (CFC').

7 În tetraedrul $MNPQ$, punctele A și B sunt situate pe muchiile MN, respectiv MP, așa încât $MA = 2 \cdot AN$, $MP = 3 \cdot BP$. Paralela prin punctul G, centrul de greutate al triunghiului NPQ, la dreapta NP intersectează laturile PQ, respectiv NQ, în punctele C, respectiv D.
a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei și determinați poziția dreptei MQ față de planul (ABC).
b) Demonstrați că $NP \parallel (ABG)$.

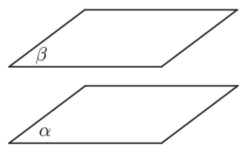
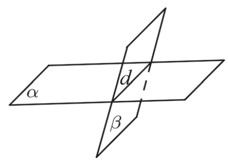
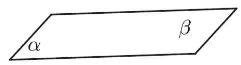
8 În tetraedrul $ABCD$, G_1 și G_2 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și ABD. Demonstrați că dreapta G_1G_2 este paralelă cu planele (BCD) și (ACD).

9 Trapezul $ABCD$ cu bazele $AB \parallel CD$ și paralelogramul $BCEF$ sunt situate în plane diferite. Stabiliți:
a) poziția dreptei AD față de planul (BEF);
b) poziția dreptei BF față de planul (DCE);
c) poziția dreptei EF față de planul (ABC).

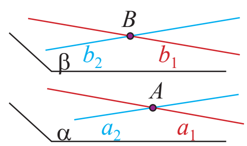
L3. Plane paralele

Ne amintim!

În spațiu, există plane paralele.
În spațiu, pentru două plane oarecare α și β, sunt posibile următoarele cazuri:

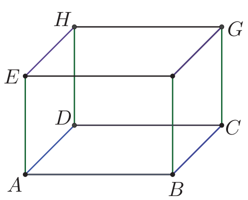
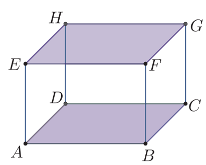
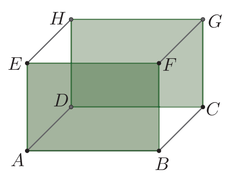
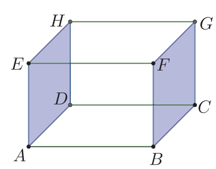
Planele sunt *paralele*. $\alpha \parallel \beta$	Planele sunt *secante* $\alpha \cap \beta = d$	Planele sunt *identice* $\alpha = \beta$
 Două plane sunt *plane paralele* dacă nu au niciun punct comun.	 Două plane sunt *plane secante* dacă intersecția lor este o dreaptă.	 Două plane *coincid* (sunt identice) dacă orice punct, care se află în unul dintre ele, aparține și celuilalt.

Dacă două drepte concurente situate în planul α sunt respectiv paralele cu două drepte situate în planul β, atunci $\alpha \parallel \beta$.
Observație. Acest rezultat ne oferă următoarea tehnică de a demonstra că două plane sunt paralele: se identifică dreptele concurente b_1 și b_2 în planul β, și dreptele concurente a_1 și a_2, în planul α, astfel încât $b_1 \parallel a_1$ și $b_2 \parallel a_2$

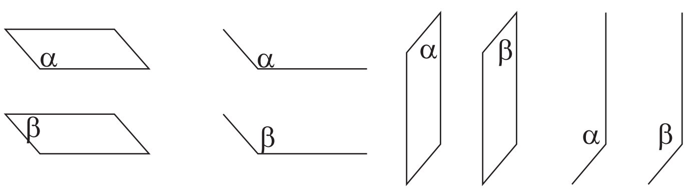


Descoperim, înțelegem, exemplificăm

1. Bazele oricărei prisme sunt situate în plane paralele.
2. Bazele cilindrului sunt situate în plane paralele.
3. În paralelipiped, oricare două fețe opuse sunt situate în plane paralele.

			
ABCDEFGH este paralelipiped.	$(ABCD) \parallel (EFGH)$	$(ABFE) \parallel (DCGH)$	$(ADHE) \parallel (BCGF)$

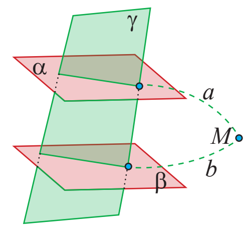
Remarcă. Reprezentarea bidimensională a două plane paralele din spațiu se va face prin două paralelograme cu laturile respectiv paralele sau două unghiuri cu laturile respectiv paralele.



Vom constata că relația de paralelism între plane este folositoare în multe situații practice. Rezultatele geometrice următoare stabilesc unele conexiuni cu realitatea înconjurătoare, generalizarea unora dintre ele fiind foarte utilă.

Propoziția 1. (Teorema fierăstrăului) Două plane paralele se intersectează cu un plan secant după două drepte paralele.

Demonstrație. Considerăm planele paralele $\alpha \parallel \beta$ și γ un plan secant acestora. Notăm $\alpha \cap \gamma = a$ și $\beta \cap \gamma = b$, urmărind să arătăm că $a \parallel b$. Metoda reducerii la absurd ne scoate din impas. Presupunem că $a \cap b = \{M\}$. Din $M \in a$, $a \subset \alpha$ și $M \in b$, $b \subset \beta$, avem $M \in \alpha \cap \beta$, adică $\alpha \nparallel \beta$, rezultat care contrazice ipoteza. Presupunerea este falsă, rezultă $a \parallel b$.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Proprietatea de *tranzitivitate* se păstrează și pentru relația de *paralelism* între plane.

Aplicația 1. Dacă planele α și γ sunt plane distincte, iar β este un plan astfel încât $\alpha \parallel \beta$ și $\beta \parallel \gamma$, atunci $\alpha \parallel \gamma$.

Reformulare. Două plane distincte, paralele cu un al treilea plan, sunt paralele între ele.

Ipoteză: $\alpha \neq \gamma$, $\alpha \parallel \beta$ și $\beta \parallel \gamma$.	*Concluzie*: $\alpha \parallel \gamma$.

Soluție. Presupunem că $\alpha \nparallel \gamma$ și deducem că există $A \in \alpha \cap \gamma$. Conform consecinței de mai sus, prin A trece un singur plan paralel cu β, deci $\alpha = \gamma$, contradicție cu ipoteza că $\alpha \neq \gamma$. Presupunerea este falsă și $\alpha \parallel \gamma$.

Propoziția 2. (Teorema lui Thales în spațiu) Trei sau mai multe plane paralele determină, pe două secante oarecare, segmente proporționale.

Ipoteză: $\alpha \neq \gamma$, $\alpha \parallel \beta$ și $\beta \parallel \gamma$, dreapta d_1 intersectează planele α, β, γ în punctele A_1, B_1, respectiv C_1, iar dreapta d_2 le intersectează în A_2, B_2, respectiv C_2.	*Concluzie*: $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1} = \dfrac{A_2B_2}{B_2C_2}$.

Demonstrație. Ne vom limita la cazul a trei plane paralele: $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$ pe care le intersectăm cu două drepte d_1 și d_2 în punctele A_1, A_2, B_1, B_2, respectiv C_1, C_2.

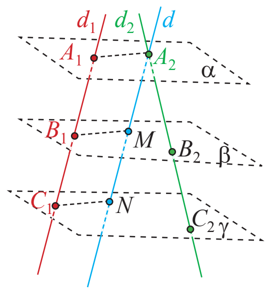
Cazul 1: Dreptele d_1 și d_2 *sunt coplanare.* (Consultați manualul digital.)

Cazul 2: Dreptele d_1 și d_2 *sunt necoplanare.*

Construim paralela la d_1, prin A_2, care intersectează planele β și γ în punctele M, respectiv N. Dreptele $d_1 \parallel d$ determină planul (d_1, d), iar congruența segmentelor (laturi ale paralelogramelor) implică $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1} = \dfrac{A_2M}{MN}$.

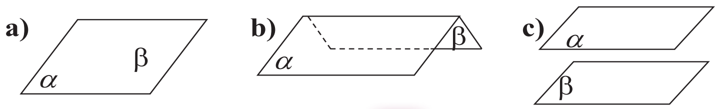
Dreptele d_2 și d sunt concurente, deci coplanare și, conform cazului 1, rezultă proporționalitatea segmentelor: $\dfrac{A_2M}{MN} = \dfrac{A_2B_2}{B_2C_2}$.

În concluzie, obținem $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1} = \dfrac{A_2B_2}{B_2C_2}$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Analizați figurile următoare și precizați pozițiile relative ale planelor α și β.



2 Completați pe caiet spațiile libere astfel încât următoarele afirmații să fie adevărate.
a) Printr-un punct exterior planului α, se poate construi … plan paralel cu α.
b) Dacă α ∥ β și β ∥ γ, atunci … sau … .
c) Dacă $a \cap b = \{M\}$ și $a \parallel \alpha$, $b \parallel \alpha$, atunci planele (a,b) și α sunt … .

3 Fie *ABCDA'B'C'D'* un paralelipiped. Precizați pozițiile relative ale următoarelor plane:
a) (*ABC*) și (*A'B'D'*);
b) (*ACC'*) și (*BDD'*);
c) (*ACC'*) și (*A'B'C'*);
d) (*ADD'*) și (*BCC'*).

4 *ABCDEFGH* este un paralelipiped dreptunghic, punctele *O* și *Q* sunt centrele bazelor *ABCD,* respectiv *EFGH*, iar punctul *M* este mijlocul segmentului *BC*. Demonstrați că (*ABE*) ∥ (*MOQ*) ∥ (*CDH*).

5 Paralelogramele *ABCD* și *ABEF* sunt situate în plane diferite.
a) Demonstrați că planele (*ADF*) și (*BCE*) sunt paralele.
b) Dacă *EG* ∥ *BC*, demonstrați că planele (*EFG*) și (*ABC*) sunt sunt paralele.

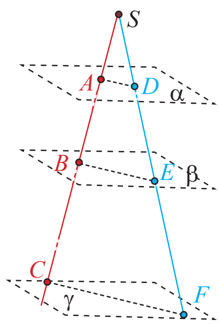
6 Punctul *S* este exterior planului pătratului *ABCD*, iar punctele *M*, *N*, *P*, *Q* sunt mijloacele segmentelor *SA*, *SB*, *SC,* respectiv *SD*. Demonstrați că punctele *M*, *N*, *P*, *Q* sunt coplanare și planul lor este paralel cu planul (*ABC*).

7 Prin vârfurile dreptunghiului *ABCD* se construiesc dreptele paralele *AA'*, *BB'*, *CC'* și *DD'*, unde *A'*, *B'*, *C'* și *D'* sunt situate de aceeași parte a planului (*ABC*).
a) Demonstrați că (*ABB'*) ∥ (*CDD'*) și (*ADD'*) ∥ (*BCC'*)
b) Dacă *AA'* = 0,1 m, *BB'* = 1 dm, *CC'* = 10 cm și *DD'* = 100 mm, arătați că (*ABC*) ∥ (*A'B'D'*)

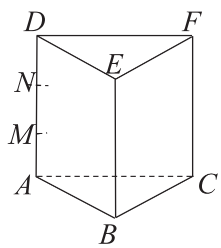
8 Planele α, β, γ sunt paralele, punctele $A, B \in \alpha$ și $C, D \in \beta$. Dreptele *AC*, *BC*, *BD* și *AD* intersectează planul γ în punctele *E*, *F*, *G,* respectiv *H*. Dacă dreptele *AB* și *DC* sunt necoplanare, demonstrați că *E, F, G, H* determină un paralelogram.

9 Semidreptele *Ox*, *Oy*, *Oz* determină pe planele paralele α, β și γ, triunghiurile *ABC*, *DEF,* respectiv *HIJ*.
a) Demonstrați că cele trei triunghiuri sunt asemenea.
b) Fie *M* mijlocul segmentului *BC* și $OM \cap \beta = \{N\}$. Demonstrați că *N* este mijlocul segmentului *EF*.
c) O dreaptă *d* conține punctele *O* și *G*, centrul de greutate al triunghiului *HIJ*. Demonstrați că dreapta *d* conține și centrele de greutate ale triunghiurilor *ABC* și *DEF*.

10 În desenul alăturat, planele α, β *și* γ sunt paralele, *SA* = 6 cm, *SC* = 36 cm, *SD* = 10 cm, *SE* = 30 cm și *BE* = 24 cm.
Calculați:
a) lungimile segmentelor *AB*, *BC* și *SF*;
b) *AD* + *CF* (suma lungimilor segmentelor *AD* și *CF*).



11 În prisma triunghiulară dreaptă *ABCDEF*, punctele *M* și *N* aparțin muchiei laterale *AD* astfel încât *AM* = *MN* = *ND*.
a) Completați desenul construind *a* ∥ *AB*, *b* ∥ *AC*, astfel încât $a \cap b = \{M\}$.
b) Construiți *c* ∥ *DE*, *d* ∥ *DF*, astfel încât $c \cap d = \{N\}$.
c) Demonstrați că $(a,b) \parallel (c, d)$.



L4. Secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate

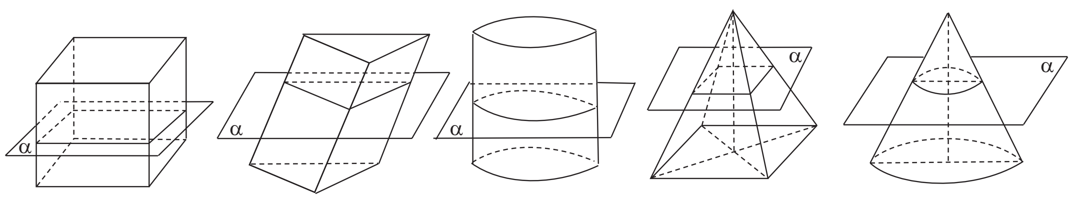
Ne amintim!

Prisma are două baze, suprafețe poligonale convexe congruente, situate în plane paralele.
Cilindrul are două baze, discuri congruente, situate în plane paralele.

Definiție. Mulțimea tuturor punctelor de intersecție dintre un corp geometric și un plan α se numește *secțiune* a corpului cu planul α.

Secțiunea depinde de poziția pe care planul o are față de corpul respectiv. Pentru început, vom considera doar plane paralele cu baza/bazele corpurilor.

Imaginați-vă că un plan α secționează (taie) un cub, o prismă triunghiulară, o piramidă, un cilindru sau un con, α fiind paralel cu baza, respectiv bazele corpurilor geometrice secționate, ca în desenul de mai jos.
Găsiți în sala de curs sau în școală, elemente care ar putea fi considerate plane care secționează corpuri geometrice. Alegeți-le pe cele paralele cu baza corpului secționat.

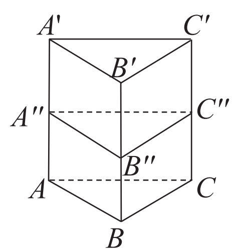


Ne propunem să răspundem la următoarele întrebări:
a) Ce corpuri rezultă prin secționarea fiecărui corp geometric printr-un plan paralel cu baza?
b) Ce proprietăți au corpurile obținute?
c) Care este *urma* lăsată, în planul α, de cele două corpuri obținute (*secțiunea*)?

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

A. Secțiuni paralele cu baza în prismă. Secțiuni paralele cu baza în cilindru

Propoziția 1. Secțiunea unei prisme printr-un plan paralel cu bazele este o suprafață poligonală congruentă cu bazele.

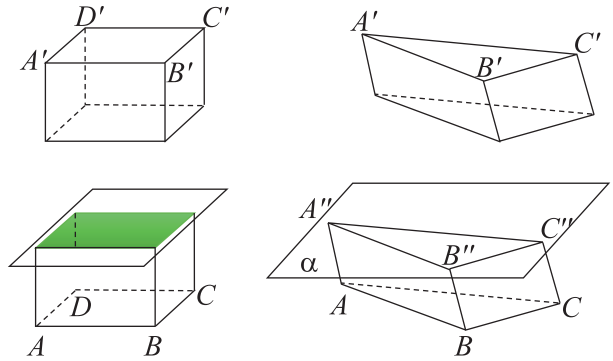


Demonstrație. Vom demonstra afirmația de mai sus doar pentru prisma triunghiulară, raționamentul fiind ușor de refăcut pentru alte cazuri. Considerăm prisma triunghiulară $ABCA'B'C'$.
Fie $\alpha \parallel (ABC)$ și A'', B'', C'' punctele în care α intersectează muchiile laterale ale prismei.
Planul (ABB') intersectează planul (ABC) după dreapta AB și planul α după dreapta $A''B''$. Cum $\alpha \parallel (ABC)$, rezultă $AB \parallel A''B''$. Dar, $AA' \parallel BB'$, deci patrulaterul $ABB''A''$ este paralelogram și rezultă $A''B'' \equiv AB$.
Analog, $B''C'' \equiv BC$ și $A''C'' \equiv AC$.
Conform cazului de congruență L.L.L, $\Delta ABC \equiv \Delta A''B''C''$, apoi $\Delta A''B''C'' \equiv \Delta A'B'C'$.

Concluzie. **a)** Prin secționarea unei prisme printr-un plan paralel cu bazele, se obțin *două prisme*.

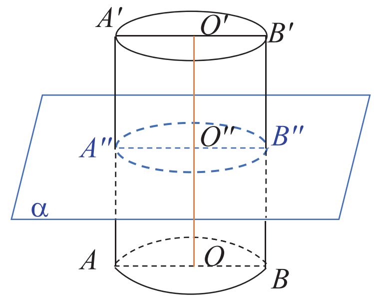
b) 1. Cele două prisme obținute prin secționare au *bazele congruente* cu cele ale prismei inițiale.
2. Dacă prisma secționată este o prismă dreaptă, atunci și prismele obținute sunt prisme drepte.
3. Dacă prisma secționată este o prismă regulată, atunci și prismele obținute sunt prisme regulate.

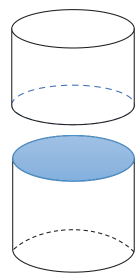
c) Secțiunea unei prisme cu un plan paralel cu bazele este o *suprafață poligonală congruentă cu bazele prismei* inițiale.



Propoziția 2. Secțiunea unui cilindru circular drept printr-un plan paralel cu bazele este un disc congruent cu bazele cilindrului.

Demonstrație. Considerăm cilindrul circular drept obținut prin rotația drepunghiului $AOO'A'$ în jurul segmentului OO'. Planul de secțiune „α” paralel cu bazele, taie OO' și AA' în O'', respectiv A''.
Aplicând teorema fierăstrăului planelor paralele tăiate de planul $(AOO'A')$ rezultă $AO \parallel A''O'' \parallel A'O'$. Cum $AA'' \parallel OO''$, patrulaterul $AOO''A''$ este paralelogram rezultând $O''A'' = OA$. Relația obținută nu depinde de punctul A, prin urmare intersecția dintre planul α și cilindrul circular drept este un disc congruent cu bazele.





Concluzie. **a)** Prin secționarea unui cilindru circular drept cu un plan paralel cu bazele, se obțin *doi cilindri* circulari drepți.

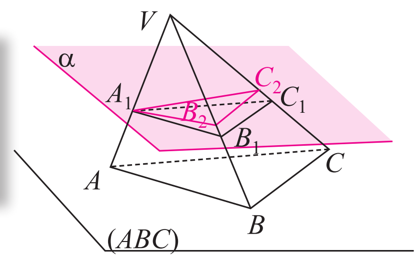
b) Cei doi cilindri obținuți prin secționare au *bazele congruente* cu cele ale cilindrului inițial.

c) Secțiunea unui cilindru cu un plan paralel cu bazele este *un disc congruent cu bazele cilindrului* inițial.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

B. Secțiuni paralele cu baza în piramidă. Secțiuni paralele cu baza în con

Aplicația 1. Pe muchiile VA, VB și VC ale tetraedrului $VABC$ considerăm punctele A_1, B_1, respectiv C_1 astfel încât $\dfrac{VA_1}{A_1A} = \dfrac{VB_1}{B_1B} = \dfrac{VC_1}{C_1C}$.
Arătați că planele $(A_1B_1C_1)$ și (ABC) sunt paralele.



Soluție. Prin A_1, situat în exteriorul planului bazei, se poate construi un plan α, paralel cu (ABC). Fie B_2 și C_2 punctele în care α intersectează muchiile laterale VB, respectiv VC. Aplicând teorema fierăstrăului pentru $\alpha \parallel (ABC)$ și planul secant (VAB) obținem $A_1B_2 \parallel AB$.

În triunghiul VAB, din ipoteză, $\frac{VA_1}{A_1A} = \frac{VB_1}{B_1B}$. Folosind reciproca teoremei lui Thales, rezultă $A_1B_1 \parallel AB$. Axioma paralelelor permite ca prin A_1 să ducem o singură paralelă la AB, deci dreptele A_1B_1 *și* A_1B_2 sunt identice, adică $B_1 = B_2$. Analog $C_1 = C_2$, adică $(A_1B_1C_1) = (A_1B_2C_2) = \alpha$ și $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$.

Remarcă. Considerând tetraedrul $VABC$, am construit printr-un punct A_1 al unei muchii laterale VA, un plan paralel cu baza. Acesta intersectează celelalte muchii laterale în B_1, respectiv C_1. Am obținut astfel piramida $VA_1B_1C_1$ care are proprietăți asemănătoare cu piramida inițială.

1. Din teorema fierăstrăului: $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$ și $BC \parallel B_1C_1$. Unghiurile triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ sunt respectiv congruente întrucât au laturile respectiv paralele. Cu cazul de asemănare (U.U.), avem $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$, raportul de asemănare fiind $k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}$.

2. Considerând fiecare față laterală, de exemplu, VAB, cu teorema fundamentală asemănării $\Delta VA_1B_1 \sim \Delta VAB$, adică egalitățile $\frac{VA_1}{VA} = \frac{VB_1}{VB} = \frac{A_1B_1}{AB} = k$. Analog, pentru celelalte fețe laterale.

Am demonstrat că dacă un plan paralel cu baza unui tetraedru intersectează muchiile laterale ale acestuia în punctele A_1, B_1, respectiv C_1, se obține o piramidă $VA_1B_1C_1$ *asemenea* cu piramida $VABC$ în sensul că:

a) unghiurile corespunzătoare sunt congruente;

b) raportul muchiilor corespunzătoare este constant și se numește raport de asemănare a piramidelor.

Observație. Rezultatele evidențiate pentru piramida triunghiulară (tetraedru) pot fi generalizate pentru o piramidă cu baza poligon convex cu n laturi, considerând un plan paralel cu baza, care secționează muchiile laterale. Obținem astfel următorul rezultat:

Propoziția 3. Secțiunea unei piramide cu un plan paralel cu baza este o *suprafață poligonală asemenea cu baza piramidei* inițiale.

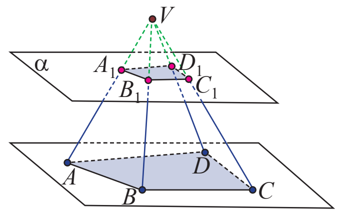
Secționarea unei piramide oarecare printr-un plan paralel cu baza generează o construcție situată între planul de secțiune și planul bazei, un corp geometric numit *trunchi de piramidă*.

Exemplu. Fie piramida patrulateră $VABCD$.

Secționăm piramida cu un plan α paralel cu baza și notăm A_1, B_1, C_1, respectiv D_1 punctele de intersecție a planului cu muchiile laterale ale piramidei.

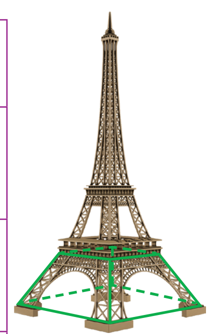
Corpul geometric obținut prin îndepărtarea piramidei $VA_1B_1C_1D_1$ (piramida *mică*) din piramida $VABCD$ (piramida *mare*) se numește *trunchi de piramidă*.

Spunem că am construit trunchiul de piramidă patrulateră $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

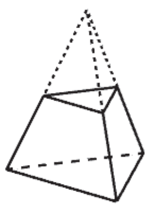
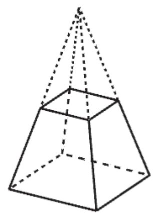
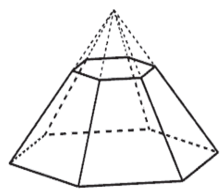


Identificăm elementele trunchiului de piramidă exemplificându-le pe trunchiul de piramidă patrulateră $ABCDA_1B_1C_1D_1$

Bazele: Baza piramidei *mari* este *baza mare* și baza piramidei *mici* este *baza mică*.	Patrulaterul $ABCD$ este baza mare, iar patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$ este baza mică.
Muchii ale bazelor: laturile poligoanelor situate în cele două plane paralele.	AB, BC, CD, AD sunt muchiile bazei mari, iar A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1 sunt muchiile bazei mici.
Muchii laterale: segmentele care rămân din muchiile piramidei *mari*, după înlăturarea piramidei *mici*.	AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sunt muchiile laterale.
Fețele laterale: suprafețele obținute din fețele laterale ale piramidei mari, după înlăturarea piramidei mici.	Suprafețele delimitate de trapezele ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, ADD_1A_1.



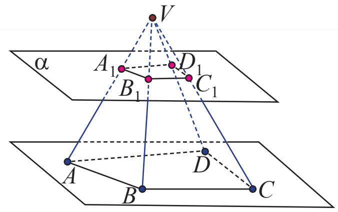
Remarcă. **1.** Planul de secțiune determină pe fețele laterale ale piramidei din care provine trunchiul, triunghiuri asemenea, având același raport de asemănare, prin urmare, are loc relația: $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{D_1A_1}{DA}$.
2. Unghiurile bazelor sunt unghiuri cu laturile respectiv paralele și sunt congruente.
În funcție de piramida din care provine, un trunchi de piramidă poate fi:
1) trunchi de piramidă triunghiulară, patrulateră, pentagonală, hexagonală, … .
2) trunchi de piramidă regulată sau trunchi de piramidă oarecare.
Reprezentarea, prin desen, a trunchiului de piramidă se realizează construind punctat piramida din care provine, apoi trasând muchiile trunchiului, muchiile bazelor și muchiile laterale.

Trunchiul de piramidă triunghiulară regulată	Trunchiul de piramidă patrulateră regulată	Trunchiul de piramidă hexagonală regulată
		

Observație. Pentru a ști că este vorba de o piramidă regulată, nu este suficient desenul. Este obligatoriu ca datele problemei să ne asigure de acest fapt.

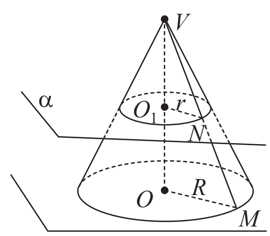
Temă de portofoliu

Considerăm piramida patrulateră $VABCD$ și planul $\alpha \parallel (ABC)$, care secționează muchiile laterale în punctele A_1, B_1, C_1, respectiv D_1 și determină piramida patrulateră $VA_1B_1C_1D_1$.
Folosind figura alăturată, precizați și argumentați relațiile între elementele corespunzătoare ale piramidelor $VA_1B_1C_1D_1$ și $VABCD$.



Aplicația 2. Intersecția unui con cu un plan paralel cu baza sa este un *disc* cu centrul pe axa de simetrie a conului.

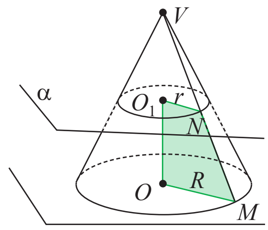
Demonstrație. Considerăm conul cu baza cercul $\mathcal{C}(O, R)$ având axa de simetrie OV și un punctul variabil $M \in \mathcal{C}(O,R)$. Prin punctul O_1 al segmentului OV ducem un plan α paralel cu baza, care taie generatoarea VM în N.
Planul (VOM) intersectează planele paralele α și planul bazei, după două drepte paralele (Teorema fierăstrăului), deci $O_1N \parallel OM$. Așadar, în triunghiul VOM, cu teorema fundamentală a asemănării, obținem: $\Delta VO_1N \sim \Delta VOM$, de unde $\frac{VN}{VM}=\frac{O_1N}{OM}=\frac{VO_1}{VO}$. Pentru M variabil pe cerc, raportul $\frac{VO_1}{VO}=k$ și $OM=R$ sunt constante, prin urmare $O_1N=\frac{VO_1\cdot OM}{VO}=k\cdot R$ este constant și notăm $O_1N=r$.
Rezultă că intersecția planului α cu suprafața conului este cercul $\mathcal{C}(O_1, r)$



Concluzie: **a)** Prin secționarea unui con circular drept printr-un plan paralel cu baza, se obțin două corpuri. Corpul situat de aceeași parte cu vârful conului secționat este un con circular drept.
b) Intersecția dintre planul α și conul circular drept este discul delimitat de cercul $\mathcal{C}(O_1, r)$.
c) Corpul rămas după înlăturarea conului mic, obținut prin secționarea unui con circular drept printr-un plan paralel cu baza se numește *trunchi de con circular drept.*

Elementele trunchiului de con sunt identificate cu ajutorul elementelor conului.

Bazele: Baza conului *mare* este *baza mare* a trunchiului, iar baza conului *mic* este *baza mică* a trunchiului de con.	Discul delimitat de cercul $\mathcal{C}(O, R)$ este baza mare, iar discul delimitat de cercul $\mathcal{C}(O_1, r)$ este baza mică.
Generatoarele trunchiului de con: segmentele determinate pe generatoarele conului secționat, după înlăturarea conului mic.	Segmentul MN este o generatoare a trunchiului de con.
Axa de simetrie a trunchiului de con: axa de simetrie a conului secționat.	Dreapta suport a segmentului OO_1 este axă de simetrie a trunchiului de con



Observație. Trunchiul de con circular drept este un corp de rotație. Acesta se poate obține prin rotirea unei suprafețe delimitate de un trapez dreptunghic în jurul laturii perpendiculare pe baze.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Fie $ABCDEFGH$ o prismă patrulateră și M, N, P, Q puncte situate pe muchiile laterale AE, BF, CG, respectiv DH, astfel încât $MA = NB = PC = QD$.

a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

b) Demonstrați că punctele M, N, P, Q sunt coplanare.

c) Numiți și descrieți corpurile geometrice obținute prin secționarea prismei cu planul (MNP).

2 Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară și punctele M, N, P intersecția diagonalelor fețelor laterale $ABB'A'$, $BCC'B'$, respectiv $ACC'A'$.

a) Demonstrați că planele (MNP) și (ABC) sunt paralele.

b) Reprezentați un desen care să evidențieze secțiunea determinată de planul (MNP) în prisma dată.

c) Calculați raportul ariilor ΔMNP și ΔABC.

d) Calculați raportul dintre aria secțiunii și aria ΔABC.

3 Piramida $VABC$ cu baza triunghiul ABC se secționează printr-un plan paralel cu baza.

a) Reprezentați piramida, planul de secțiune și punctele de intersecție ale planului cu muchiile laterale.

b) Notați punctele de intersecție ale planului de secțiune cu muchiile laterale ale piramidei și numiți corpurile obținute prin secționarea piramidei.

c) Precizați bazele și muchiile acestor corpuri.

4 Tetraedrul regulat $SABC$ este secționat printr-un plan α, paralel cu baza ABC, care conține mijlocul muchiei SA.

a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

b) Demonstrați că, dacă $\{N\} = \alpha \cap SB$ și $\{P\} = \alpha \cap SC$, atunci $SN + CP = SA$.

c) Știind că aria uneia dintre fețele tetraedrului este $4\sqrt{3}$ cm², calculați lungimile muchiilor trunchiului de piramidă format.

5 Demonstrați că, dacă AA', BB', CC', DD' sunt muchiile laterale ale unui trunchi de piramidă patrulateră, atunci acestea sunt coplanare două câte două.

6 Un cilindru circular drept are bazele $\mathcal{C}(O, r)$ și $\mathcal{C}(O', r)$, AB este un diametru al cercului $\mathcal{C}(O, r)$, iar AA', BB' sunt generatoare. Planul α, paralel cu bazele cilindrului, intersectează generatoarele AA' și BB' în punctele C, respectiv C'.

a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

b) Numiți razele și generatoarele celor doi cilindri rezultați în urma secționării.

7 Conul circular drept cu diametrul bazei $AB = 10$ cm și generatoarea $VA = 13$ cm este secționat cu un plan paralel cu baza, care conține ortocentrul triunghiului VAB. Calculați aria secțiunii.

4 Perpendicularitate

L1. Drepte perpendiculare, dreaptă perpendiculară pe un plan, distanța de la un punct la un plan

Ne amintim!

1. Unghiul dintre două drepte este unghiul neobtuz format de paralelele la cele două drepte duse printr-un punct din spațiu.
2. Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare.

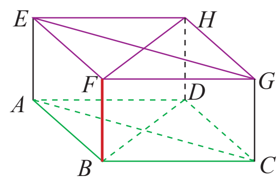
Definiție. Două drepte d_1 și d_2 sunt perpendiculare dacă formează un unghi drept.

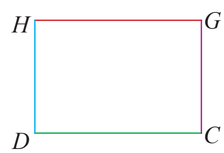
În limbaj matematic, $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \sphericalangle(d_1, d_2) = 90°$.

Rezolvăm și observăm

Exemplu. Considerăm paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$. Identificați toate muchiile, diagonalele fețelor și diagonalele paralelipipedului care formează unghiuri drepte cu muchia BF.

Soluție. Paralelipipedul dreptunghic are toate fețele dreptunghiuri. Analizăm unul din cazuri, unghiul dintre BF și GH.





Evident, dreptele BF și GH sunt necoplanare. Dreapta CG este paralelă cu BF și coplanară cu GH. Atunci, $\sphericalangle(BF, GH) = \sphericalangle(CG, GH) = \sphericalangle CGH$, care este unghi al dreptunghiului $CGHD$, adică $\sphericalangle(BF, GH) = 90°$. Conform definiției, $BF \perp HG$.

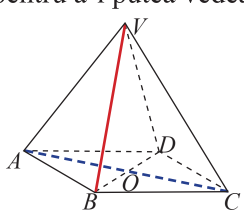
Observație. CG nu este unica paralelă la BF, printr-un punct al dreptei GH. Găsiți încă una!

Se găsesc, pe rând, următoarele drepte perpendiculare pe FB: **a)** drepte suport ale muchiilor CD, AB, EF, BC, GF, EH, AD; **b)** drepte suport ale diagonalelor fețelor: FH, EG, AC, BD.

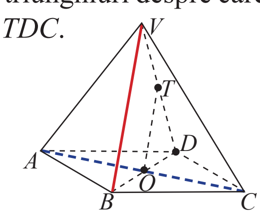
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

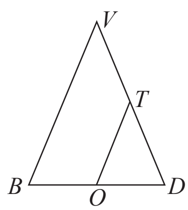
Aplicația 1. Acoperișul casei bunicuței are forma unei piramide patrulatere regulate $VABCD$, având ca bază suprafața podului casei. Arătați că muchia VB a acoperișului este perpendiculară pe diagonala AC a podului.

Soluție. Punctul convenabil al lui AC, unde putem construi paralelă la BV, este O, intersecția diagonalelor, paralela fiind inclusă în planul (VBO). Detașăm ΔVBD pentru a-l putea vedea în plan.

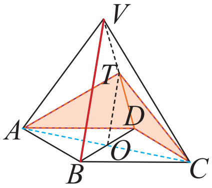


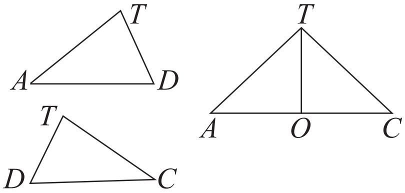
Triunghiul VBD este isoscel (muchiile laterale ale piramidei regulate sunt congruente), OT este linie mijlocie (O centrul pătratului, $OT \parallel BV$) Atunci, $\sphericalangle(VB, AC) \equiv \sphericalangle(TO, AC)$. Cercetăm triunghiul TAC, despre care bănuim că este isoscel. Încadrăm laturile TA și TC în două triunghiuri despre care demonstrăm că sunt congruente, ΔTDA și ΔTDC.





Triunghiurile TDA și TDC au $DA \equiv DC$ (laturi ale pătratului), $\sphericalangle TDA \equiv \sphericalangle TDC$ (fețele laterale ale piramidei sunt triunghiuri isoscele congruente), $TD \equiv TD$ (latură comună). Aplicând cazul de congruență L.U.L. avem $\Delta TDA \equiv \Delta TDC$, adică $TA \equiv TC$.





În triunghiul TAC isoscel, TO este mediana corespunzătoare bazei, deci și înălțime, adică $TO \perp AC$.
Concluzie: Din $TO \perp AC$ și $\sphericalangle(VB, AC) \equiv \sphericalangle(TO, AC) = 90°$, rezultă $BV \perp AC$.

Revenim la muchia laterală BF a paralelipipedului dreptunghic $ABCDEFGH$ și remarcăm că aceasta este perpendiculară pe multe drepte incluse în planul feței $ABCD$, mai precis pe: AB, BC, CD, DA, AC, BD. Acest fapt ne încurajează să cercetăm dacă BF este perpendiculară pe toate dreptele situate în planul (ABC).

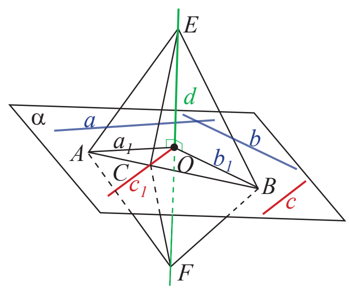
Definiție. O dreaptă d este perpendiculară pe un plan α dacă este perpendiculară pe orice dreaptă inclusă în planul α.

Pentru dreapta d perpendiculară pe planul α, vom scrie $d \perp \alpha$.
Nu este posibil să verificăm sau să demonstrăm perpendicularitatea pe toate dreptele planului (o infinitate), așa că vom folosi următorul rezultat matematic pentru a deduce tehnica de demonstrație.

Propoziția 1. Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente situate într-un plan, atunci ea este perpendiculară pe plan.

Ipoteză: $d \perp a$ și $d \perp b$ cu a și b concurente, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$
Concluzie: $d \perp \alpha$

Demonstrație. Fie a și b două drepte concurente, incluse în planul α și dreapta d astfel încât $d \perp a$, $d \perp b$. Prin punctul O, unde $\{O\} = d \cap \alpha$, considerăm paralelele la a și b, notate a_1, respectiv b_1, pe care vom considera punctele A respectiv B, diferite de O. Trebuie să demonstrăm că dacă c este o dreaptă oarecare, inclusă în α, atunci $d \perp c$.

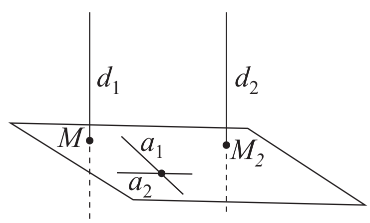


Construim, prin O, dreapta $c_1 \parallel c$ și notăm cu C intersecția ei cu AB.
Pe dreapta d, considerăm punctele E și F astfel încât O este mijlocul segmentului EF.
Din $OE \equiv OF$, $OA \equiv OA$, rezultă $\Delta OAE \equiv \Delta OAF$ (C.C.), de unde $AE \equiv AF$ **(1)**.
Din $OE \equiv OF$, $OB \equiv OB$, rezultă $\Delta OBE \equiv \Delta OBF$ (C.C.), de unde $BE \equiv BF$ **(2)**.
Folosind (1) și (2) obținem $\Delta EAB \equiv \Delta FAB$ (L.L.L.).
Rezultă $\sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle FAC$ **(3)**
Deoarece $AE \equiv AF$, $\sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle FAC$ (3), iar $AC \equiv AC$, obținem $\Delta EAC \equiv \Delta FAC$ (L.U.L.), prin urmare, $EC \equiv FC$, adică ΔEFC este isoscel, cu CO mediana corespunzătoare bazei. Rezultă CO este și înălțime, deci $CO \perp EF$.
În concluzie, $d \perp a$ și $d \perp b$ cu $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, d și a concurente, implică $d \perp c$, pentru oricare dreaptă $c \subset \alpha$, prin urmare, $d \perp \alpha$.

Aplicația 1. Orice dreaptă paralelă cu o dreaptă perpendiculară pe un plan este perpendiculară pe acel plan.

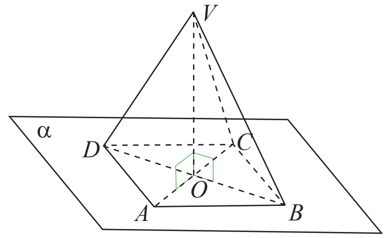
Ipoteză: $d_1 \parallel d_2$ și $d_2 \perp \alpha$
Concluzie: $d_1 \perp \alpha$

Soluție. Considerăm dreptele d_1, d_2 și planul α, astfel încât $d_1 \parallel d_2$ și $d_2 \perp \alpha$. Din $d_2 \perp \alpha$, rezultă existența dreptelor concurente a_1 și a_2, în planul α, cu $d_2 \perp a$ și $d_2 \perp b$. Paralelismul păstrează măsura unghiurilor, adică $d_1 \perp a_1$ și $d_1 \perp a_2$, deci $d_1 \perp \alpha$.



Aplicația 2. Demonstrați că dreapta care unește vârful piramidei patrulatere regulate cu centrul bazei sale este perpendiculară pe planul bazei.

Soluție. Considerăm piramida patrulateră $VABCD$, cu baza în planul α și notăm cu O intersecția diagonalelor bazei. Dorim să arătăm că $VO \perp \alpha$. Conform Propoziției 1, va trebui să demonstrăm că VO este perpendiculară pe două drepte concurente, incluse în plan. Considerăm triunghiurile VBD și VAC, care sunt isoscele ($VD \equiv VB \equiv VA \equiv VD$), iar VO este mediana corespunzătoare bazelor, în fiecare, deci VO este și înălțime, adică $VO \perp AC$ și $VO \perp BD$. Am găsit în planul bazei, dreptele concurente AC și BD pe care VO este perpendiculară. Folosind Propoziția 1, rezultă $VO \perp \alpha$.



Remarcă. Rezultatul din Propoziția 1 este printre cele mai importante și utile rezultate ale geometriei în spațiu, mai ales atunci când, în probleme, se dă sau putem arăta, că avem perpendicularitatea unei drepte pe un plan. Din această ipoteză, rezultă o bogăție, o infinitate de rezultate: dreapta este perpendiculară pe orice dreaptă dorim noi să alegem din planul respectiv

Propoziția 2. Printr-un punct din spațiu, există o singură dreaptă perpendiculară pe un plan dat.

Propoziția 3. Două drepte perpendiculare pe același plan sunt drepte paralele.

Propoziția 4. Printr-un punct M din spațiu, există un singur plan perpendicular pe o dreaptă dată d, numit planul perpendicular pe d, care trece prin M.

Propoziția 5. Două plane distincte, perpendiculare pe aceeași dreaptă, sunt paralele.

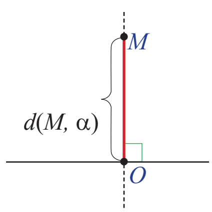
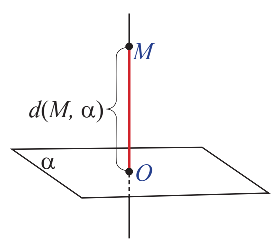
Consultați manualul digital pentru demonstrația propozițiilor 2, 3 și 4.

Temă de portofoliu

Folosind metoda reducerii la absurd, urmând modelele de demonstrație din manualul digital pentru propozițiile 2.3 și 4, demonstrați propoziția 5.

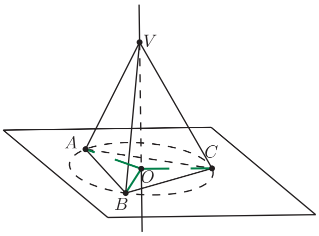
Pentru geometria în spațiu, ca și în geometria plană, definirea distanței dintre două obiecte geometrice, cunoașterea și folosirea corectă a acestei noțiuni sunt de maximă importanță în modelarea realității prin geometrie. Definiția distanței de la un punct la o dreaptă, pe care o cunoaștem de la geometrie plană, rămâne valabilă și în spațiu.

În mod asemănător, vom defini distanța de la un punct la un plan.

În plan		**În spațiu**	
Se consideră punctul M și dreapta d.		Se consideră punctul M și planul α.	
Construim din M, dreapta d_1 perpendiculară pe d, care este unică.		Construim din M, dreapta d_1 perpendiculară pe α, care este unică.	
Notăm $\{O\} = d_1 \cap d$. Uzual, O se numește *piciorul perpendicularei* din M pe dreapta d.		Notăm $\{O\} = d_1 \cap \alpha$. Uzual, O se numește *piciorul perpendicularei* din M pe planul α.	
Definiția 1. Lungimea segmentului MO este distanța de la punctul M la dreapta d; se notează cu $d(M, d)$.		*Definiția 2.* Lungimea segmentului MO este distanța de la punctul M la planul α; se notează $d(M, \alpha)$.	

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 3. Arătați că dreapta determinată de vârful piramidei triunghiulare regulate și centrul bazei este perpendiculară pe planul bazei.



Soluție. Din vârful V al piramidei $VABC$ considerăm $VO \perp (ABC)$. Se formează triunghiurile dreptunghice ΔVOA, ΔVOB și ΔVOC congruente (cazul I.C.). Congruența triunghiurilor, conduce la $OA \equiv OB \equiv OC$, adică O este centrul cercului circumscris triunghiului echilateral ABC, deci centrul bazei sale.
Prin urmare $VO \perp (ABC)$.

Remarcă. Rezultatele obținute în aplicațiile 1 și 2 pot fi ușor generalizate.

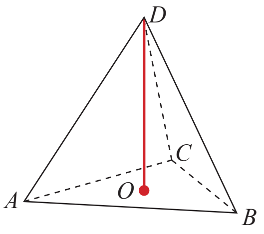
Pentru orice piramidă regulată, dreapta care unește vârful piramidei cu centrul cercului circumscris bazei este perpendiculară pe planul bazei.

Observație. Lungimea segmentului determinat de vârful piramidei regulate și centrul bazei sale reprezintă *distanța* de la vârf, la planul bazei.

Definiția 1. Distanța de la vârful piramidei la planul bazei se numește ***înălțimea piramidei***.

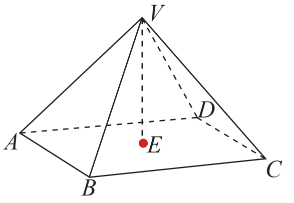
Pentru tetraedrul $ABCD$, considerăm baza ABC. Înălțimea tetraedrului va fi $d(D, (ABC))$, adică lungimea segmentului DO, unde O este punctul de intersecție dintre planul (ABC) și perpendiculara din D pe (ABC).

$DO \perp (ABC)$



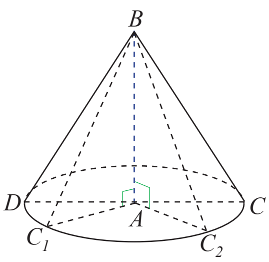
Pentru piramida patrulateră $VABCD$, înălțimea este $d(V, (ABCD))$, adică lungimea segmentului VE, unde E este punctul de intersecție dintre planul (ABC) și perpendiculara din V pe (ABC).

$VE \perp (ABC)$



Observație. **1)** Nu avem decât puține convenții grafice pentru perpendicularitatea pe un plan. Când este vorba despre o singură perpendicularitate, de obicei, planul se poziționează orizontal, iar dreapta perpendiculară pe plan se reprezintă vertical.
Atenție! Nu orice dreaptă reprezentată vertical este perpendiculară pe planul orizontal.
2) În piramida triunghiulară (tetraedru), oricare dintre fețe poate fi considerată bază, deci putem vorbi de patru înălțimi.

Aplicația 4. Demonstrați că axa de simetrie a conului circular drept este perpendiculară pe planul bazei.



Soluție. Considerăm conul obținut prin rotația ΔABC, $\sphericalangle BAC = 90°$, în jurul catetei AB și fie două poziții necoplanare ale rotației, adică ΔABC_1 și ΔABC_2. Din $AB \perp AC_1$ și $AB \perp AC_2$, rezultă că AB este perpendiculară pe două drepte concurente din planul bazei, deci este perpendiculară pe planul bazei.

Definiția 2. Distanța de la vârful unui con circular drept la planul bazei se numește ***înălțimea conului***.

Înălțimea conului circular drept coincide cu lungimea segmentului determinat de vârful său și centrul bazei.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Triunghiurile echilaterale ABC și BCD sunt situate în plane diferite, iar E este mijlocul laturii BC. Demonstrați că $BC \perp (ADE)$.

2 Pătratele $ABCD$ și $BCEF$ sunt situate în plane diferite, iar semidreapta CM este bisectoarea unghiului DCE, $M \in DE$. Demonstrați că:
a) $BC \perp (CDE)$ b) $CM \perp (ADE)$

3 Fie $ABCD$ un tetraedru în care fețele ABC, ACD, ABD sunt delimitate de triunghiuri dreptunghice, în A.
a) Demonstrați că $AC \perp (ABD)$, $AD \perp (ABC)$ și $AB \perp (ACD)$.
b) Determinați poziția dreptei BC față de planul (ABD).
c) Demonstrați că orice două muchii opuse ale tetraedrului $ABCD$ sunt perpendiculare.

4 Se consideră cubul $ABCDEFGH$, $AC \cap BD = \{O\}$, $EG \cap FH = \{Q\}$.
Demonstrați că:
a) $BD \perp (ACE)$; **b)** $AC \perp BH$;
c) $OQ \parallel AE$; **d)** $OQ \perp (ABC)$

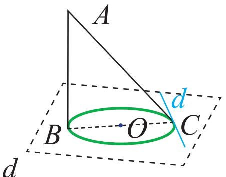
5 Triunghiul isoscel ABC, ($AC = BC$) și dreptunghiul $ABDE$ sunt situate în plane diferite și $EA \perp AC$. Demonstrați că:
a) $EA \perp (ABC)$.
b) Triunghiul BDC este dreptunghic.
c) Dreapta AC nu este perpendiculară pe (ABD)
d) $AB \perp (CMN)$, punctele M și N fiind mijloacele segmentelor AB respectiv DE.

6 Fie $MNPQ$ un pătrat, $MN = 40$ cm și $AM \perp (MNP)$, $AM = 30$ cm. Se consideră MB înălțime a triunghiului MAN și $BC \parallel NP$, $C \in AP$.
a) Demonstrați că $NP \perp (AMN)$ și $PQ \perp (AMQ)$.
b) Calculați $d(A, (NPQ))$, $d(N, (AMQ))$, $d(P, (AMN))$.
c) Demonstrați că $AN \perp (BCM)$ și determinați distanța de la punctul A la planul (BCM).

7 Pe planul triunghiului dreptunghic ABC, $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ se ridică perpendiculara AM. Știind că $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm, iar $MB = 2 \cdot AB$, calculați:
a) distanța de la punctul M la planul (ABC)
b) distanța de la punctul B la planul (ACM)
c) distanța de la punctul C la planul (ABM)

8 Rombul $ABCD$ are $AB = a$, $\sphericalangle BAD = 60^\circ$, $AC \cap BD = \{O\}$. Se știe că dreptele AE și CF sunt perpendiculare pe planul rombului și $AE = CF = BD$.
a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.
b) Demonstrați că $BD \perp (EOF)$.
c) Determinați distanța de la punctul O la dreapta EF. Analizați toate cazurile posibile.

9 În desenul alăturat, AB este perpendiculară pe planul cercului $\mathcal{C}(O, r = OB)$, BC este diametru, iar dreapta d este tangentă la cerc în punctul C.

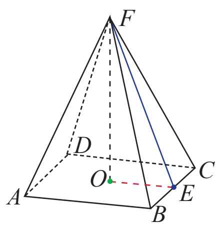


a) Arătați că $d \perp (ABC)$.
b) Dacă $AB = 20$ cm și $AC = 2{,}5 \cdot r$, calculați raza cercului.

10 $ABCD$ este un dreptunghi cu centrul O, $AB = 12$ cm, $BC = 4\sqrt{3}$ cm, iar punctul S este exterior planului (ABC), astfel încât $SA = SB = SC = SD = AB$.
a) Arătați că $SO \perp AC$.
b) Arătați că $SO \perp (ABC)$.
c) Calculați distanța de la punctul S la planul (ABC).

11 Poligonul regulat $A_1A_2...A_n$, $n \in \{3, 4, 6\}$, este baza piramidei $VA_1A_2...A_n$, iar punctul O este piciorul perpendicularei din vârful V, pe planul bazei. Demonstrați că O este centrul cercului circumscris poligonului regulat $A_1A_2...A_n$, dacă și numai dacă $VA_1 = VA_2 = ... = VA_n$.

12 În desenul alăturat, FO este înălțimea piramidei patrulatere regulate $FABCD$. Se știe că aria triunghiului FOE este $6\sqrt{3}$ cm², punctul E este mijlocul muchiei BC, iar $\sphericalangle FEO = 60^\circ$. Calculați înălțimea piramidei.



13 Tetraedrul $DABC$ are baza triunghiul echilateral ABC, $AB = 6$ cm, O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC și $d(D,(ABC)) = 2\sqrt{6}$ cm. Calculați $d(A, (BCD))$.

L2. Distanța dintre două plane paralele, înălțimea prismei drepte, a paralelipipedului dreptunghic, a cilindrului circular drept, a trunchiului de piramidă, a trunchiului de con circular drept

Ne amintim!

În plan, distanța dintre două drepte paralele este distanța de la un punct oarecare al primei drepte la a doua dreaptă. Definiția rămâne valabilă și în spațiu întrucât orice două drepte paralele sunt coplanare. Distanța dintre două drepte paralele nu depinde de punctul ales.

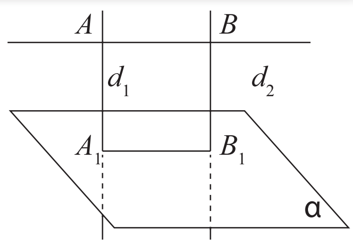
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

A. Distanța de la o dreaptă, la un plan paralel cu aceasta

Fie o dreaptă d, paralelă cu un plan α. Ne propunem să definim distanța de la d la α.

Propoziția 1. Dacă punctul A este situat pe dreapta d, $d \parallel \alpha$, $AA_1 \perp \alpha$ cu $A_1 \in \alpha$, atunci lungimea segmentului AA_1 este constantă (nu depinde de alegerea punctului A pe dreapta d).

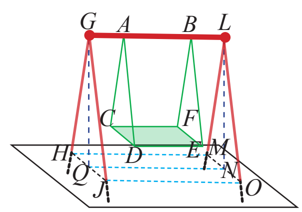
Demonstrație. Considerăm pe d punctul B, diferit de A și construim $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$, $A_1 \in \alpha$, $B_1 \in \alpha$. Vom demonstra că segmentele AA_1 și BB_1 sunt congruente.



Dreptele AA_1 și BB_1 sunt perpendiculare pe același plan, prin urmare $AA_1 \parallel BB_1$ și determină un plan, care taie α după dreapta A_1B_1, paralelă cu d. În consecință, $AA_1 \parallel BB_1$ și $AB \parallel A_1B_1$, $AA_1 \perp A_1B_1$ adică patrulaterul AA_1B_1B este dreptunghi, rezultând $AA_1 \equiv BB_1$.

Definiția 1. Distanța de la dreapta d la planul α, paralel cu dreapta d este distanța de la un punct oarecare al dreptei d la planul α și se notează cu $d(d, \alpha)$.

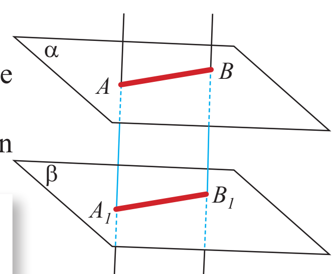
AP Tudor și Andrei vor să construiască un leagăn din lemn de forma figurii alăturate. Corpurile $ACDBFE$ și $GHJLMO$ sunt prisme triunghiulare cu $AC = AD$ și $GH = GJ$.



1. Precizați care ar trebui să fie segmentele cărora trebuie să le cunoaștem lungimile, pentru a putea afla distanța de la bara AB la planul leagănului ($CDEF$) și distanța de la bara GL la planul solului ($HJOM$).
2. Exprimați distanța de la dreptele CD, DE, EF, CF la planul solului.
3. Încercați să identificați distanța de la planul solului la planul leagănului.

B. Distanța dintre două plane paralele

Activitatea practică de mai sus ne-a arătat necesitatea noțiunii de *distanță* între două plane (planul leagănului și cel al suprafeței pământului).
Așa cum, în plan, distanța dintre două drepte are sens doar pentru drepte paralele, în spațiu, distanța dintre două plane are sens doar pentru plane paralele.



Propoziția 2. Dacă două drepte sunt perpendiculare pe planele paralele α și β, pe care le intersectează în A și B, respectiv A_1 și B_1, atunci $AA_1 \equiv BB_1$.

Demonstrație. Două drepte perpendiculare pe același plan sunt paralele, adică $AA_1 \parallel BB_1$. Planul (AA_1B_1B) intersectează planele paralele α și β după drepte paralele, deci $AB \parallel A_1B_1$. Patrulaterul AA_1B_1B are laturile opuse paralele, deci este paralelogram, $AA_1 \equiv BB_1$.

Observație. Propoziția 2 poate fi considerată caz particular al rezultatului: „Două plane paralele determină pe două drepte paralele, pe care le intersectează, segmente congruente".

Aplicația 1. Podeaua și tavanul unei camere sunt situate în două plane paralele α și β. Muchia verticală d este perpendiculară pe planul podelei. Ne propunem să determinăm *distanța minimă* de la un punct al tavanului la un punct al podelei, apoi distanța între cele două plane.

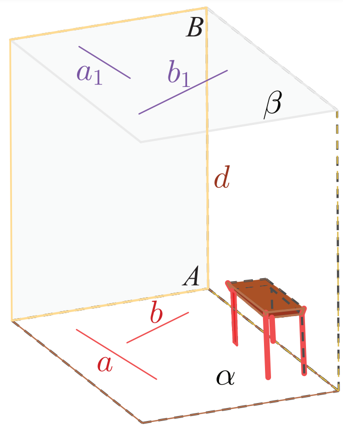
a) Demonstrați că $d \perp \beta$.

b) Identificați pe desenul de mai jos, distanța de la punctul B la podea, justificând răspunsul dat.

c) Identificați pe desenul de mai jos, distanța de la punctul A la tavan, justificând răspunsul dat.

d) Comparați distanțele găsite la subpunctele **b)** și **c)**.

e) Stabiliți relația între distanța AB și lungimea unui segment oarecare MN, unde M aparține planului α, iar N aparține planului β.



Soluție. Considerăm planele paralele α, β și $d \perp \alpha$, $d \cap \alpha = \{A\}$, $d \cap \beta = \{B\}$.

a) Fie *a și b*, drepte concurente, incluse în α. Din $d \perp \alpha$, $a \subset \alpha$ și $b \subset \alpha$, rezultă $d \perp a$ și $d \perp b$. **(1)**

Planele α, β sunt paralele, $a \subset \alpha$ și $b \subset \alpha$, rezultă a și b sunt paralele cu planul β, adică există dreptele a_1 și b_1, incluse în planul β, astfel încât $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$. **(2)**

Din (1) și (2), obținem $d \perp a_1$ și $d \perp b_1$, deci $d \perp (a_1, b_1) = \beta$.

b) Din $BA \perp \alpha$ și $A \in \alpha$ rezultă $d(B, \alpha) = AB$. **c)** Din $AB \perp \beta$ și $B \in \beta$, rezultă $d(A, \beta) = AB$. **d)** $d(B, \alpha) = d(A, \beta)$. **e)** Fie $M \in \alpha$ și $N \in \beta$.

Cazul 1. Dacă $MN \perp \alpha$, atunci conform rezultatelor de mai sus, $MN = AB$.

Cazul 2. Dacă $MN \not\perp \alpha$, atunci construim $NP \perp \alpha$, cu $P \in \alpha$ și se formează triunghiul dreptunghic MPN cu ipotenuza MN, în care $NP = AB$, deci $MN > AB$.

Concluzii. 1. O dreaptă perpendiculară pe un plan este perpendiculară pe orice plan paralel cu acesta.

2. Lungimea segmentelor determinate de intersecțiile a două plane paralele cu o dreaptă perpendiculară pe acestea este constantă.

Definiția 2. Distanța dintre planele paralele α și β este distanța de la un punct al unuia dintre ele la celălalt plan și se notează $d(\alpha, \beta)$.

Observație. Dacă $\alpha \parallel \beta$, atunci distanța dintre oricare două puncte $M \in \alpha$ și $N \in \beta$ este cel puțin egală cu distanța dinte cele două plane.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

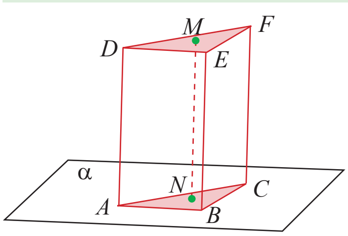
C. Înălțimea unei prisme. Înălțimea unui cilindru circular drept

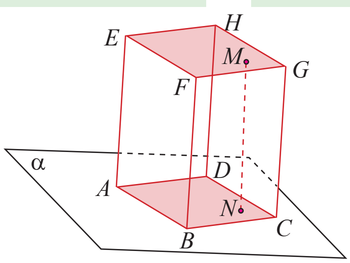
Bazele prismei sunt suprafețe poligonale congruente, situate în plane paralele.

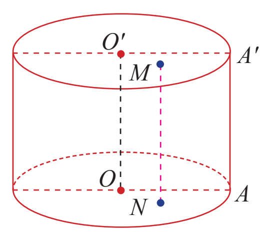
Definiția 3. Distanța dintre planele bazelor unei prisme se numește înălțimea prismei.

Bazele cilindrului circular drept sunt discuri congruente, situate în plane paralele.

Definiția 4. Distanța dintre planele bazelor unui cilindru se numește înălțimea cilindrului.





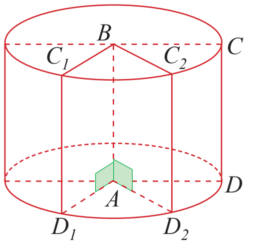


Aplicația 2. Demonstrați că în orice prismă dreaptă, fiecare muchie laterală este înălțime.

Soluție. Prisma dreaptă are fețele laterale dreptunghiuri. Fiecare muchie laterală formează cu muchiile bazei, cu care se intersectează, unghiuri drepte. Muchia aleasă este perpendiculară pe două drepte concurente incluse în planul bazei, deci este perpendiculară pe baze, adică este înălțime.
Concluzie. Înălțimea unei prisme drepte este lungimea oricărei muchii laterale a prismei.
Paralelipipedul dreptunghic are toate fețele dreptunghiuri, deci este o prismă dreaptă, oricum am alege bazele.

Aplicația 3. Dreptunghiul $ABCD$ se rotește în jurul laturii AB și generează cilindrul circular drept din imagine.

a) Demonstrați că AB este înălțimea cilindrului.
b) Demonstrați că oricare dintre generatoarele cilindrului este înălțime a cilindrului.



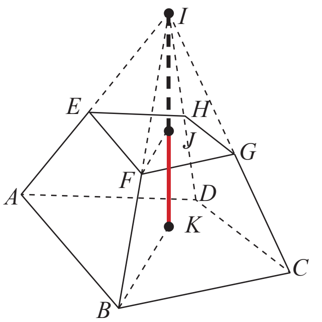
Demonstrație. **a)** Fixăm două poziții necoplanare ale rotației: ABC_1D_1 și ABC_2D_2. ABC_1D_1 și ABC_2D_2 sunt dreptunghiuri, deci $AB \perp AD_1$ și $AB \perp AD_2$, adică AB este perpendiculară pe planul bazei (discul cu centrul A și de rază AD). Cum bazele sunt situate în plane paralele, AB este perpendiculară și pe planul discului cu centrul B și de rază BC.
b) Fie CD o generatoare oarecare. $ABCD$ este dreptunghi, deci $CD \parallel AB$, de unde CD este perpendiculară pe baze, adică este înălțime.
Concluzie. Înălțimea unui cilindru circular drept este lungimea segmentului determinat de centrele bazelor acestuia. Oricare dintre generatoarele unui cilindru circular drept este înălțime a cilindrului.

D. Înălțimea unui trunchi de piramidă. Înălțimea unui trunchi de con circular drept

Trunchiul de piramidă se obține prin secționarea unei piramide cu un plan paralel cu baza.
Trunchiul de con se obține prin secționarea unui con circular drept cu un plan paralel cu baza.
Bazele trunchiului de piramidă și bazele trunchiului de con sunt situate în plane paralele.

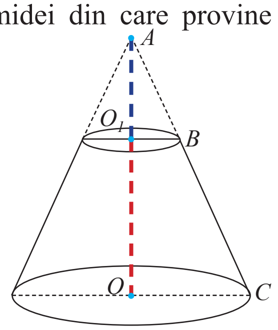
Definiția 5. Distanța dintre bazele unui trunchi de piramidă se numește înălțimea trunchiului de piramidă.
Definiția 6. Distanța dintre bazele unui trunchi de con circular drept se numește înălțimea trunchiului de con.

Aplicația 4. Determinați înălțimea piramidei din care provine trunchiul de piramidă patrulateră $ABCDEFGH$, știind că raportul dintre muchia bazei mici și muchia bazei mari este $\frac{1}{4}$, iar înălțimea trunchiului este $JK = 12$ cm.



Soluție. Fie I vârful piramidei din care provine trunchiul. Aplicăm, pe rând, teorema fundamentală a asemănării pentru: $\Delta IAB \sim \Delta IEF$ și $\Delta IBK \sim \Delta IFJ$.
Rezultă $\frac{IK}{IK - IJ} = \frac{4}{3}$, de unde $\frac{IK}{JK} = \frac{4}{3}$ sau $IK = 16$ (cm).
Observație. Înălțimea trunchiului de piramidă este diferența dintre înălțimea piramidei din care provine trunchiul (piramida mare) și înălțimea piramidei care se îndepărtează (piramida mică).

Aplicația 5. Determinați înălțimea conului din care provine trunchiul de con, știind razele bazelor $OC = 7$ cm, $O_1B = 3$ cm și înălțimea trunchiului $OO_1 = 8$ cm.



Soluție. Fie A vârful conului din care provine trunchiul. Aplicăm teorema fundamentală a asemănării, în planul (AOC) pentru $\Delta AO_1B \sim \Delta AOC$ și obținem:
$\frac{O_1B}{OC} = \frac{AO_1}{AO}$, de unde $\frac{OC - O_1B}{OC} = \frac{AO - AO_1}{AO}$, deci $\frac{4}{7} = \frac{8}{AO}$, adică $AO = 14$ cm.
Observație. Înălțimea trunchiului de con este diferența dintre înălțimea conului din care provine trunchiul (conul mare) și înălțimea conului care se îndepărtează (conul mic).

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Fie $ABCDMNPQ$ un cub.

a) Arătați că $AB \perp (ADM)$ și $AB \perp (BCN)$

b) Dacă $AN = 4\sqrt{2}$ cm, calculați distanța dintre planele (ADM) și (BCN)

2 Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții.

a) Dacă planele α și β sunt paralele atunci $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$.

b) Dacă planele α și β sunt paralele, iar $d \perp \alpha$, atunci $d \perp \beta$.

c) Lungimea muchiei laterale a unui prisme drepte este mai mare decât înălțimea prismei

d) $ABCDEFGH$ este un cub. Atunci $d((ABC), (EFG)) = d((ADH), (BCG))$.

3 Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCDEFGH$. Punctele L, M, N, P sunt mijloacele muchiilor AB, BC, CD, respectiv DA, iar punctele Q, R, S, T sunt mijloacele muchiilor EF, FG, GH, respectiv HE.

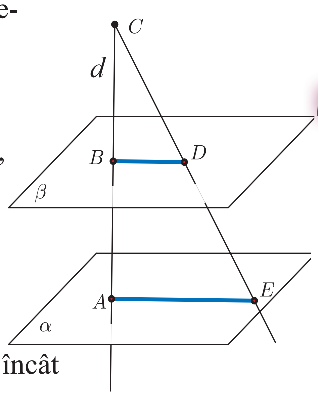
a) Realizați un desen în care să reprezentați prisma și punctele enumerate.

b) Arătați că planele (LMQ) și (NPS) sunt paralele

c) Calculați distanța dintre planele (LMQ) și (NPS) dacă muchia bazei este l.

4 Prisma hexagonală regulată $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ are fețele laterale suprafețe pătratice, $AD = 24$ cm. Un plan α, paralel cu bazele prismei, intersectează segmentul AB' în punctul M, $AM = 2\sqrt{2}$ cm. Aflați înălțimile prismelor determinate de planul α.

5 În figura alăturată, $d \perp \alpha, \alpha \parallel \beta, d \cap \alpha = \{A\}$, $d \cap \beta = \{B\}$ și punctul $C \in d$, $BC = 2{,}4$ cm. O dreaptă care conține punctul C, înțeapă planul β în punctul D și planul α în E, astfel încât $BD = 4$ cm, $AE = 10$ cm. Calculați distanța dintre planele α și β.



6 Fie conul circular drept cu vârful A și diametrul bazei $BC = 36$ cm. Bisectoarea unghiului ABC intersectează AC în D și $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{5}{6}$.

a) Calculați înălțimea conului.

b) Se secționează conul printr-un plan care conține punctul D și este paralel cu baza conului. Calculați înălțimea trunchiului de con care se formează prin secționare.

7 O prismă patrulateră regulată are aria bazei de 16 cm² și aria unei fețe laterale de $20\sqrt{2}$ cm². Calculați înălțimea prismei.

8 $ABCMNP$ este o prismă triunghiulară dreaptă. Punctele D, E, F aparțin muchiilor laterale AM, BN, respectiv CP, astfel încât $AD = 3 \cdot DM$, $BN = 4 \cdot EN$ și $PF = 0{,}(3) \cdot CF$.

a) Reprezentați prisma și puneți în evidență planul (DEF).

b) Demonstrați că $(DEF) \parallel (ABC) \parallel (MNP)$.

c) Arătați că $d((ABC), (DEF)) = 3 \cdot d((DEF), (MNP))$.

9 În paralelipipedul dreptunghic $BCDELMNP$, cu baza dreptunghiul $BCDE$, $BC = 7$ cm, $BD = 25$ cm și $CN = 40$ cm. Calculați:

a) înălțimea BL a paralelipipedului;

b) distanța de la punctul L la planul (PND).

10 Se consideră cilindrul circular drept, AB și CD diametre coplanare, AD generatoare și O, Q centrele bazelor cilindrului. Știind că $CO = 12$ cm și $\sphericalangle COD = u$, calculați înălțimea cilindrului pentru $u \in \{60°, 90°, 120°\}$.

11 Punctele A, B, C, D aparțin cercului $\mathcal{C}(O, r)$, baza unui cilindru circular drept, iar AA', BB', CC', DD' sunt generatoare ale cilindrului. AD este diametru, iar punctele B, C sunt situate de aceeași parte a dreptei AD astfel încât $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{BC} \equiv \overset{\frown}{CD}$.

a) Demonstrați că $(ADD') \parallel (BCC')$.

b) Aflați înălțimea cilindrului, știind că este egală cu distanța dintre planele (ADD') și (BCC').

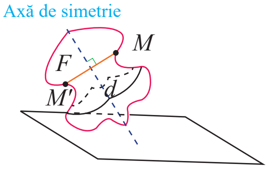
L3. Plane perpendiculare, secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile studiate

Ne amintim!

Dacă dreapta d este perpendiculară pe planul α, iar dreapta d_1 este paralelă cu d, atunci d_1 este perpendiculară pe α.

Un poligon convex cu n laturi, $n \geq 4$, are $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonale.

Simetricul unui punct M față de o dreaptă d este punctul M' cu $MM' \perp d$ și $d(M, d) = d(M', d)$, M și M' fiind distincte.



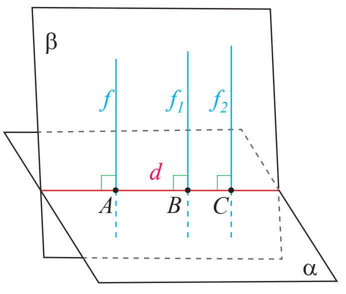
Diagonalele unui poligon convex, care pornesc din același vârf, descompun poligonul în $n - 2$ triunghiuri ale căror vârfuri sunt vârfuri ale poligonului.

O dreaptă d este axă de simetrie pentru figura F dacă pentru orice punct M al figurii F, simetricul său față de dreapta d aparține aceleiași figuri.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Multe dintre suprafețele pe care le avem în preajmă sunt suprafețe plane: fațada unei clădiri, peretele unei încăperi sau ușa dulapului. Observăm că unele dintre acestea sunt plane verticale, în apropierea lor putând găsi plane orizontale care le intersectează. Mai mult, considerând într-un plan vertical o dreaptă perpendiculară pe muchia comună, am putea constata că aceasta este perpendiculară pe planul orizontal.

Definiția 1. Planele α și β, care se intersectează după dreapta d, se numesc plane *perpendiculare* dacă o dreaptă f, inclusă în unul dintre cele două plane, perpendiculară pe dreapta lor comună, este perpendiculară pe celălalt plan.[1]



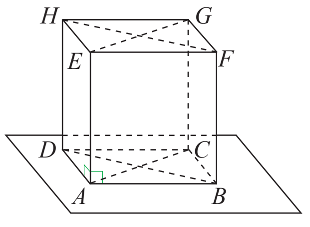
Matematic: $\alpha \perp \beta$ dacă și numai dacă există $f \subset \beta$ astfel încât $f \perp d$ și $f \perp \alpha$. Afirmația rămâne adevărată dacă schimbăm β cu α.

Observație. **1)** Proprietatea dreptei f, din planul β, de a fi perpendiculară pe planul α rămâne valabilă pentru orice altă dreaptă care este perpendiculară pe dreapta d și este inclusă în planul α.

Demonstrație. Considerând, în planul β, o altă dreaptă $f_1 \perp d$, avem $f_1 \parallel f$ și $f \perp \alpha$, deci $f_1 \perp \alpha$.

2) Dacă un plan α conține o dreaptă d, perpendiculară pe un alt plan β, atunci $\alpha \perp \beta$. Acest enunț reprezintă un prim criteriu de perpendicularitate pentru două plane.

Aplicație. Considerăm paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$. Găsiți toate planele determinate de două muchii laterale și demonstrați că sunt perpendiculare pe planul (ABC).



Soluție. Paralelipipedul dreptunghic are fețele și bazele dreptunghiuri, deci pentru muchia AE, avem: $AE \perp AB$, $AE \perp AD$, adică $AE \perp (ABCD)$. Aplicând *Observația* 2, rezultă $(ABFE) \perp (ABCD)$, $(ADHE) \perp (ABCD)$, $(AEGC) \perp (ABCD)$. Din $BF \parallel AE \parallel DH$ și $AE \perp (ABCD)$, rezultă $BF \perp (ABCD)$ și $DH \perp (ABCD)$.

[1] Definiția clasică a noțiunii de plane perpendiculare va putea fi formulată după alte câteva lecții.

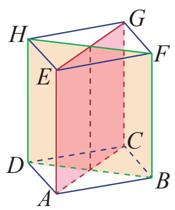
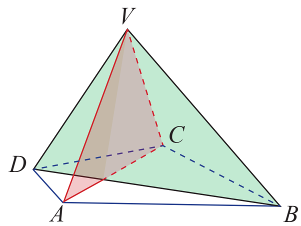
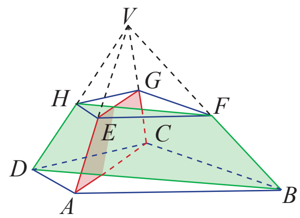
Planele ($DBFH$), ($BCGF$) și ($DCGH$) conțin una din aceste perpendiculare pe ($ABCD$), rezultând perpendicularitatea lor pe planul ($ABCD$). În concluzie, în paralelipipedul dreptunghic, am găsit șase plane conținând muchiile laterale și toate sunt perpendiculare pe planul bazei ($ABCD$).

A. Secțiuni diagonale

În rezolvarea **Aplicației 1**, remarcăm două plane care conțin diagonale ale bazelor și muchii laterale.

Definiția 2. Secțiunea obținută într-un corp geometric (prismă, piramidă, trunchi de piramidă) cu baza poligon cu cel puțin 4 laturi, printr-un plan determinat de o diagonală a bazei și o muchie laterală, se numește *secțiune diagonală*.

Vom identifica elemente specifice, exemplificând pentru cazul particular când baza este patrulater.

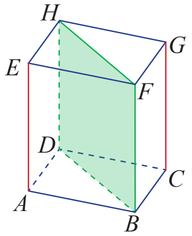
<table>
<tr><th>Prisma</th><th>Piramida</th><th>Trunchiul de piramidă</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>1) Secțiunea diagonală conține:
a) două muchii laterale care nu sunt situate pe aceeași față laterală;
b) două diagonale corespunzătoare ale celor două baze.
2) Dacă prisma este dreaptă, atunci secțiunea diagonală este situată într-un plan perpendicular pe baze.</td><td>1) Secțiunea diagonală conține:
a) două muchii laterale care nu sunt situate pe aceeași față laterală;
b) o diagonală a bazei și vârful piramidei.</td><td>1) Secțiunea diagonală conține:
a) două muchii laterale care nu sunt situate pe aceeași față laterală;
b) două diagonale corespunzătoare ale celor două baze.
2) Planul de secțiune diagonală a trunchiului de piramidă este identic cu planul de secțiune diagonală a piramidei din care provine trunchiul.</td></tr>
</table>

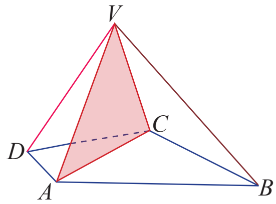
Observație. **a)** Dacă baza are n vârfuri, $n \geq 4$, atunci numărul secțiunilor diagonale este $\frac{n(n-3)}{2}$.
b) Secțiunile diagonale nu conțin muchii ale bazelor.

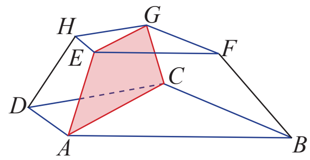
Temă de portofoliu

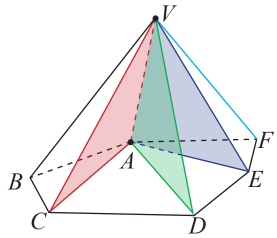
Considerăm paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$.
a) Reprezentați, printr-un desen, secțiunile diagonale ale paralelipipedului dat.
b) Ilustrați, prin desene, faptul că fiecare secțiune diagonală separă paralelipipedul în două prisme triunghiulare drepte.
c) Demonstrați că cele două secțiuni diagonale ale paralelipipedului dreptunghic sunt congruente.
d) Repetați cerințele anterioare, considerând $ABFE$ bază a paralelipipedului.

Remarcă. La poliedrele studiate, având baza un poligon cu n laturi, secțiunile diagonale care au o muchie comună determină $n-2$ corpuri cu bazele suprafețe triunghiulare.









Pentru $n = 4$, fiecare din cele două secțiuni diagonale generează două corpuri cu baza triunghi.
Pentru $n = 6$, pentru fiecare muchie laterală, există 3 secțiuni diagonale care o conțin și care determină câte 4 corpuri cu baza triunghi.

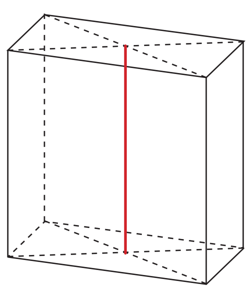
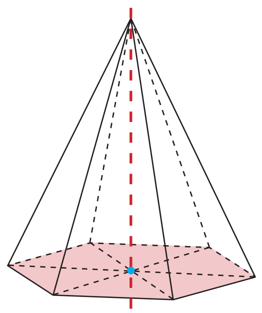
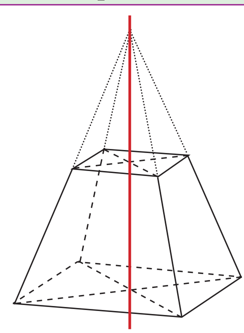
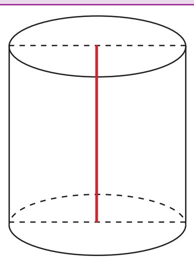
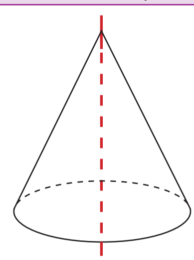
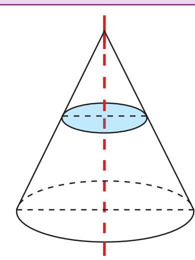
B. Secțiuni axiale

Dacă un corp are axă de simetrie, atunci:

1) Oricum am alege un punct situat pe suprafața corpului geometric, simetricul acestui punct față de axa de simetrie se află tot pe suprafața sa.

2) Oricum am alege un punct situat în interiorul corpului geometric, simetricul acestui punct față de axa de simetrie se află tot în interiorul său.

Următoarele corpuri geometrice au axă de simetrie:

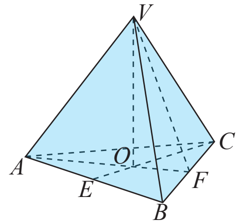
Paralelipipedul dreptunghic și prisma regulată care are ca bază un poligon cu număr par de laturi	Piramida regulată care are ca bază un poligon cu număr par de laturi	Trunchiul de piramidă regulată care are ca bază un poligon cu număr par de laturi
		
Axa de simetrie este determinată de centrele bazelor	Axa de simetrie este determinată de centrul bazei și vârf.	Axa de simetrie este determinată de centrele bazelor
		
Cilindrul circular drept	Conul circular drept	Trunchiul de con circular drept

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

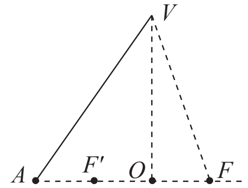
Observație. Axa de simetrie a unui corp geometric este perpendiculară pe baza acestuia.

Aplicația 1. Demonstrați că dreapta determinată de centrul bazei și vârful piramidei triunghiulare regulate nu este axă de simetrie pentru această piramidă.

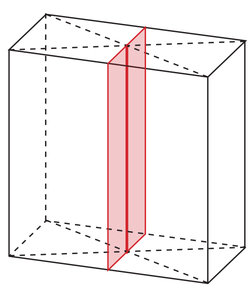
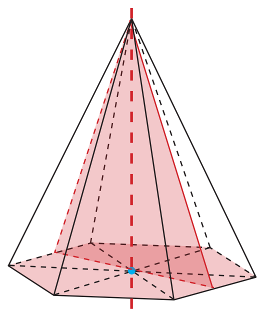
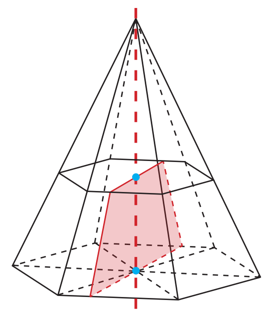
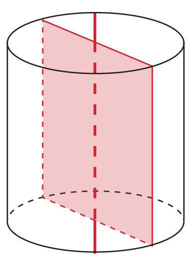
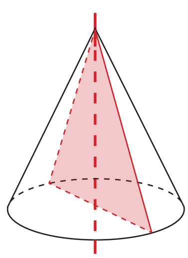
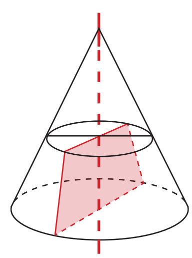
Demonstrație. Fie piramida triunghiulară regulată $VABC$ și O centrul bazei. Demonstrăm că VO nu este axă de simetrie. Fie F punctul de intersecție dintre dreptele AO și BC. Punctul F aparține suprafeței piramidei.



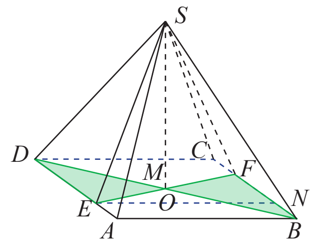
Este suficient să demonstrăm că simetricul său față de VO nu aparține acestei suprafețe. Dreapta VO este înălțimea piramidei, deci $VO \perp (ABC)$, de unde, $VO \perp AO$.
Simetricul lui F față de VO este F', mijlocul segmentului AO, care nu aparține suprafeței piramidei.



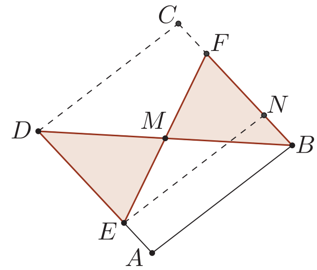
Definiție. Secțiunea determinată de un plan care conține axa de simetrie a unui corp geometric se numește *secțiune axială* a corpului.

Paralelipipedul dreptunghic și prisma regulată care are ca bază un poligon cu număr par de laturi	Piramida regulată care are ca bază un poligon cu număr par de laturi	Trunchiul de piramidă regulată care are ca bază un poligon cu număr par de laturi
		
Dreptunghi	Triunghi isoscel	Trapez isoscel
		
Cilindrul circular drept	Conul circular drept	Trunchiul de con circular drept

Aplicația 2. Pe muchiile AD și BC ale piramidei patrulatere regulate $SABCD$ cu $AB = 8$ cm, se iau punctele E, respectiv F, cu $AE = 2$ cm, $BF = 6$ cm.
a) Arătați că suprafața triunghiulară SEF este o secțiune axială a piramidei.
b) Demonstrați că $(SEF) \perp (ABC)$.
c) Dacă aria triunghiului SEF este $32\sqrt{5}\ \text{cm}^2$, calculați înălțimea piramidei.



Soluție: **a)** $ABCD$ este pătrat, deci $AD = AB = 8$ cm și $DE = AD - AE = 6$ cm.
Fie $EF \cap BD = \{M\}$.
Deoarece $\sphericalangle EDM \equiv \sphericalangle FBM$ ($=45°$), $DE \equiv BF$, $\sphericalangle DEM \equiv \sphericalangle BFM$ (alterne interne), rezultă $\Delta DEM \equiv \Delta BFM$ (ULU). Se obține $DM \equiv BM$ și $EM \equiv FM$ și atunci punctul M coincide cu O, centrul bazei piramidei.
Planul (SEF) conține înălțimea piramidei, SO, care este și axa de simetrie a acesteia, deci suprafața triunghiulară SEF este o secțiune axială.



b) SO este inclusă în planul (SEF) și $SO \perp (ABC)$, adică planul $(SEF) \perp (ABC)$.
c) Fie $EN \perp BC$, $N \in BC$. Patrulaterul $ABNE$ are trei unghiuri drepte, deci este dreptunghi și $NE = AB = 8$ cm, $BN = AE = 2$ cm, iar $NF = BF - BN = 4$ cm. În triunghiul EFN, $\sphericalangle ENF = 90°$.
Calculând, cu ajutorul teoremei lui Pitagora, se obține $EF = 4\sqrt{5}$ cm. $\mathcal{A}_{SEF} = 32\sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{EF \cdot SO}{2} = 32\sqrt{5}$, de unde $SO = 16$ cm.

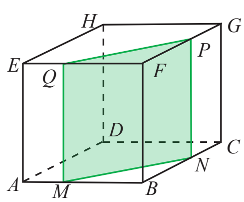
Temă de portofoliu

Ilustrați prin exemple, folosind un soft de geometrie dinamică (de exemplu, ***Geogebra***), validitatea următoarelor afirmații.
1. Secțiunea axială este situată într-un plan perpendicular pe bază.
2. Dacă un corp geometric admite axă de simetrie, atunci există o infinitate de secțiuni axiale ale acestuia.
3. Cilindrul, conul și trunchiul de con au toate secțiunile axiale congruente.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Desenați o prismă patrulateră regulată și reprezentați una dintre secțiunile diagonale. Știind că secțiunea diagonală este o suprafață pătratică cu diagonala de $8\sqrt{2}$ cm, aflați dimensiunile prismei.

2 $ABCDEFGH$ este un cub, $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in FG$, $Q \in EF$ astfel încât $AM = CN = EQ = GP = \dfrac{1}{3} \cdot AB$.



Știind că $\mathcal{A}_{MNPQ} = 24\sqrt{2}\ \text{cm}^2$, aflați aria secțiunii diagonale a cubului.

3 $ABCDEFGH$ este un paralelipiped dreptunghic, $AB = 10$ cm, $AD = 6\sqrt{3}$ cm, iar unghiul dreptelor AG și BH are măsura de $60°$. Calculați perimetrul patrulaterului $ACGE$.

4 Prisma hexagonală $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ regulată are latura bazei de 4 cm și $AD' = 16$ cm. Calculați ariile secțiunilor diagonale care conțin muchia AA'.

5 Fie prisma patrulateră regulată $ABCDEFGH$. Se știe că perimetrul patrulaterului $ACGE$ este 24 cm, iar $\text{ctg}\sphericalangle EDF = 3$.
a) Aflați înălțimea prismei.
b) Calculați aria patrulaterului $BDHF$.

6 Fie $ABCDMNPQ$ un cub și E, F, G, H mijloacele muchiilor AD, BC, NP, respectiv MQ.
a) Stabiliți dacă suprafața patrulateră $EFGH$ este secțiune axială în cub.
b) Dacă $AG = 6$ cm, calculați aria suprafeței patrulatere $EFGH$.

7 Punctul P este mijlocul muchiei VA a piramidei patrulatere regulate $VABCD$ și aria triunghiului VPC este 24 cm^2. Calculați aria triunghiului VBD.

8 Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu înălțimea VO și fie $OE \perp VA$, $E \in VA$. Dacă secțiunea diagonală are aria 8 cm^2, iar triunghiul ACV este dreptunghic, calculați aria triunghiului BEO.

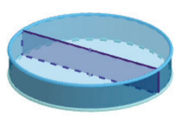
9 Se consideră trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDMNPR$ cu centrele bazelor O, respectiv Q.
Punctele E și F sunt mijloacele muchiilor AD, respectiv BC, iar triunghiul QEF este echilateral cu perimetrul de 48 cm.
Știind că $MN = 12$ cm, calculați:
a) aria secțiunii diagonale a trunchiului de piramidă;
b) înălțimea piramidei din care provine trunchiul.

10 **a)** Desenați o prismă patrulateră regulată $ABCDEFGH$ și secțiunea axială care conține muchia laterală CG.
b) Știind că această secțiune este o suprafață pătratică cu aria 72 cm^2, aflați lungimea muchiei bazei și înălțimea prismei.

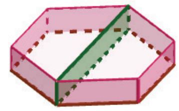
11 Fie $ABCD$ o secțiune axială într-un cilindru circular drept, O centrul bazei cu diametrul AB și $OC = 8$ cm.
Știind că $\sphericalangle CDO = 60°$, aflați raza și generatoarea cilindrului.

12 Suprafața triunghiulară VAB, $VA = VB = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$, este secțiunea axială a unui con. Dacă perimetrul triunghiului VAB este $2 \cdot (2+\sqrt{2})$ cm, aflați razei bazei conului.

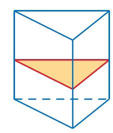
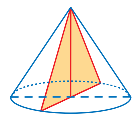
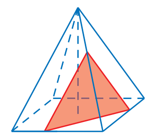
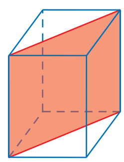
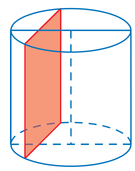
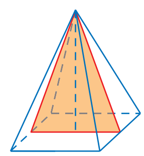
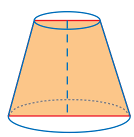
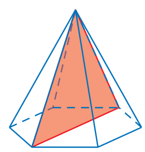
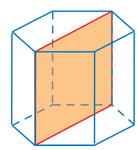
13 Un delfinariu are un bazin în formă de cilindru circular drept. Pentru a oferi mai multe reprezentații, bazinul este împărțit în două părți egale printr-un perete dreptunghiular cu aria de 300 m^2. Se știe că raza bazei cilindrului este de 15 m. Aflați înălțimea bazinului.



14 O societate comercială ocupă un spațiu în forma unei prisme hexagonale regulate. Dorind să-și rentabilizeze cifra de afaceri, transformă jumătate din spațiul pe care îl deține în cinematograf. Peretele despărțitor are înălțimea de 6 m și aria de 324 m^2 (vezi figura). Calculați suprafața pe care o ocupă firma și exprimați rezultatul în hectare.



15 **a)** Analizați și alegeți, dintre desenele următoare, pe cele care reprezintă secțiuni diagonale în corpuri geometrice;

a) Prismă triunghiulară regulată	**b)** Con circular drept	**c)** Piramidă patrulateră regulată
		
d) Prismă patrulateră regulată	**e)** Cilindru circular drept	**f)** Piramidă patrulateră regulată
		
g) Trunchi de con circular drept	**h)** Piramidă hexagonală regulată	**i)** Prismă hexagonală regulată
		

b) Alegeți, dintre desenele de mai sus, pe cele care reprezintă secțiuni axiale în corpuri geometrice.
c) Desenați pe caiete corpurile geometrice care au fost selectate și la subpunctul **a)** și la subpunctul **b)**.
d) Determinați pentru fiecare dintre corpurile de la subpunctul **c)** numărul secțiunilor care sunt, simultan, secțiuni diagonale și secțiuni axiale.

5 Proiecții ortogonale în spațiu

L1. Proiecții de puncte, de segmente de dreaptă și de drepte, pe un plan

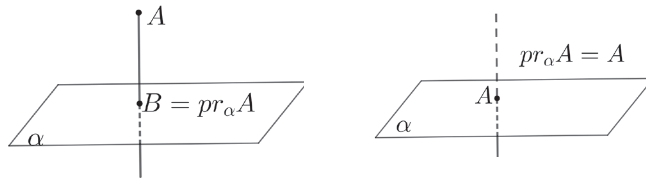
Pe seama marelui om de știință Sir Isac Newton (1642-1727) circulă anecdota conform căreia savantul, în timp ce medita sub un copac, a fost trezit pe neașteptate de lovitura unui măr copt care a căzut din copac, iar experimentul l-ar fi ajutat să formuleze faimoasa lege a atracției universale.
Privind geometric povestea mărului lui Newton, considerăm suprafața de pământ de sub copac ca pe un *plan orizontal*, iar direcția pe care se deplasează mărul în cădere, direcție verticală, *perpendiculară pe planul* solului. Așadar, din poziția inițială A a mărului, acesta s-a deplasat pe perpendiculara pe planul solului, α, oprindu-se în punctul B, în care perpendiculara din A intersectează planul.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiția 1. Punctul de intersecție a perpendicularei, prin punctul A, pe o dreaptă d cu această dreaptă, se numește *proiecția ortogonală a punctului A pe dreapta d*. Dacă B este proiecția punctului A pe dreapta d, vom scrie $B = pr_d A$.

Dacă $A \in d$, atunci $pr_d A = A$.

Definiția 2. Punctul de intersecție a perpendicularei, prin punctul A, pe un plan α cu acest plan, se numește *proiecția ortogonală a punctului A* pe planul α. Dacă B este proiecția punctului A pe planul α, vom scrie $B = pr_\alpha A$.



Dacă $A \in \alpha$, atunci $pr_\alpha A = A$.

Observație. **1)** Pentru simplificarea limbajului, în loc de „proiecție ortogonală" vom spune „proiecție".
2) În spațiu, proiecția unui punct pe o dreaptă este proiecția acestui punct pe dreapta dată, în planul determinat de acestea.
3) *Proiecția unui punct* pe o dreaptă sau pe un plan *este un punct* situat pe dreaptă, respectiv pe plan.
4) În reprezentările de mai sus, segmentul AB a fost necesar doar pentru a construi proiecția.

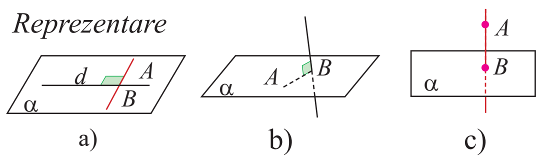
Aplicația 1

a) Pe dreapta d din planul α, se consideră punctul fix B. Găsiți toate punctele A din plan pentru care $B = pr_d A$.

b) Pe dreapta d din spațiu, se consideră punctul fix B. Găsiți toate punctele A din spațiu pentru care $B = pr_d A$.

c) În planul α, considerăm punctul fix B. Găsiți toate punctele A din spațiu pentru care $B = pr_\alpha A$.

Reprezentare

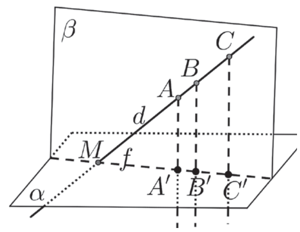


Soluție.
a) Punctele de pe perpendiculara în B pe d respectă condiția impusă.
b) Considerăm planul α perpendicular pe d în B și A un punct oarecare al planului. Avem $d \perp \alpha$, iar $AB \subset \alpha$ și de aici $AB \perp d$. În consecință $B = pr_d A$, rezultând că punctele care au proiecția pe d în punctul fix B formează planul perpendicular pe d care trece prin B.
c) Punctele de pe perpendiculara în B pe α se proiectează în punctul B.

Aplicația 2. Folosiți manualul digital pentru a vizualiza proiecțiile unui punct pe planele determinate de fețele unui tetraedru.

Aplicația 3. a) Dacă A, B și C sunt puncte coliniare, atunci proiecțiile lor pe planul α sunt puncte coliniare.

b) Dacă $A' = pr_{\alpha}A$, $B' = pr_{\alpha}B$ și $C' = pr_{\alpha}C$, atunci, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$.



Soluție. **a)** Pentru dreapta $d \not\subset \alpha$ cu $d \cap \alpha = \{M\}$, pe care se găsesc punctele A, B și C, notăm cu $\beta = (AA'M)$ și $f = \alpha \cap \beta$.
Din $AA' \perp \alpha$, $BB' \perp \alpha$ și $CC' \perp \alpha$, rezultă $AA' \parallel BB' \parallel CC'$.

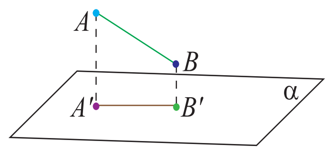
Din $B \in d$, $d \subset \beta$, $AA' \subset \beta$ și $AA' \parallel BB'$, rezultă $BB' \subset \beta$, adică $B' \in \alpha \cap \beta$. Analog, $C' \in \alpha \cap \beta$, rezultând A', B', C' coliniare.

b) În planul β, *dreptele paralele determină pe orice două secante segmente proporționale*, deci $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$.

Consecințe. **1)** *Proiecția mijlocului unui segment* pe un plan este mijlocul segmentului determinat de proiecțiile capetelor segmentului, pe acel plan.
2) Dacă B aparține segmentului AC, atunci B' aparține segmentului $A'C'$.
Figurile geometrice sunt mulțimi de puncte, deci putem vorbi despre proiecția unei mulțimi de puncte pe o dreaptă sau pe un plan.

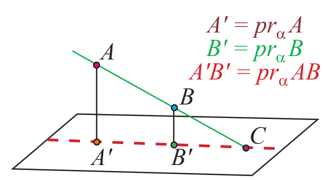
Definiția 3. Mulțimea proiecțiilor tuturor punctelor unei figuri geometrice F pe un plan α se numește proiecția figurii F pe planul α.

Teorema 1. Fie AB un segment și α un plan. Notăm $A' = pr_{\alpha}A$ și $B' = pr_{\alpha}B$.
1) Dacă $AB \not\perp \alpha$, atunci proiecția segmentului AB planul α este segmentul $A'B'$, unde $A' = pr_{\alpha}A$ și $B' = pr_{\alpha}B$.
2) Dacă $AB \perp \alpha$, atunci proiecția segmentului AB pe planul α este punctul A'.



Consecință. Proiecția unui segment pe un plan are lungimea cel mult egală cu lungimea segmentului.
Demonstrație. Este relevant doar cazul $AB \not\perp \alpha$.
Sunt posibile următoarele situații: **a)** Dacă $AB \subset \alpha$, atunci fiecare punct al segmentului AB are ca proiecție punctul însuși, adică $pr_{\alpha}AB = AB$, deci lungimea proiecției este egală cu lungimea segmentului proiectat.
b) Dacă $AB \parallel \alpha$, atunci $AA' \parallel BB'$, $ABB'A'$ este paralelogram și $AB = A'B'$. **c)** Dacă $AB \not\subset \alpha$ și $AB \nparallel \alpha$, atunci este suficient să considerăm cazul când segmentul nu intersectează planul α. Se formează trapezul dreptunghic $ABB'A'$, având laturile neparalele AB și $A'B'$, cu $AB > A'B'$($A'B'$ fiind înălțimea trapezului). Pentru cazul în care segmentul intersectează planul, considerăm trapezul $AA'BB'$ în care AB este o diagonală mai mare decât înălțimea $A'B'$

Teorema 2. Proiecția unei drepte pe un plan este o dreaptă sau un punct.

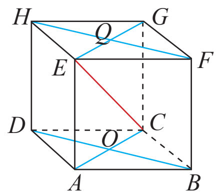


Demonstrație. Fie AB o dreaptă și α un plan, $A' = pr_{\alpha}A$ și $B' = pr_{\alpha}B$.
1) Dacă $AB \not\perp \alpha$, din $A' = pr_{\alpha}A$ și $B' = pr_{\alpha}B$, rezultă A' diferit de B'. Pentru că proiecțiile ortogonale ale punctelor coliniare sunt coliniare, rezultă că proiecția dreptei AB pe planul α este dreapta $A'B'$.
2) Dacă $AB \perp \alpha$, atunci $pr_{\alpha}AB = \{A'\} = \{B'\}$, deci proiecția este un punct.
Consecință. Dacă $AB \cap \alpha = \{C\}$, atunci $C \in A'B' = pr_{\alpha}AB$. (Punctul de intersecție aparține proiecției.)

Știm să aplicăm. Identificăm conexiuni

Aplicația 4. Pentru cubul $ABCDEFGH$, cu centrele bazelor O și Q completați în tabel proiecția fiecărui segment pe planul corespunzător, după regula: „la intersecția liniei α cu coloana MN, se completează $pr_{\alpha}MN$”.

Segmentul proiectat / Planul pe care se proiectează	CE	DH	HB
(ABC)	AC		
(ABE)			
(DBF)			



Indicație. Proiecția segmentului CE pe planul (ABC) este segmentul determinat de proiețiile capetelor C, respectiv E, ale acestui segment, pe plan. Din $C \in (ABC)$ rezultă $pr_{(ABC)}\, C = C$. Din $E \notin (ABC)$ și $EA \perp (ABC)$ $A \in (ABC)$, rezultă $pr_{(ABC)}\, E = A$. Prin urmare, proiecția segmentului CE pe planul (ABC) este segmentul AC. În concluzie, la intersecția liniei (ABC) cu coloana CE, vom completa AC (vezi modelul).

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Dreapta d este paralelă cu un plan α și $g = pr_{\alpha}d$. Demonstrați că dreapta g este paralelă cu d.

2 Segmentul AB este situat pe o dreaptă paralelă cu planul α, iar segmentul $A'B'$ este proiecția sa pe planul α. Punctul P aparține segmentului AB, $AP = 2 \cdot PB$, iar $Q = \text{pr}_{\alpha}P$.

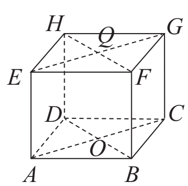
a) Demonstrați că punctul Q este situat pe segmentul $A'B'$.

b) Calculați valoarea raportului $\dfrac{QB'}{A'B'}$.

3 Fie α un plan, $A \in \alpha$ și $B \notin \alpha$, $AB = 8\sqrt{2}$ cm. Știind că proiecția punctului B pe planul α este punctul C și $AC \equiv BC$, calculați lungimea proiecției segmentului AB pe planul α.

4 Triunghiul echilateral ABC cu $AB = 20$ cm, are latura BC inclusă în planul α, iar BM și CN sunt înălțimi ale triunghiului, $M \in AC$, $N \in AB$. Calculați lungimea proiecției segmentului MN pe planul α.

5 În figura de mai jos este reprezentat un cub, iar O, respectiv Q sunt centrele fețelor $ABCD$ respectiv $EFGH$. Determinați:



a) $pr_{AD}C$, $pr_{EF}B$

b) $pr_{(ABC)}A$, $pr_{(EFG)}D$

c) $pr_{(ABC)}Q$, $pr_{(EFG)}O$

d) $pr_{(ABC)}AE$, $pr_{(BCF)}AE$

e) $pr_{(ABC)}AG$, $pr_{(BCF)}EC$

f) $pr_{(ADE)}OA$, $pr_{(ADE)}AB$, $pr_{(ADE)}BG$

6 Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât $AB \perp AC$, $AC \perp AD$, $AD \perp AB$.

a) Demonstrați că $AD \perp (ABC)$.

b) Determinați proiecțiile segmentelor BD și CD pe planul (ABC).

c) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

c_1) Proiecția segmentului BC pe planul (ABD) este segmentul AB.

c_2) Proiecția segmentului BD pe planul (ACD) este segmentul CD.

c_3) Proiecția segmentului AD pe planul (ABC) este punctul A.

7 Punctele distincte și coliniare A, B, C se proiectează pe un plan β în punctele distincte A', B, C'.

a) Arătați că $B \in \beta$ și că punctele A', B, C' sunt coliniare.

b) Demonstați că $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B}{BC'}$.

c) Pentru $A'C' = 25$ cm și $\dfrac{\mathcal{A}_{ABA'}}{\mathcal{A}_{BCC'}} = \dfrac{9}{4}$, calculați lungimile segmentelor $A'B$ și BC'.

8 Triunghiul DEF este proiecția unui triunghi oarecare ABC pe un plan α. Demonstrați că proiecția punctului G, centrul de greutate triunghiului ABC pe planul α, este punctul P, centrul de greutate al triunghiului DEF.

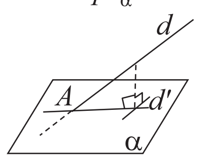
L2. Unghiul dintre o dreaptă și un plan, lungimea proiecției unui segment pe un plan

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

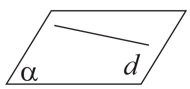
Situație problemă. Fie d o dreaptă oarecare din spațiu, α un plan și a o dreaptă inclusă în α.
Se pun următoarele două probleme: **1)** Cum determinăm unghiul format de dreapta d cu dreapta a?
2) Care este dreapta din plan care formează cu dreapta d unghiul cel mai mic?
Soluție. Pentru $d \subset \alpha$,dreptele a și d sunt coplanare. Unghiul de măsură minimă este pentru $a = d$ sau $a \parallel$ d, adică 0°.
Dacă $d \perp \alpha$, atunci $d \perp a$ pentru orice $a \subset \alpha$, adică dreapta d formează unghi de măsură 90° cu toate dreptele din α.
În cazul în care d este secantă planului și $d \not\perp \alpha$, unghiul format de dreptele d și a este unghiul determinat de dreapta d cu paralela la dreapta a, prin punctul de intersecție cu planul. Valorile unghiurilor formate de dreptele d și a variază între 0° și 90°.
Se demonstrează că dreapta a, inclusă în plan, cu care dreapta d formează unghiul cu cea mai mică măsură, este proiecția dreptei d pe planul α. Aceasta este unic determinată de dreapta d.

Definiția 1. Unghiul dintre dreapta d și planul α, $d \not\perp \alpha$ și $d \nparallel \alpha$ este unghiul format de dreapta d cu proiecția ei pe planul α.

Dacă d este secantă a planului și $d \not\perp \alpha$, atunci $\sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle(d, d')$ unde $d' = pr_\alpha d$.

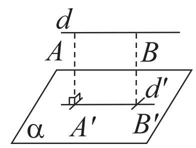


Dacă $d \subset \alpha$, atunci $\sphericalangle(d, \alpha) = 0°$.

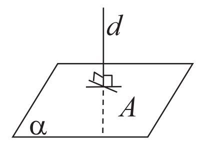


Convenții

1) Dacă $d \parallel \alpha$, atunci $\sphericalangle(d, \alpha) = 0^\circ$.

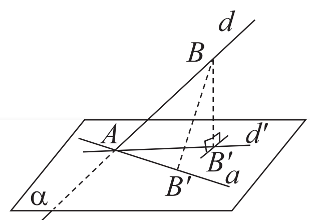


2) Dacă $d \perp \alpha$, atunci $\sphericalangle(d, \alpha) = 90^\circ$.



Observație. Dacă d este o dreaptă oarecare din spațiu și α este un plan oarecare, atunci $0 \le \sphericalangle(d, \alpha) \le 90°$.

Aplicația 1. Oricare ar fi d o dreaptă din spațiu și oricare ar fi dreapta $a \subset \alpha$, are loc relația $\sphericalangle(d, \alpha) \le \sphericalangle(d, a)$.

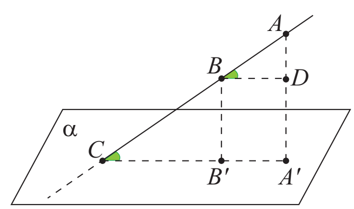


Consultați manualul digital pentru demonstrație.

Am demonstrat în lecțiile anterioare că lungimea proiecției unui segment pe un plan este cel mult egală cu lungimea segmentului. Rezultatul următor ne oferă un instrument pentru determinarea lungimii proiecției unui segment pe un plan.

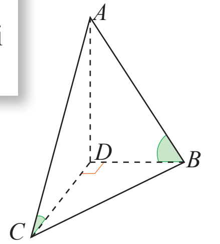
Propoziția 1. Lungimea proiecției unui segment AB pe un plan α este egală cu produsul dintre lungimea segmentului și cosinusul unghiului format de dreapta suport a segmentului AB cu planul α.

Demonstrație. Demonstrăm cazul când AB intersectează planul într-un punct C.
Notăm $A'B'$ proiecția segmentului AB pe planul α.
Construim, în planul (ACA'), prin B, paralela la $A'B'$și notăm cu D intersecția acesteia cu AA'. Se formează dreptunghiul $BB'A'D$, în care $BD = A'B'$. Unghiul dintre AB și planul α este $\sphericalangle ACA' \equiv \sphericalangle ABD$ (corespondente), iar în triunghiul dreptunghic ABD obținem $\cos(\sphericalangle ABD) = \dfrac{BD}{AB}$, deci $BD = AB \cdot \cos(\sphericalangle ABD)$ sau $A'B' = AB \cdot \cos(\sphericalangle ACA')$. Afirmația rămâne adevărată și pentru $AB \parallel \alpha$ și $AB \perp \alpha$.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 2. Proiecția triunghiului ABC pe planul α este triunghiul DBC în care $DB = 2\sqrt{3}$ cm, $BC = 4\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle BDC = 90°$, iar $AD = 6$ cm. Determinați măsurile unghiurilor formate de dreptele AB și AC cu planul α.



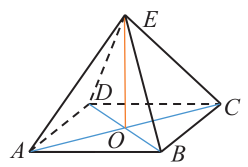
Soluție. Triunghiul BCD este dreptunghic ($\sphericalangle BDC = 90°$), $DB = 2\sqrt{3}$ cm, $BC = 4\sqrt{3}$, rezultă $CD = 6$ cm. Din enunț, $A \notin \alpha$ și $pr_\alpha A = D$, $pr_\alpha B = B$, $pr_\alpha C = C$ și atunci $pr_\alpha AB = DB$, iar $pr_\alpha AC = DC$.
Din definiție $\sphericalangle(AB, \alpha) = \sphericalangle(AB, DB) = \sphericalangle ABD$ și $\sphericalangle(AC, \alpha) = \sphericalangle(AC, DC) = \sphericalangle ACD$.

Deoarece $AD \perp \alpha$, $DB, DC \subset \alpha$, rezultă $AD \perp DB$ și $AD \perp DC$, iar triunghiurile ADB și ADC sunt dreptunghice.

În triunghiul ADB, $\sphericalangle ADB = 90°$; $\text{tg}\sphericalangle ABD = \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Atunci, $\sphericalangle ABD = \sphericalangle(AB,\alpha) = 60°$. În triunghiul ADC, $\sphericalangle ADC = 90°$, $AD = DC = 6$ cm și $\sphericalangle ACD = \sphericalangle(AC, \alpha) = 45°$.

Aplicația 3. Fie $ABCD$ un romb cu $BD = 12$ cm și E un punct exterior planului rombului, astfel încât dreptele $EA = EC = 12$ cm, $EB = ED$, iar EA face cu planul rombului un unghi de 30°.
a) Calculați proiecția segmentului EA pe planul rombului.
b) Calculați proiecția segmentului EA pe planul (EBD).
c) Calculați măsura unghiului format de dreapta EB cu planul (ABC)



Soluție. Fie $\{O\} = AC \cap BD$, intersecția diagonalelor rombului, deci EO este mediană în triunghiurile isoscele EAC și EBD, prin urmare este și înălțime. Atunci, $EO \perp AC$ și $EO \perp BD$, deci $EO \perp (ABC)$ și $pr_{(ABC)}AE = AO$, $pr_{(ABC)}EB = BO$, prin urmare $\sphericalangle(AE, (ABC)) = \sphericalangle EAO$, iar $\sphericalangle(BE, (ABC)) = \sphericalangle EBO$.

a) Cum $\sphericalangle(AE, (ABC)) = 30°$, rezultă $AO = AE \cdot \cos 30° = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm.

b) Diagonalele rombului sunt perpendiculare, deci $AO \perp BD$. Am arătat că $EO \perp (ABCD)$ și AO inclusă în ($ABCD$), de unde $EO \perp AO$. Rezultă că $AO \perp (EBD)$ (este perpendiculară pe două drepte concurente din acest plan), deci $pr_{(EBD)}EA = EO$.
Triunghiul EOA este dreptunghic și EO se opune unghiului de 30°, de unde $EO = 6$ cm.
Am demonstrat că $pr_{(ABC)}EB = BO$ și deducem că $\sphericalangle(BE, (ABC)) = \sphericalangle EBO$.
Triunghiul dreptunghic EOB are catetele $BO = EO = 6$, deci $\sphericalangle EBO = 45°$.

Temă de portofoliu

1. Demonstrați că nu există o piramidă hexagonală regulată care să aibă fețele laterale triunghiuri echilaterale.
2. a) Determinați cosinusul unghiurilor formate de muchiile laterale ale unui tetraedru regulat de muchie a, cu planul bazei, folosind *Propoziția 1*.
b) Determinați cosinusul unghiurilor formate de muchiile laterale cu planul bazei într-o piramidă patrulateră regulată cu fețele laterale triunghiuri echilaterale de muchie a.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

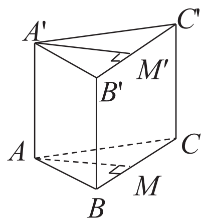
1 Desenați paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$. Numiți:

a) proiecția dreptei AF pe planul (BCF) și unghiul dreptei AF cu planul (BCF);

b) proiecția dreptei BH pe planul (ACD) și unghiul dreptei BH cu planul (ACD);

c) proiecția dreptei CE pe planul (ADE) și unghiul dreptei CE cu planul (ADE).

2 Se consideră prisma triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ cu $AB = AA'$, $AM \perp BC$ și $A'M' \perp B'C'$.



a) Numiți unghiul format de dreapta AC' cu planul (BCC').

b) Determinați măsura unghiului format de dreapta $A'B$ cu planul (ABM).

c) Determinați $\sphericalangle(AM, (BCC'))$, $\sphericalangle(BM, (AMM'))$

d) Demonstrați că $\sphericalangle(AC', (ABC)) \equiv \sphericalangle(A'B, (A'B'C'))$.

3 În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, $AB = BC = 9\sqrt{2}$ cm, iar $AC' = 12\sqrt{3}$ cm.

a) Demonstrați că $AC' = 2 \cdot AA'$.

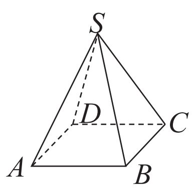
b) Calculați măsura unghiului format de dreapta AC' cu planul (ABC).

4 ABC este un triunghi dreptunghic, $\sphericalangle BAC = 90°$, iar BB' și CC' sunt perpendiculare pe planul acestuia. Știind că $B'A$ și $C'A$ fac unghiuri de $60°$, respectiv $45°$ cu planul (ABC), $B'B = 3\sqrt{3}$ cm, $C'C = 2$ cm, calculați:

a) lungimile proiecțiilor segmentelor AB', AC' pe planul trunghiului ABC;

b) aria triunghiului ABC.

5 Piramida $SABCD$ are toate muchiile de 6 cm.



a) Determinați $pr_{(ABC)}S$, $pr_{(ABC)}SA$, $pr_{(ABC)}SB$.

b) Calculați măsurile unghiurilor triunghiului SAC.

c) Demonstrați că $DB \perp (SAC)$.

d) Determinați $\sphericalangle(SA, (ABC))$, $\sphericalangle(SB, (SAC))$.

6 Pe planul triunghiului dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $AB = AC = 4\sqrt{3}$ cm, se ridică perpendiculara TA astfel încât $TA = 2\sqrt{2}$ cm, iar N este mijlocul segmentului BC.

a) Demonstrați că $BC \perp (ANT)$.

b) Calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle(AT, (ABC))$, $\sphericalangle(AT, (ANT))$, $\sphericalangle(AB, (ANT))$, $\sphericalangle(NT, (ABC))$.

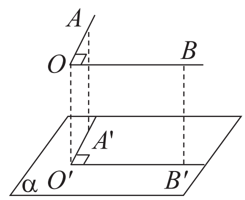
7 Dreptele AM și DN sunt perpendiculare pe planul hexagonului regulat $ABCDEF$, punctele M și N fiind situate de o parte și de alta a planului (ABC), $AM = DN = AB = a$.

a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

b) Demonstrați că punctele M, A, N, D sunt vârfurile unui paralelogram.

c) Determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle(MN, (ABC))$, $\sphericalangle(MA, (ABC))$, $\sphericalangle(AD, (BCE))$.

8 Unghiul drept AOB se proiectează pe planul α și se obține unghiul drept $A'O'B'$. Se știe că $OA \nparallel \alpha$.

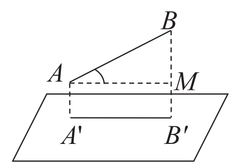


a) Demonstrați că $O'A' \perp (OB'O')$

b) Demonstrați că $OB \perp (O'A', OA)$

c) Demonstrați că $OB \parallel \alpha$.

9 Dreapta AB formează cu planul α un unghi de $30°$. Proiecția $A'B'$, a segmentului AB pe α, are lungimea de 24 cm.



a) Calculați lungimea segmentului AB.

b) Calculați lungimea proiecției segmentului AB pe dreapta BB'.

10 Pe planul triunghiului dreptunghic ABC se ridică perpendiculara, în mijlocul M al ipotenuzei BC, pe care se fixează punctul N astfel încât $MN = 8$ cm. Știind că $AB = AC = 6\sqrt{2}$ cm, calculați:

a) lungimea proiecției segmentului AN pe planul (BCN);

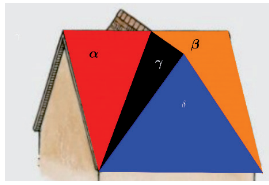
b) lungimea proiecției segmentului AC pe planul (AMN).

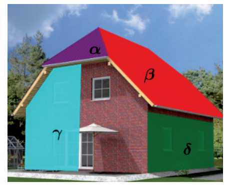
L3. Unghi diedru, unghi plan corespunzător unghiului diedru, unghiul a două plane, plane perpendiculare

Ne amintim!

În plan, mulțimea tuturor punctelor situate de aceeași parte a unei drepte se numește semiplan.
Dacă dreapta d este inclusă în planul α, aceasta determină două semiplane.

Geometria în spațiu este unul dintre *modelele matematice* cele mai utilizate în practică. Priviți casele din imagini și observați câteva din planele care le delimitează: planele pereților, planele din care pot fi identificate porțiuni, pe suprafața acoperișului.

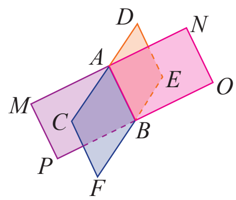




Apar în mod natural întrebările. Cum putem caracteriza *înclinarea* lor, unul față de altul? Putem vorbi despre „*unghiurile* formate de două plane“?

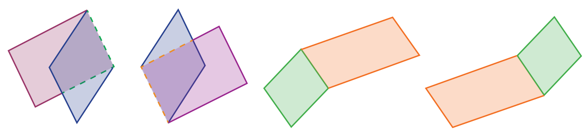
Planele notate pe desene sunt secante, două câte două, adică au o dreaptă comună.

Considerăm două plane care se intersectează după dreapta AB. Dreapta de intersecție împarte fiecare plan în câte două semiplane. Obținem astfel, o construcție geometrică de bază a geometriei în spațiu, formată din două semiplane, provenite din plane diferite, care au ca *margine* o dreaptă comună. Vizualizați pe figura alăturată:

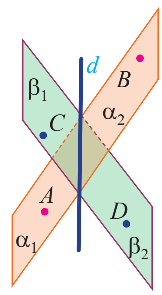


Definiția 1. Figura geometrică formată de două semiplane, mărginite de aceeași dreaptă, se numește *unghi diedru* sau, mai scurt, *diedru.*

Dreapta comună a celor două semiplane se numește *muchia diedrului*, iar semiplanele se numesc *fețele diedrului.*



Observație. Dacă în planul α considerăm dreapta $d \subset \alpha$, iar A *și* B sunt două puncte ale planului, situate de o parte și de alta a dreptei d (segmentul AB are un punct comun cu d), notăm cu α_1 semiplanul delimitat de dreapta d, care conține punctul A și cu α_2 semiplanul delimitat de dreapta d, care conține punctul B. În practică, se folosesc notațiile: $\alpha_1 = (d, A$ și $\alpha_2 = (d, B$, evidențiind dreapta care delimitează semiplanul și un punct exterior dreptei, pe care acesta îl conține.



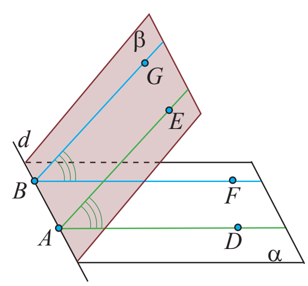
Exemplu. Planele α și β se intersectează după drepta d și generează semiplanele α_1, α_2, respectiv β_1 *și* β_2. Fiecare pereche de semiplane, astfel fomate, este un unghi diedru. Planele secante α și β determină patru unghiuri diedre: $\sphericalangle(\alpha_1, \beta_1)$, $\sphericalangle(\alpha_1, \beta_2)$, $\sphericalangle(\alpha_2, \beta_1)$ și $\sphericalangle(\alpha_2, \beta_2)$.

Propoziția 1. Pe muchia d a unghiului diedru $\sphericalangle(\alpha, \beta)$ considerăm punctele A și B prin care construim planele $\gamma_1 \perp d$ *și* $\gamma_2 \perp d$. Notăm AD și AE semidreptele de intesecție ale planului γ_1 cu diedrul și cu BF și BG semidreptele de intersecție ale planului γ_2 cu diedrul.

Atunci, $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle FBG$.

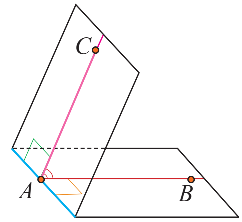
Demonstrație. Din $\gamma_1 \perp d$ și $\gamma_2 \perp d$, rezultă $\gamma_1 \parallel \gamma_2$.

Planele paralele γ_1 și γ_2 sunt tăiate de α după dreptele $AD \parallel BF$ și de β după dreptele $AE \parallel BG$. În consecință, $\sphericalangle DAE$ și $\sphericalangle FBG$ au laturile respectiv paralele, deci sunt congruente.



Definiția 2. Se numește *unghi plan al unui unghi diedru* unghiul determinat de intersecția fețelor diedrului cu un plan perpendicular pe muchia comună.
Definiția 3. Măsura unui unghi diedru este egală cu măsura oricărui unghi plan al unghiului diedru.

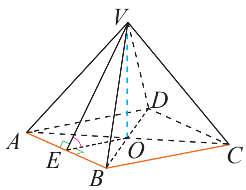
Observație. **1)** *Propoziția 1* ne asigură că măsura unghiului plan corespunzător unui diedru nu depinde de punctul în care construim planul perpendicular pe muchia acestuia.
2) Semidreptele care formează unghiul plan al unui diedru sunt perpendiculare pe muchia diedrului.
Observația de mai sus ne oferă următorul algoritm de construcție a unghiului plan corespunzător unui diedru:



a) Alegem, pe muchia diedrului, un punct convenabil.
b) În fiecare din fețele diedrului, prin punctul ales, construim câte o semidreaptă, perpendiculară pe muchie
c) Unghiul determinat de cele două semidrepte este unghiul plan al unghiului diedru.

Aplicația 1. **a)** Construiți unghiurile plane corespunzătoare diedrelor formate de planul bazei și fețele unei piramide patrulatere regulate. **b)** Calculați măsura acestor unghiuri diedre știind că înălțimea piramidei este jumătate din latura bazei.

Soluție. **a)** Pentru diedrul format din semiplanele $(AB, C$ și $(AB, V$ alegem E mijlocul segmentului AB. Deoarece triunghiurile ABV și ABO sunt isoscele, rezultă $VE \perp AB$, $EO \perp AB$, adică unghiul plan al unghiului diedru este $\sphericalangle VEO$.



b) Din ipoteză, $VO = \frac{1}{2}AB$, iar $ABCD$ este pătrat, deci $OE = \frac{1}{2}AB$ (apotema pătratului).
Considerând ΔVOE, dreptunghic în O ($VE \perp EO$), acesta are catetele congruente, deci $\sphericalangle VEO = 45°$.
Pentru planele secante α și β cu $\alpha \cap \beta = d$ putem defini *măsura* unghiului format de ele astfel:

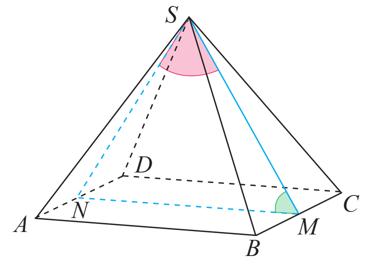
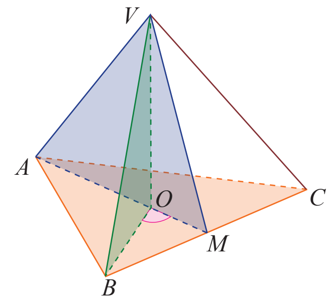
Definiția 4. Măsura unghiului dintre două plane neparalele este cea mai mică valoare a măsurilor unghiurilor plane ale unghiurilor diedre formate.

Observație. Două plane secante formează două perechi de unghiuri diedre cu aceeași măsură și două perechi de unghiuri diedre suplementare.
Prin convenție, *măsura unghiului a două plane* paralele este 0°.
În una din lecțiile anterioare, am definit perpendicularitatea a două plane, astfel: Două plane secante sunt perpendiculare dacă o dreaptă, inclusă în unul dintre ele și perpendiculară pe dreapta comună, este perpendiculară pe celălalt plan. Deducem că măsura unghiurilor diedre formate de plane perpendiculare este de 90°, adică măsura unghiului a două plane perpendiculare este de 90°.
Concluzie. Măsura unghiului a două plane este un număr din intervalul [0°, 90°].
Suntem acum în măsură să facem o nouă *caracterizare* a perpendicularității a două plane, cunoscută, de regulă, ca definiție a acestei noțiuni.

Definiția 5. Două plane sunt perpendiculare dacă măsura unghiului format de ele este 90°.

Remarcă. Următoarele rezultate sunt consecințe imediate ale perpendicularității planelor, foarte utile în rezolvarea problemelor.
1. Două plane secante sunt perpendiculare dacă determină unghiuri diedre drepte.
2. Dacă un plan conține o dreaptă perpendiculară pe alt plan, atunci cele două plane sunt perpendiculare.
3. Dacă două plane sunt perpendiculare și o dreaptă situată într-unul dintre ele este perpendiculară pe intersecția planelor, atunci această dreaptă este perpendiculară pe celălalt plan.
4. Dacă două plane sunt perpendiculare, iar printr-un punct al unuia dintre ele se construiește o dreaptă perpendiculară pe al doilea, atunci aceasta este conținută în primul plan.

MINITEST La cerințele următoare alegeți varianta corectă; doar un răspuns este corect.

1. Se consideră piramida regulată $SABCD$ și punctele M, N mijloacele muchiilor BC, respectiv AD.			
a) În desen, este marcat cu roșu unghiul plan corespunzător unghiului format de planele:			
A. (SAD) și (SAB)	B. (SAD) și (SBC)	C. (SAD) și (SCD)	
b) În desen, este marcat cu verde unghiul plan corespunzător unghiului format de planele:			
A. (SBC) și (SCD)	B. (SBC) și (SAB)	C. (SBC) și (ABD)	
2. $VABC$ este o piramidă regulată, VO este înălțimea sa, iar $AO \cap BC = \{M\}$.			
a) Unghiul plan corespunzător diedrului determinat de semiplanele $(OV, M$ și $(VO, B$ este:			
A. $\sphericalangle VOA$	B. $\sphericalangle VOB$	C. $\sphericalangle BOM$	
b) Unghiul plan corespunzător diedrului determinat de semiplanele $(BC, A$ și $(BC, V$ este:			
A. $\sphericalangle VBA$	B. $\sphericalangle VMA$	C. $\sphericalangle VCA$	
c) Măsura unghiului planelor (VOA) și (VOB) este:			
A. $60°$	B. $90°$	C. $120°$	

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Desenați pe caiete o prismă triunghiulară regulată $ABCDEF$.

a) Identificați unghiurile diedre determinate de următoarele perechi de fețe: $(BCFE)$ și $(ACFD)$, $(ABED)$ și $(BCFE)$.

b) Marcați, pe desen, câte un unghi plan corespunzător diedrului pentru fiecare caz.

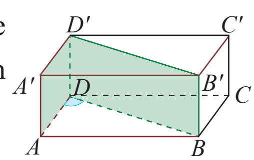
2 **a)** Desenați dreptunghiurile $ABCD$ și $CDEF$, situate în plane diferite. Identificați un unghi plan corespunzător diedrului format.

b) Dacă triunghiul ADE este echilateral, aflați măsura unghiului format de planele dreptunghiurilor.

3 Fie cubul $ABCDEFGH$. Calculați măsurile unghiurilor formate de planele:

a) $(ABCD)$ și $(BCGF)$ **b)** (ABE) și (ADH)
c) (ADH) și (EFG) **d)** (ABG) și (ABH)
e) (ABD) și (ADF) **f)** (ACG) și (BDF)

4 Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $BC = 6$ cm și $AA' = 2\sqrt{3}$ cm.



a) Numiți două dintre unghiurile plane corespunzătoare diedrului format de semiplanele $(DD', A$ și (DD', B).

b) Calculați măsura unghiului format de planele $(DD'A)$ și $(DD'B)$.

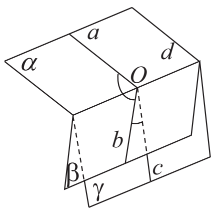
5 Piramida patrulateră regulată $SABCD$ are muchia bazei de 10 cm și muchia laterală $5\sqrt{5}$ cm.

a) Identificați diedrele corespunzătoare următoarelor perechi de fețe: SBC și $ABCD$; SAD și $ABCD$; SBC și SAD

b) Determinați măsura unghiului format de planele (SAD) și (ABC).

c) Determinați măsura unghiului format de planele (SAD) și (SBC).

6 În figura alăturată, $\sphericalangle(a, b)$ este unghiul plan corespunzător diedrului (α, β), iar $\sphericalangle(b, c)$ este unghiul plan corespunzător diedrului (β, γ), astfel încât $\sphericalangle(a, b) \leq 45°$, $\sphericalangle(b, c) \leq 45°$.



a) Demonstrați că semidreptele a, b, c sunt coplanare.

b) Demonstrați că măsura diedrului (α, γ) este egală cu suma măsurilor diedrelor (α, β) și (β, γ).

7 Fie $ABCD$ un tetraedru regulat de muchie a.

a) Demonstrați că într-un tetraedru regulat, oricum am alege două fețe, măsura diedrului determinat de ele este aceeași.

b) Calculați cosinusul unghiului format de planele (ABC) și (BCD).

8 Prisma regulată $ABCDEF$ are muchia bazei 36 cm.

a) Demonstrați că $DB = DC$.

b) Știind că măsura unghiului format de planele (DBC) și (ABC) este de 60°, calculați înălțimea prismei.

9 Fie $ABCDEF$ o prismă triunghiulară regulată, cu $AB = 18$ cm și $AD = 9$ cm. Calculați măsura unghiului format de planele (DBC) și (ABC).

10 În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, latura bazei este de 16 cm, DE este linie mijlocie a triunghiului ABC, $D \in AB$, $E \in AC$, iar măsura unghiului format de planele $(A'DE)$ și (ABC) este de $60°$.

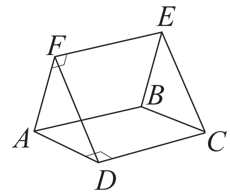
a) Desenați prisma și completați desenul cu planul $(A'DE)$.

b) Arătați că $AA' = 12$ cm.

c) Calculați măsura unghiului planelor $(A'DE)$ și $(B'C'ED)$.

11 Pătratele $ABCD$ și $ABEF$ sunt situate în plane diferite și determină un diedru cu măsura de 70°.

a) Marcați un unghi plan corespunzător acestui diedru.



b) Realizați desenul pe caiete, apoi marcați unghiul format de planele (ABC) și (DCE).

c) Calculați măsura unghiului format de planele (ABC) și (DCE).

12 Pătratul $ABCD$ și trapezul dreptunghic $ABMN$, cu $AB \parallel MN$ și $\sphericalangle BAN = 90°$, sunt situate în plane diferite și determină un diedru cu măsura de 30°. Știind că $AB = AN = 12$ cm, aflați:

a) măsura unghiului format de planele (ABC) și (CDN);

b) măsura unghiului format de planele (ABN) și (CDM).

13 Unghiul diedru determinat de semiplanele corespunzătoare pătratelor $ABPM$ și $ABQN$ are măsura de 60°.

a) Demonstrați că $AMNBPQ$ este o prismă regulată, cu toate muchiile congruente.

b) Calculați tangenta unghiului format de planele (APQ) și (BPQ).

14 Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată, cu toate fețele laterale triunghiuri echilaterale, $AB = 24$ cm. Calculați:

a) cosinusul unghiului format de planele (ABC) și (VBC).

b) sinusul unghiului format de planele (VAC) și (VBC).

15 Desenați un cub $ABCDEFGH$. Demonstrați, folosind măsura unghiului plan corespunzător unui diedru, că:

a) $(ABC) \perp (BCF)$

b) $(ADH) \perp (CDG)$

c) $(ACG) \perp (BDF)$

16 Triunghiul echilateral PAB și triunghiul dreptunghic isoscel QAB, $\sphericalangle AQB = 90°$ sunt situate în plane diferite, $AB = PQ = 30$ cm, iar M este mijlocul laturii AB.

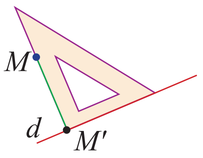
a) Calculați măsura unghiului PMQ.

b) Demonstrați că $(PAB) \perp (QAB)$.

6 Teorema celor trei perpendiculare

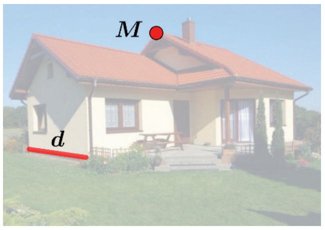
L1. Teorema celor trei perpendiculare, calculul distanței de la un punct la o dreaptă

Descoperim, înțelegem, exemplificăm



În plan, construcția perpendicularei dintr-un punct pe o dreaptă se realizează cu ajutorul echerului. Astfel de construcții se pot realiza dacă distanțele sunt suficient de mici sau dacă instrumentul este suficient de mare.

Geometria în spațiu complică problema, în sensul că ori planul este greu de materializat, ori distanțele dintre punct și dreaptă sau dintre punct și plan sunt mari. Nu se poate lucra cu instrumente destul de mari pentru a determina perpendiculara dintr-un punct al acoperișului unei case la o dreaptă care mărginește fundația.

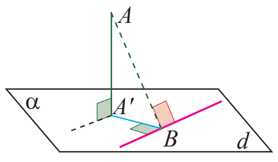


Teorema celor trei perpendiculare ne ajută să determinăm distanța de la un punct la o dreaptă, în spațiu.

Teorema celor trei perpendiculare. Considerăm un plan α, un punct $A \notin \alpha$ și o dreaptă $d \subset \alpha$.
Dacă $AA' \perp \alpha$, $A' \in \alpha$ *și* $A'B \perp d$, $B \in d$, atunci $AB \perp d$.

Demonstrație. Din $AA' \perp \alpha$, rezultă că dreapta AA' este perpendiculară *pe orice dreaptă din plan*.

În particular, $AA' \perp d$ sau $d \perp AA'$. Dar, $d \perp A'B$, adică d este perpendiculară pe dreptele concurente AA' și $A'B$; prin urmare, este perpendiculară pe *planul determinat de ele.* Am obținut $d \perp (A'AB)$, iar cum $AB \subset (A'AB)$, rezultă $d \perp AB$.



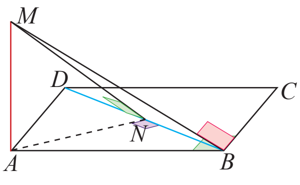
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

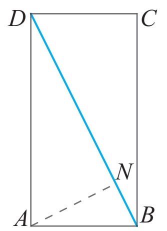
Aplicația 1. Pe planul dreptunghiului $ABCD$, cu laturile $AB = 5$, $AD = 12$, în vârful A, se ridică perpendiculara AM, astfel încât $AM = 12$.

a) Calculați distanța de la M la latura BC.

b) Construiți perpendiculara din punctul M la diagonala BD.

c) Calculați distanța de la punctul M la diagonala BD.





Soluție. **a)** Din ipoteză, $MA \perp (ABCD)$, $AB \perp BC$ și $BC \subset (ABCD)$. Aplicăm *teorema celor trei perpendiculare* și rezultă $MB \perp BC$. Prin urmare, $d(M, BC) = MB$. În triunghiul dreptunghic ABM, aplicăm teorema lui Pitagora și $MB = \sqrt{AM^2 + AD^2} = 13$.

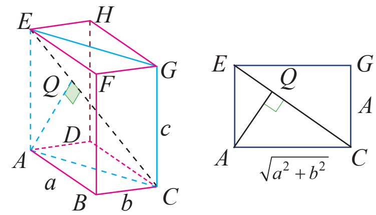
b) Construim $AN \perp BD$, $N \in BD$. Atunci, $MA \perp (ABCD)$, $AN \perp BD$ și $BD \subset (ABCD)$, adică ipotezele teoremei celor trei perpendiculare, din care rezultă $MN \perp BD$.

c) În triunghiul dreptunghic ABD înălțimea din A este $AN = \dfrac{AB \cdot AD}{AD}$. În același triunghi, cu teorema lui Pitagora, obținem $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 13$. Revenind la înălțime, $AN = \dfrac{60}{13}$.

În triunghiul dreptunghic AMN, $MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \dfrac{12}{13}\sqrt{194}$.

Aplicația 2. Considerăm paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$ cu $AB = a$, $BC = b$ și $AE = c$. Calculați distanțele de la vârful A la diagonalele paralelipipedului.

Soluție: Diagonalele paralelipipedului dreptunghic sunt: AG, EC, BH, DF. Ne interesează distanțele de la A la BH, DF și EC.



Diagonala EC a paralelipipedului este și diagonală a dreptunghiului $ACGE$, secțiunea diagonală. Laturile dreptunghiului sunt $EA = c$ și $AC = \sqrt{a^2+b^2}$.

Triunghiul AEC este dreptunghic și $d(A, EC) = \dfrac{ac}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Distanța de la A la diagonalele DF și BH se determină folosind *teorema celor trei perpendiculare.*
DF și BH aparțin secțiunii diagonale ($DBFH$).
$HD \perp (ABCD)$ și $HD \subset (DBFH)$, deci $(DBFH) \perp (ABCD)$, având dreapta DB comună.
Atunci, perpendiculara AR, din A pe BD, este perpendiculară pe $(DBFH)$, adică $AR \perp (DBFH)$.
Construim $RT \perp BH$, $T \in BH$. Cum $AR \perp (DBFH)$, $BH \subset (DBFH)$ și $RT \perp BH$, rezultă, cu teorema celor trei perpendiculare, $d(A, BH) = AT$.

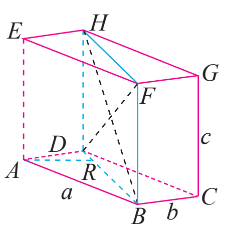
În planul ($ABCD$), obținem $AR = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, iar cu teorema catetei, $DR = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ și $BR = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

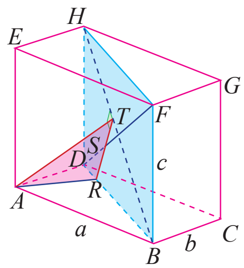
Triunghiurile dreptunghice BTR și BDH sunt asemenea (U.U), de unde $RT = \dfrac{ca^2}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

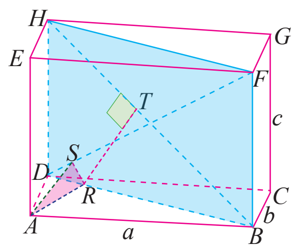
Cum $AR \perp (DBFH)$, rezultă $AR \perp RT$, iar cu teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ART obținem

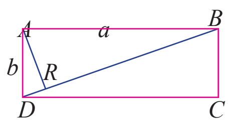
$$d(A,BH) = AT = \frac{a\sqrt{b^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

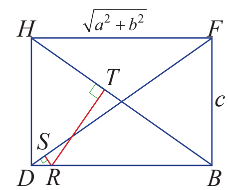
Printr-un raționament similar pentru $AR \perp (DBFH)$, $FD \subset (DBFH)$ și $RS \perp FD$ rezultă, cu teorema celor trei perpendiculare, $d(A, FD) = AS$. Prin calcul, $d(A,DF) = AS = \dfrac{b\sqrt{b^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.









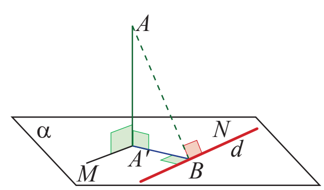


Temă de portofoliu

Rezolvați **Aplicația 2** pentru cazul particular $a = 12$, $b = 5$, $c = 4$.

Observație: Configurația geometrică prin care ilustrăm teorema celor trei perpendiculare ne oferă și o *tehnică* de construcție pentru perpendiculara dintr-un punct pe o dreaptă, în spațiu.

Comentariu. Ne întrebăm: De ce acest rezultat se numește *Teorema celor **trei** perpendiculare*?



Dreapta $AA' \perp \alpha$, deci formează cu cel puțin două drepte concurente unghiuri drepte. $\sphericalangle AA'M = 90°$ și $\sphericalangle AA'B = 90°$, iar dreapta $AB \perp d$, $\sphericalangle A'BN = 90°$.
Avem deci, în ipoteză, trei unghiuri drepte care dau numele teoremei. Rezultatul este că al patrulea unghi este $\sphericalangle ABN = 90°$. Reținem această abordare, deoarece vom vedea că la reciprocele teoremei, alegem alte trei unghiuri drepte dintre cele patru, rezultând cel omis, ca fiind drept.

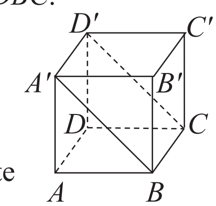
Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Dreapta PA este perpendiculară pe planul pătratului $ABCD$. Demonstrați că:`
a) $PB \perp BC$ **b)** $PD \perp CD$
c) Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, atunci $PO \perp BD$.

2 Pe planul rombului $MNPQ$ se ridică perpendiculara AM, iar $MP \cap NQ = \{O\}$. Demonstrați că $AO \perp NQ$.

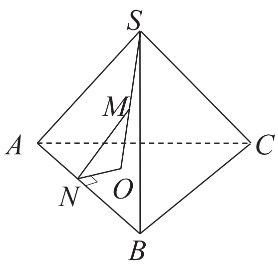
3 Dreapta DA este perpendiculară pe planul triunghiului isoscel ABC, $AB \equiv AC$.
a) Știind că E este mijlocul laturii BC, demonstrați că $DE \perp BC$.
b) Pentru $AB = 20$ cm, $BC = 32$ cm și $DA = 5$ cm, calculați aria triunghiului DBC.

4 În figura alăturată, este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$.



a) Demonstrați că $A'B \perp BC$.
b) Demonstrați că $A'D'CB$ este dreptunghi.

5 Piramida triunghiulară regulată $SABC$ are muchia bazei $AB = 24$ cm și înălțimea $SO = 8\sqrt{3}$ cm. Fie M mijlocul segmentului SO, N mijlocul segmentului AB.



a) Demonstrați că $MN \perp AB$.
b) Calculați lungimile segmentelor MN și MA.

6 Se consideră triunghiul dreptunghic MAB, cu $\sphericalangle AMB = 90^\circ$, $MA = 16$ cm, $AB = 20$ cm. Perpendiculara, în vârful M, pe planul triunghiului, conține punctul N și $MN = 7{,}2$ cm. Aflați distanța de punctul N la dreapta AB.

7 Pe planul pătratului $CDEF$ de latură 9 cm, se ridică perpendiculara CM, $CM = 12$ cm. Calculați:
a) distanțele de la punctul M la laturile pătratului;
b) distanțele de la punctul M la diagonalele pătratului.

8 În vârful A al triunghiului echilateral ABC, de latură a, se construiește perpendiculara PQ pe planul triunghiului, $PA = QA = \dfrac{3a}{2}$, iar punctul D este mijlocul laturii BC.
a) Demonstrați că $PD \perp BC$.
b) Demonstrați că $BC \perp (DPQ)$.
c) Calculați aria și perimetrul triunghiului DPQ.

9 Fie triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Știind că O este mijlocul laturii BC și $OP \perp (ABC)$, $OP = 4$ cm, calculați distanța de la punctul P la laturile triunghiului.

10 Dreapta MA este perpendiculară pe planul rombului $ABCD$, iar $MA = AB = BD = 6$ cm. Calculați:
a) distanța de la punctul M la diagonala BD;
b) suma distanțelor de la punctul M la laturile rombului.

11 Fie $ABCDEFGH$ un cub, punctele M, N, P mijloacele muchiilor EH, AD, respectiv BC și O mijlocul segmentului MP. Demonstrați că:
a) $MP \perp BC$; **b)** $MP \perp EH$;
c) $AD \perp (MNP)$; **d)** $AO \perp MP$.

12 $ABCD$ este un trapez, $AB \parallel CD$, $AD = BC = CD = 12$ cm, $AB = 24$ cm. Pe planul trapezului, se consideră perpendiculara EA, astfel încât $EA = 12$ cm. Calculați distanțele de la punctul E la dreptele CD, respectiv BC.

13 Pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle(xOy)$, se consideră punctul $A \neq O$ și fie $AA' \perp (xOy)$. Demonstrați că distanțele de la punctul A' la laturile unghiului sunt egale.

14 $VABCD$ este o piramidă patrulateră cu toate muchiile congruente, punctul E este mijlocul muchiei VA, iar VO este înălțimea piramidei, $VO = 8\sqrt{2}$ cm. Aflați distanța de la punctul E la diagonalele bazei piramidei.

15 Pe planul triunghiului ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, se consideră perpendicularele AD și BE cu $AD \equiv BE$.
a) Demonstrați că triunghiul CDE este dreptunghic.
b) Pentru $AC = 3\sqrt{7}$ cm, $CD = 12$ cm și $EC = 1{,}5$ dm, calculați:
b_1) distanța de la punctul B la planul (ADC);
b_2) distanța de la punctul B la dreapta DC.

16 Punctul I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Pe perpendiculara în I pe planul triunghiului se fixează un punct M, $M \notin (ABC)$. Demonstrați că $d(M, AB) = d(M, BC) = d(M, AC)$.

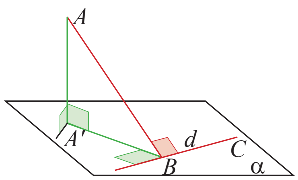
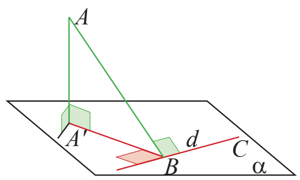
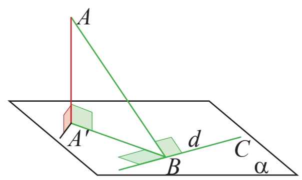
L2. Reciproce ale teoremei celor trei perpendiculare, calculul distanței dintre două plane paralele

Ne amintim!

Pornind de la o teoremă, pe care o numim *teoremă directă*, putem formula un alt enunț, în care *ipoteza conține concluzia teoremei directe*, iar *concluzia* noului enunț este *ipoteza* sau *o parte a ipotezei teoremei directe*. Un astfel de enunț se numește *reciproca teoremei directe*.
Reciproca unei teoreme poate fi adevărată sau falsă. Dacă reciproca este adevărată, atunci se numește *teorema reciprocă*.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Pornind de la teorema celor trei perpendiculare, putem formula două reciproce, ambele adevărate, adică două *teoreme reciproce.*
Considerăm un plan α, un punct $A \notin \alpha$ și o dreaptă $d \subset \alpha$. Folosind notațiile din desene și știind că $A' \in \alpha$, $B, C \in d$, vom detalia construcția reciprocelor teoremei celor trei perpendiculare.

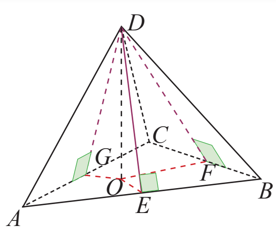
<table>
<tr><th></th><th>Teorema directă</th><th>Reciproca 1</th><th>Reciproca 2</th></tr>
<tr><td>reprezentare</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>ipoteza</td><td>$AA' \perp \alpha$ și $A'B \perp d$</td><td>$AA' \perp \alpha$ și $AB \perp d$</td><td>$A'B \perp d$, $AB \perp d$ și $AA' \perp A'B$</td></tr>
<tr><td>concluzie</td><td>$AB \perp d$</td><td>$A'B \perp d$</td><td>$AA' \perp \alpha$</td></tr>
</table>

Teorema 1. (reciproca 1 a teoremei celor trei perpendiculare)
Considerăm un plan α, o dreaptă $d \subset \alpha$ și un punct $A \notin \alpha$. Dacă $AA' \perp \alpha$, $A' \in \alpha$, punctul $B \in d$ astfel încât $AB \perp d$, atunci $A'B \perp d$.

Demonstrație. Pentru a demonstra că $A'B \perp d$, căutăm un plan în care să fie inclusă una dintre drepte și pe care cealaltă să fie perpendiculară.
Considerăm planul $(AA'B)$ cu $A'B \subset (AA'B)$. Demonstrăm că dreapta d este perpendiculară pe $(AA'B)$. Din ipoteză, $d \perp AB$ și este suficient să arătăm că este perpendiculară și pe AA'. Cum $AA' \perp \alpha$ și $d \subset \alpha$, rezultă $AA' \perp d$ sau $d \perp AA'$. Așadar, $d \perp AB$ și $d \perp AA'$, adică $d \perp (AA'B)$, care include dreapta $A'B$, de unde $d \perp A'B$.

Aplicația 1. Tetraedrul $DABC$, cu baza ABC, are toate fețele laterale triunghiuri isoscele cu vârful D. Arătați că înălțimea tetraedrului conține centrul cercului circumscris bazei.

Soluție. Înălțimea din D intersectează planul bazei (ABC) în O. Notăm cu E, F, G mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC. În triunghiul isoscel ABD, DE este mediană, deci $DE \perp AB$. Verificăm ipotezele Reciprocei 1 a teoremei celor trei perpendiculare: $DO \perp (ABC)$, $AB \subset (ABC)$, $DE \perp AB$. Rezultă $OE \perp AB$.
Analog $OF \perp BC$ și $OF \perp AC$, adică O este centrul cercului circumscris bazei.

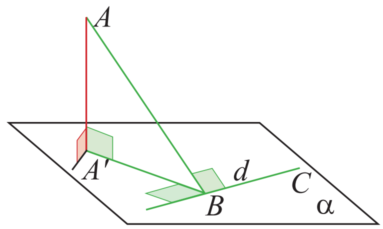


Temă de portofoliu

1) Formulați și demonstrați o aplicație similară pentru piramida patrulateră cu fețele laterale triunghiuri isoscele.
2) Demonstrați că tetraedrul, având proprietatea că trei dintre înălțimile sale intersectează bazele în centrele cercurilor circumscise este tetraedru regulat.

Teorema 2. (reciproca 2 a teoremei celor trei perpendiculare) Considerăm un plan α, o dreaptă $d \subset \alpha$, un punct $A \notin \alpha$ și un punct $A' \in \alpha$. Dacă $A'B \perp d$, $B \in d$, $AB \perp d$ și $AA' \perp A'B$, atunci $AA' \perp \alpha$.

Demonstrație. Trebuie să demonstrăm că AA' este perpendiculară pe două drepte concurente din α. Din ipoteză, $AA' \perp A'B$ *și* $A'B \subset \alpha$ și este suficient să demonstrăm că AA' este perpendiculară pe o a doua dreaptă din planul α.
Evident, ne concentrăm pe dreptele existente în figură, adică asupra perpendicularității lui AA' pe d. Căutăm un plan care conține una din drepte și pe care cealaltă este perpendicular. Alegem $(AA'B) \supset AA'$ și vom arăta *că* $d \perp (AA'B)$. Din ipoteză, $d \perp A'B$, $d \perp AB$, $A'B \subset (AA'B)$, $AB \subset (AA'B)$; în concluzie $d \perp (AA'B)$, în particular $d \perp AA'$.
Am arătat că $AA' \perp A'B$, $A'B \subset \alpha$, $AA' \perp d$, $d \subset \alpha$, de unde rezultă $AA' \perp \alpha$.

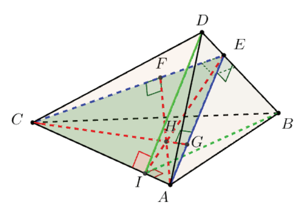


Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Sinteză.
1) Ipoteza prin care o dreaptă este perpendiculară pe un plan reprezintă, de fapt, nu o singură ipoteză, ci o infinitate. Această ipoteză ne spune că dreapta dată este perpendiculară pe orice dreaptă din acel plan. Putem alege dintre ele acele drepte care sunt convenabile problemei.
2) Dacă există un plan care conține pe una dintre ele și pe care cealaltă dreaptă este perpendiculară atunci cele două drepte sunt perpendiculare.
3) Pentru ca o dreaptă să fie perpendiculară pe un plan, este suficient să fie perpendiculară pe două drepte concurente din acel plan.

Aplicația 2. În tetraedrul $ABCD$, înălțimile din A și C ale fețelor ABD și CBD sunt concurente în E, $E \in BD$.
a) Arătați că înălțimile din A și C ale tetraedrului sunt concurente.
b) Arătați că înălțimile din B și D ale fețelor BAC și DAC sunt concurente într-un punct pe dreapta AC.

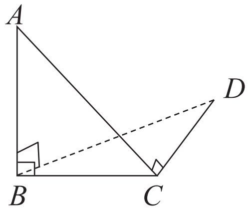
Soluție. a) $AE \perp BD$ și $CE \perp BD$ ne încurajează să construim perpendiculara $AF \perp CE$ pentru a crea configurația caracteristică Reciprocei 2, a teoremei celor trei perpendiculare, din care obținem $AF \perp (CBD)$, deci AF este înălțimea, din A, a tetraedrului Analog, construim $CG \perp AE$, $G \in AE$ rez, rezultă $CG \perp (ABD)$, adică CG este înălțimea din C a tetraedrului.
Cum AF și CG sunt înălțimi ale triunghiului CEA, rezultă că sunt concurente în H, ortocentrul acestui triunghi. În consecință, înălțimile tetraedrului din A și C sunt concurente.



b) Cum înălțimile ΔCEA sunt concurente rezultă că EH intersectează dreapta AC în I, fiind perpendiculară pe aceasta.Arătăm că $DI \perp AC$. Din $DE \perp EA$ și $DE \perp EC$ rezultă $DE \perp (CEA)$, $AC \subset (CEA)$ și $EI \perp AC$. Aplicând teorema celor trei perpendiculare, obținem $DI \perp AC$. Analog $BE \perp (ACE)$, $AC \subset (CEA)$, $EI \perp AC$, de unde, $BI \perp AC$, adică înălțimile din B și D ale fețelor DAC și BAC se intersectează în I.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

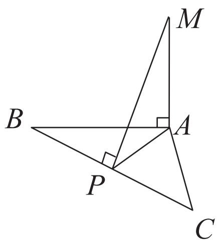
1 Punctele A, B, C, D sunt necoplanare, $AB \perp (BCD)$ și $AC \perp CD$.



a) Demonstrați că triunghiul BCD este dreptunghic.

b) Dacă $d(A, (BCD)) = 8$ cm și $d(A, CD) = 10$ cm, calculați $d(B, CD)$.

2 În configurația alăturată, $MA \perp (ABC)$ și $MP \perp BC$, $P \in BC$, $MA = a - b$, $MP = a + b$, $a > b > 0$. Calculați înălțimea din A a triunghiului ABC.



3 În centrul O al dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara pe planul dreptunghiului, pe care se ia un punct M.

a) Demonstrați că $d(M, AB) = d(M, CD)$ și $d(M, AD) = d(M, BC)$.

b) Dacă $MO = 12$ cm și distanțele de la punctul M la laturile dreptunghiului sunt de 13 cm și 15 cm, calculați perimetrul dreptunghiului.

4 Dreapta MA este perpendiculară pe planul trapezului $ABCD$, $AB \parallel CD$.
Se știe că $d(M, CD) = MD$.

a) Demonstrați că trapezul $ABCD$ este dreptunghic.

b) Pentru $AB = 8$ cm, $CD = 4$ cm, $MD = 8$ cm, $MA = 4\sqrt{3}$ cm, calculați:

b_1) măsura unghiului ascuțit al trapezului;

b_2) distanța de la punctul M la dreapta BC.

5 Dreapta SA este perpendiculară pe planul paralelogramului $ABCD$. Se știe că $SA = AD = 8$ cm și $d(S, BC) = SC = 16$ cm.
Calculați suma distanțelor de la punctul S la laturile paralelogramului.

6 Fie xOy un unghi, P un punct exterior planului unghiului și $PA \perp (xOy)$, $A \in Int \sphericalangle xOy$.
Dacă $d(P,Ox) = d(P,Oy)$, demonstrați că punctul A aparține bisectoarei unghiului xOy.

7 Triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle ABC = 90°$ și dreptunghiul $BCDE$ sunt situate în plane diferite, iar $AC \perp CD$.
Demonstrați că $AB \perp (BCD)$.

8 Punctele S, A, B, C sunt necoplanare, iar triunghiul ABC este echilateral, cu latura de 18 cm.
Se știe că $SB = SC = 15$ cm, $SA = 12$ cm, iar M este mijlocul segmentului BC.

a) Aflați lungimea segmentului SM.

b) Calculați distanța de la punctul S la planul (ABC).

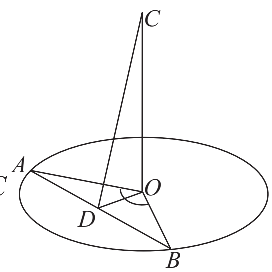
c) Demonstrați că înălțimea piramidei și înălțimea din A a triunghiului ABC sunt concurente.

9 Semidreptele OA, OB, OC sunt perpendiculare două câte două, $OA = OB = OC$, iar M este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

a) Demonstrați că $OM \perp (ABC)$.

b) Pentru $OA = 4$ cm, calculați distanța de la punctul O la planul (ABC).

10 În desenul de mai jos, punctele A, B aparțin cercului $\mathscr{C}(O, R)$, astfel încât $\overset{\frown}{AB} = 120°$ și $AB = 10\sqrt{3}$ cm. Punctul C este exterior planului cercului, triunghiul ABC este echilateral, iar $CO = 10\sqrt{2}$ cm.



a) Calculați raza cercului.

b) Determinați natura triunghiului COD, punctul D fiind mijlocul segmentului AB.

c) Demonstrați că CO este perpendiculară pe planul (AOB).

d) Dacă M este proiecția punctului O pe dreapta CD, demonstrați că $OM \perp (ABC)$.

11 Dreapta PA este perpendiculară pe planul triunghiului ABC și $PB = 4$ cm, $PC = 4\sqrt{2}$ cm, $BC = 4$ cm.

a) Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic.

b) Pentru $PA = 2\sqrt{2}$ cm, calculați aria triunghiului ABC.

TEST DE AUTOEVALUARE

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I.

Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA_1B_1C_1$, $AB = 4$ cm, $AA_1 = 6$ cm și punctele M, N mijloacele muchiilor AB, respectiv A_1C_1.

Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții.

5p **1.** Planele (C_1AB) și (ABC) formează un unghi cu măsura de 45°.

5p **2.** Oricare ar fi punctul P, situat pe muchia CC_1, triunghiul PAB este isoscel.

5p **3.** Dreapta A_1M este paralelă cu planul (BCN).

5p **4.** $A_1M \cdot \sqrt{3} = BN \cdot \sqrt{2}$.

Subiectul al II-lea.

Fie triunghiul dreptunghic ABC în care $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$ cm, AD este înălțime, $AD = \sqrt{3}$ cm și punctul G centrul de greutate al triunghiului. Dreapta AP este perpendiculară pe planul triunghiului, $AP = 1$ cm.

Asociați fiecărei litere din coloana A, cifra corespunzătoare din coloana B, așa încât să obțineți propoziții adevărate.

Pentru fiecare asociere corectă se acordă **5 puncte**.

A	B
a) $d(P, BC)$	1) $\sqrt{3}$ cm
b) PG	2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm
c) $d(C, (PAD))$	3) 1 cm
d) $d(A, (PBC))$	4) 2 cm
	5) $\frac{5}{3}$ cm
	6) $2\sqrt{3}$ cm

Subiectul al III-lea. *La problemele următoare, se cer rezolvări complete.*

1. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$ are dimensiunile $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $BC = 6$ cm și $AE = 6\sqrt{3}$ cm.

5p **a)** Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

10p **b)** Calculați lungimea proiecției segmentului AH pe planul (BDH).

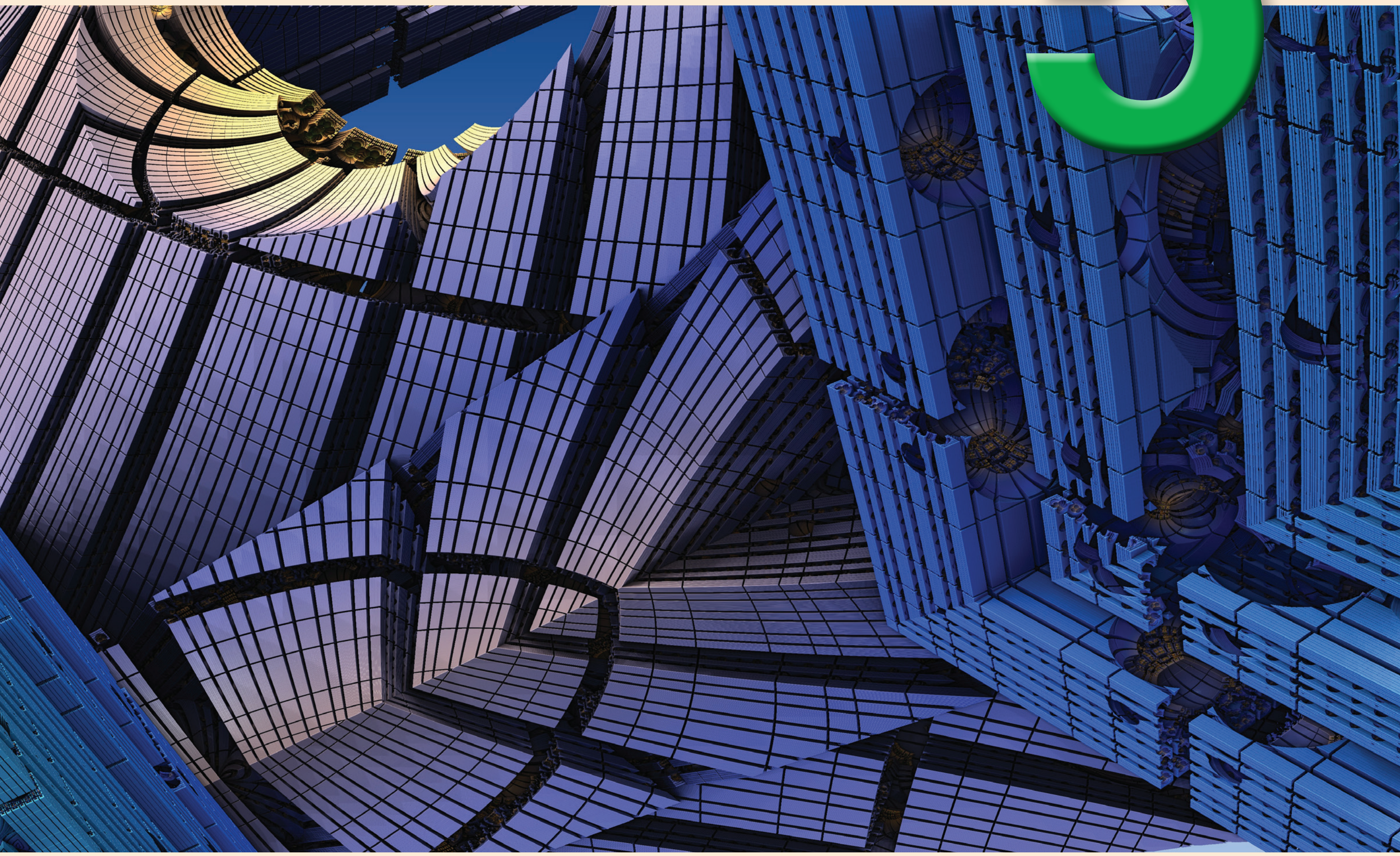
10p **c)** Determinați măsura unghiului format de dreapta BH cu planul (ACD).

2. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat, punctul M, mijlocul muchiei AC și punctul E, simetricul punctului C față de punctul D.

10p **a)** Demonstrați că $AE \parallel (BDM)$.

15p **b)** Calculați $\sin u \cdot \cos u + \operatorname{tg} u$, unde u este măsura unghiului dreptelor AD și BE.

CAPITOLUL 5



Arii și volume ale unor corpuri geometrice

1 Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate

2 Arii și volume ale unor poliedre

3 Arii și volume ale unor corpuri geometrice rotunde

Competențe specifice

1.5 2.5 3.5 4.5 5.5 6.5

1 Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate

L1. Calcularea unor distanțe pe fețele sau în interiorul corpurilor studiate

Teorema celor trei perpendiculare cu reciprocele ei completează instrumentele pe care le avem la dispoziție pentru a calcula unele distanțe pe fețele sau în interiorul unui poliedru: distanța de la un vârf la o muchie sau la o diagonală a bazei, distanța de la un vârf al bazei la o față laterală, distanța de la centrul bazei la o muchie sau o față laterală.

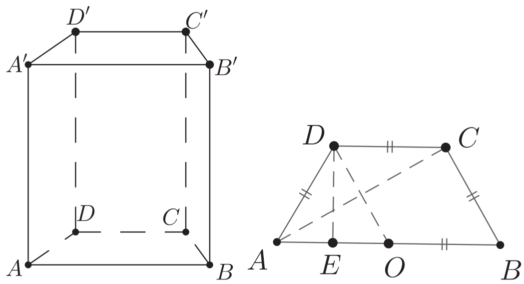
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

A. Calculul distanțelor pe fețele poliedrelor

Calculul distanțelor între două puncte, între un punct și o dreaptă, între două drepte situate în planele fețelor, reprezintă o problemă de geometrie plană.

Aplicația 1. $ABCDA'B'C'D'$ este prismă dreaptă cu baza trapez isoscel, $AB \parallel CD$, $AD = CD = a$ și $AB = 2\,CD$, iar $AA' = b$. Calculați distanța de la vârful A la CD, BC, $A'B'$ și $A'D'$.

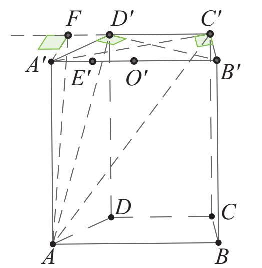
Soluție. În planul $(ABCD)$, fie O mijlocul bazei mari.
Atunci, $DC \equiv OB$, $DC \parallel OB$, deci $DCBO$ este paralelogram, de unde $DO = BC = a$. Triunghiul ADO este echilateral de latura a și $AO \parallel CD$. Atunci, $d(A, DC) = d(E, DC) = DE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
În triunghiul BAC, $\sphericalangle ABC = 60°$, $\sphericalangle BAC = 30°$, deci $\sphericalangle ACB = 90°$.
Atunci, $d(A, BC) = AC = a\sqrt{3}$. În prisma dreaptă, fețele laterale sunt dreptunghiuri, deci $AA' \perp A'B'$, iar $d(A, A'B') = AA' = b$.
Analog, $AA' \perp A'D'$), iar $d(A, A'D')) = AA' = b$.



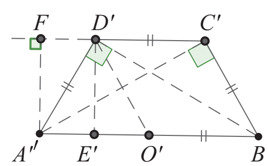
B. Calculul distanțelor în interiorul corpurilor studiate

Aflarea distanțelor dintre două puncte nesituate pe aceeași față a unui poliedru, sau distanța de la un punct la o dreaptă care nu este inclusă în planul unei fețe care conține punctul constituie un element specific geometriei în spațiu.

Aplicația 2. $ABCDA'B'C'D'$ este prismă dreaptă, cu baza trapez isoscel, $AB \parallel CD$, $AD = CD = a$ și $AB = 2\,CD$, iar $AA' = b$.
Calculați distanțele de la vârful A la:
a) muchiile $B'C'$ și $C'D'$ **b)** diagonalele bazei $A'B'C'D'$.
c) diagonalele feței laterale $BCC'B'$.

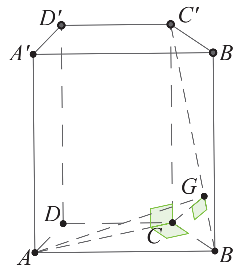


Soluție. **a)** Pentru construirea perpendicularei dintr-un punct pe o dreaptă situată într-un plan, folosim teorema celor trei perpendiculare. Prisma dreaptă are muchiile laterale perpendiculare pe planul bazei, deci $AA' \perp (A'B'C'D')$. Detașăm trapezul și folosim instrumentele geometrice, în planul $(A'B'C'D')$, pentru a construi perpendicularele $A'C'$, $A'D'$ și $A'F$ pe dreptele, $C'B'$, $D'B'$și. $D'C'$. Triunghiurile $A'C'B'$ și $A'D'B'$ și $A'FD'$ sunt dreptunghice, iar triunghiul $A'D'O'$ este echilateral, cu O' mijlocul lui $A'B'$. Din $A'F \perp D'C'$, rezultă $A'E'D'F$ este dreptunghi, unde E' este mijlocul segmentului $A'O'$.



Așadar, $A'F = D'E' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'D' = a$, iar $A'C' = a\sqrt{3}$.

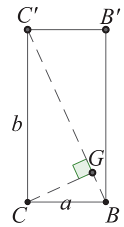
Avem: $AA' \perp (A'B'C'D')$, $C'B' \subset (A'B'C'D') \supset A'C'$, $A'C' \perp C'B'$.
Aplicând teorema celor trei perpendiculare, rezultă $AC' \perp C'B'$, deci $d(A, C'B') = AC' =$
$= \sqrt{3a^2 + b^2}$.



Analog: $AA' \perp (A'B'C'D')$, $D'C' \subset (A'B'C'D') \supset A'F$, $A'F \perp D'C'$. Aplicând teorema celor trei perpendiculare, rezultă că $AF \perp D'C'$, deci $d(A, D'C') = AF = \dfrac{\sqrt{3a^2 + 4b^2}}{2}$.

b) $AA' \perp (A'B'C'D')$, $A'D'$, $D'B' \subset (A'B'C'D')$ și $A'D' \perp D'B'$. Rezultă $AD' \perp D'B'$ și $d(A, D'B') = AD' = \sqrt{a^2 + b^2}$. Evident, $d(A, A'C') = AA' = b$.

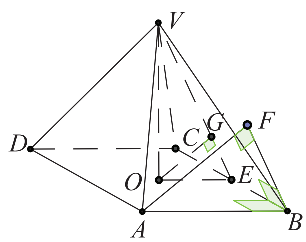
c) Diagonalele feței $BCC'B'$ sunt CB' și BC'.
Amintim că $AC \perp CB$ și $AC \perp CC'$ (deoarece $CC' \perp (ABCD)$ și $(ABCD) \supset AC$), așadar $AC \perp (BCC'B')$. Atunci, $d(A, CB') = d(A, (ABCD)) = AC = a\sqrt{3}$.



Punctul C este piciorul perpendicularei din A pe planul $(BCC'B')$. În planul feței $BCC'B'$, considerăm diagonala BC' a dreptunghiul $BCC'B$.
Din C, construim $CG \perp BC'$, $G \in BC'$. Aplicând teorema celor trei perpendiculare, rezultă $AG \perp C'B$ și $d(A, C'B) = AG$. În triunghiul dreptunghic BCC', CG este înălțime și $CG = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ și din triunghiul dreptunghic ACG, rezultă $AG = a \cdot \sqrt{\dfrac{3a^2 + 4b^2}{a^2 + b^2}}$.

Aplicația 3. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are latura bazei a și înălțimea h. Calculați distanțele de la centrul O al bazei la fețele laterale și distanța de la punctul A la planul (VBC).

Soluție. Piramida patrulateră regulată are baza pătrat, iar înălțimea din V intersectează planul bazei în centrul O al pătratului. Considerăm E mijlocul muchiei BC și avem $OE \perp BC$ (OE este apotema pătratului). Deoarece $VO \perp (ABCD)$, $BC \subset (ABCD)$, sunt îndeplinite ipotezele teoremei celor trei perpendiculare, deci are loc și concluzia $VE \perp BC$.



În planul (VBC), dreptele BC și VE sunt perpendiculare. Notăm cu G proiecția lui O pe VE. Atunci, $OE \perp BC$, $GE \perp BC$ și $OG \perp GE$. Aplicând reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare, rezultă $OG \perp (VBC)$, deci $d(O, (VBC)) = OG$.

În triunghiul dreptunghic VOE, calculăm $d(O, (VBC)) = OG = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2 + 4h^2}}$.

Prin B, construim dreapta $d \parallel VE$. Perpendiculara din A pe dreapta d, se intersectează cu aceasta în punctul F. Considerăm planul (VCB), care conține dreptele BF și BE cu $AB \perp BE$, $BE \perp BF$, iar $AF \perp FB$. Aplicăm reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare și rezultă $AF \perp (VCB)$, adică $d(A, (VBC)) = AF$.

Triunghiurile OGE și AFB sunt asemenea (au toate laturile respectiv paralele, deci toate unghiurile respectiv congruente), iar raportullor de asemănare este $\dfrac{1}{2}$. În concluzie, $d(A, (VBC)) = AF = 2OG = \dfrac{2ah}{\sqrt{a^2 + 4h^2}}$.

Observație. Din considerente de simetrie, distanțele de la O la celelalte fețe sunt aceleași cu distanța calculată.

MINITEST *Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.*

1. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are muchia de 2 cm. Atunci, distanța de la punctul A' la planul (BDD') este:			
A. 2 cm	B. $\sqrt{2}$ cm	C. $2\sqrt{2}$ cm	D. 4 cm
2. În prisma hexagonală regulată $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, $AB = AA' = 12$ cm. Atunci, $d(E, (ACC'))$ este:			
A. 18 cm	B. 16 cm	C. 24 cm	D. 12 cm
3. Punctul S este mijlocul muchiei laterale BE, a prismei triunghiulare regulate $ABCDEF$, $AB = 9$ cm, $AD = 18$cm. Calculând perimetrul triunghiului ASF se obține:			
A. $9(\sqrt{2}+\sqrt{5})$ cm	B. $9(2+\sqrt{5})$ cm	C. $9(2\sqrt{2}+\sqrt{5})$ cm	D. $9(\sqrt{2}+2\sqrt{5})$ cm
4. Piramida patrulateră regulată $SABCD$, cu baza $ABCD$ are toate muchiile egale cu 4 cm. Fie AE bisectoarea unghiului SAB, $E \in SB$. Lungimea segmentului DE este:			
A. $4\sqrt{5}$ cm	B. $3\sqrt{5}$ cm	C. $2\sqrt{5}$ cm	D. $\sqrt{5}$ cm

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Efectuați calculele necesare, copiați pe caiete și completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

a) Cubul $ABCDEFGH$ are muchia de 18 cm. Distanța de la punctul F la dreapta AH este … cm.

b) Diagonalele fețelor laterale ale prismei regulate $ABCMNP$ cu $AB = AM = 6$ cm au lungimea de … cm.

c) Distanța de la centrul bazei unui tetraedru regulat cu muchia de 8 cm la o muchie laterală este … cm.

d) Piramida patrulateră regulată $SABCD$ are latura bazei $AB = 16$ cm și înălțimea $SO = 8\sqrt{2}$ cm, iar E este proiecția punctului O pe muchia SA. Lungimea segmentului AE este … cm.

2 $ABCDEFGH$ este o prismă dreaptă cu baza pătratul $ABCD$, $AB = 4$ cm, $AE = 8$ cm, $AC \cap BD = \{O\}$. Calculați:

a) distanța de la punctul H la dreapta AC;

b) distanța de la punctul F la dreapta OG;

c) distanța de la punctul G la planul (EBD).

3 Punctul M este mijlocul muchiei laterale AE a paralelipipedului dreptunghic $ABCDEFGH$, $AB = 1$ cm, $FG = 3$ cm și triunghiul MCG este dreptunghic isoscel. Aflați înălțimea paralelipipedului.

4 Fie $SABC$ un tetraedru regulat de muchie a și punctele D, E, F mijloacele muchiilor AB, BC, respectiv SC.

a) Aflați $d(C, (AES))$ și $d(E, (CDS))$.

b) Arătați că $DF \perp SC$.

5 Un cilindru circular drept are una dintre baze cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Punctele A, B, E, F sunt situate pe cerc astfel încât $AB = 2 \cdot r = 8\sqrt{2}$ cm, iar EF este o coardă perpendiculară pe diametrul AB și subîntinde un arc cu măsura de 90°. Segmentul BC este generatoare a cilindrului și distanța de la punctul C la dreapta EF este $4\sqrt{6}$ cm. Aflați generatoarea cilindrului.

6 Un con circular drept are vârful V, iar bază este cercul de centru O și diametru AB. Distanța de la centrul bazei la generatoarea VB este de 2 cm și reprezintă jumătate din lungimea generatoarei. Aflați raza și înălțimea conului.

7 Se consideră cubul $ABCDMNPQ$ cu latura de 1 dm și punctele R mijlocul muchiei AM, S mijlocul muchiei CP, apoi $\{L\} = AC \cap BD$, $\{O\} = AP \cap CM$, $\{K\} = MP \cap NQ$.

a) Calculați perimetrul triunghiului RKO.

b) Stabiliți natura patrulaterului $LRKS$.

c) Determinați distanța de la punctul R la planul (BDP).

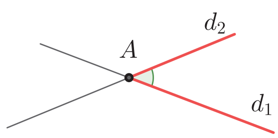
L2. Calcularea unor măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor studiate

Ne amintim!

A. Unghiul a două drepte

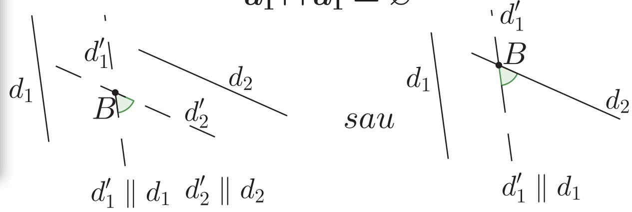
1. Pentru dreptele d_1 și d_2 cu $d_1 \cap d_2 = \{A\}$, unghiul format de ele și notat $\sphericalangle(d_1, d_2)$ este unghiul ascuțit sau drept determinat de două semidrepte cu originea A, generate de dreptele d_1 și d_2.

$d_1 \cap d_1 = \{A\}$



2. Pentru dreptele d_1 și d_2 cu $d_1 \cap d_2 = \emptyset$, unghiul format de ele este unghiul format de două drepte paralele cu acestea, care trec printr-un punct comun. Considerând punctul pe una din drepte, construim doar paralela la cealaltă dreaptă prin acest punct, obținând astfel unghiul format de ele.

$d_1 \cap d_1 = \emptyset$



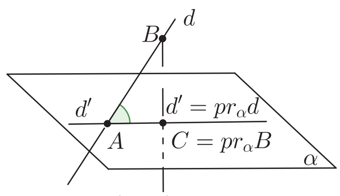
B. Unghiul unei drepte cu un plan

1. Dacă $d \cap \alpha = \{A\}$, $d \not\perp \alpha$, atunci unghiul dreptei d cu planul α, notat $\sphericalangle(d_1, \alpha)$, este unghiul format de dreapta d cu proiecția ei pe plan.

2. Dacă $d \perp \alpha$, atunci unghiul dreptei d cu planul α este un unghi drept.

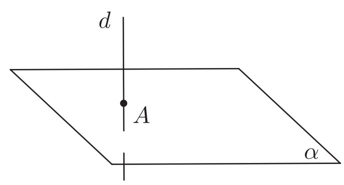
3. Dacă $d \parallel \alpha$, atunci unghiul dreptei d cu planul α este, prin convenție, unghi nul.

$d \cap \alpha = \{A\}$



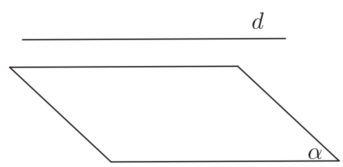
$\sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle BAC$

$d \perp \alpha$



$\sphericalangle(d, \alpha) = 90^0$

$d \parallel \alpha$

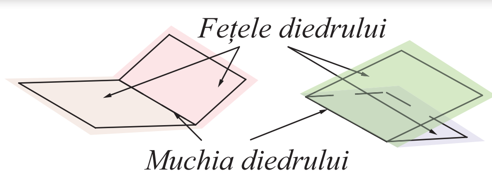


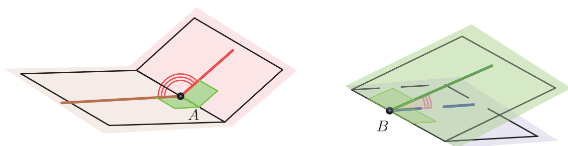
$\sphericalangle(d, \alpha) = 0^0$

C. Unghiul a două plane

Unghi diedru sau *diedru* este reuniunea a două semiplane limitate de o dreaptă comună numită *muchia diedrului*.

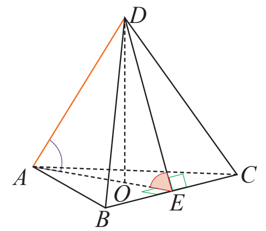
Unghi plan corespunzător diedrului este unghiul determinat de două semidrepte concurente și perpendiculare pe muchia diedrului, fiecare inclusă în câte unul din semiplanele diedrului.



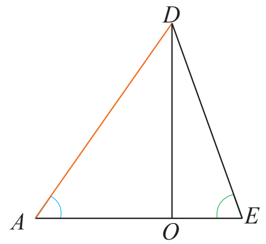


1. Dacă planele α și β sunt secante, $\alpha \cap \beta = d$, atunci unghiul planelor α și β, notat $\sphericalangle(\alpha, \beta)$, este unghiul plan, ascuțit sau drept, corespunzător diedrului format de două dintre semiplanele generate de dreapta d pe fiecare plan.
2. Dacă planele α și β sunt perpendiculare, atunci unghiul dintre ele este drept.
3. Dacă planele α și β sunt paralele, atunci unghiul dintre ele este, prin convenție, unghi nul.

Aplicația 1. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat cu muchia de lungime a.
1) Calculați valoarea sinusului unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei.
2) Calculați valoarea sinusului unghiului format de două fețe.



Soluție. În tetraedrul regulat (toate fețele sunt triunghiuri echilaterale) știm că înălțimea dintr-un vîrf conține centrul cercului circumscris feței opuse și acesta este și centru de greutate.
Fie $O = pr_{(ABC)}D$. Atunci, $pr_{(ABC)}AD = AO$, deci unghiul dintre muchia DA și planul (ABC) este $\sphericalangle DAO = \sphericalangle DAE$.
Din $DO \perp (ABC)$, $OE \perp BC$ (construcție), OE, $BC \subset (ABC)$, rezultă, aplicând teorema celor trei perpendiculare, $DE \perp BC$, adică unghiul plan al diedrului format de fețele BCD și BCA este $\sphericalangle DEA$. Cerințele problemei implică unghiuri din triunghiul ADE *și* vom considera vizualizarea „2D” a acestui triunghi.

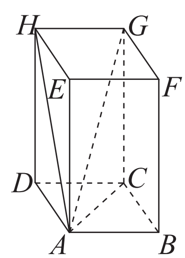


AE și DE sunt înălțimi în triunghiuri echilaterale, deci $AE = DE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

$EO = \dfrac{1}{3}AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ și aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul DOE, obținem

$DO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Atunci, în triunghiul ADO, $\sin \sphericalangle DAE = \dfrac{DO}{AD} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$, iar în triunghiul DOE, $\sin \sphericalangle DEO = \dfrac{DO}{DE} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Aplicația 2. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$ are dimensiunile $AB = 3\sqrt{3}$ cm, $AD = 9$ cm și $AE = 12$ cm. Calculați:
a) măsura unghiului format de dreapta AC cu planul (BCF);
b) sinusul unghiului planelor (ABC) și (AGH).



Soluție: **a)** $ABCDEFGH$ este paralelipiped dreptunghic, rezultă $AB \perp (BCF)$, deci $B = pr_{(BCF)}A$. Deoarece $C \in (BCF)$, deducem că $pr_{(BCF)}AC = BC$, iar $\sphericalangle(AC, (BCF)) = \sphericalangle(AC, BC) = \sphericalangle(ACB)$.
În triunghiul ABC, $\sphericalangle B = 90°$ și $\operatorname{tg}\sphericalangle ACB = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, de unde $\sphericalangle(AC, (BCF)) = 30°$.
b) Din $GH \parallel AB$, rezultă $AB \subset (AGH)$ și $(ABC) \cap (AGH) = AB$. Avem $AD \perp AB$, $AD \subset (ABC)$, $AH \perp AB$, $AH \subset (AGH)$.
Unghiul planelor (ABC) și (ABH) este unghiul dreptelor AD și AH, adică $\sphericalangle DAH$. În triunghiul ADH, $\sphericalangle ADH = 90°$, $AD = 9$ cm, $HD = CG = 12$ cm și aplicând teorema lui Pitagora, se obține $AH = 15$ cm, apoi $\sin(\sphericalangle DAH) = \dfrac{HD}{AH} = \dfrac{4}{5}$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 În paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFHG$, $AB = AE = 6$ cm și $BC = 8$ cm. Calculați:
a) Distanța de la centrul feței $BCGF$ la diagonala AG.
b) Tangenta unghiului format de dreptele AB și AG.

2 În piramida regulată $SABC$ fețele laterale sunt triunghiuri dreptunghice, iar Q este mijlocul muchiei AB. Determinați măsura unghiului dintre dreptele SC și SQ.

3 Pătratul $ABCD$ de latură 24 cm este baza prismei drepte $ABCDMNPQ$, iar măsura unghiului dreptei BQ cu planul (ABM) este egală cu u. Arătați că $u < 45^\circ$.

4 Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$ în care $AB = 2\sqrt{5}$ cm, $BC = \sqrt{5}$ cm, $AE = 5$ cm, $AC \cap BD = \{O\}$ și M este mijlocul muchiei AB.
a) Arătați că $OM \parallel (ADH)$.
b) Aflați măsura unghiului $\sphericalangle(DF, (ABC))$.
c) Calculați $\sin\sphericalangle((CMF), OM)$.

5 *Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.*
Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, $AA' = 24$ cm, punctele M și N sunt mijloacele muchiilor AA', respectiv DD'.
a) Tangenta unghiului $\sphericalangle(MN, BC')$ este:
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
b) Sinusul unghiului format de diagonala BD' și planul (ABC) este:
A. $\frac{12}{13}$ B. $\frac{4}{13}$ C. $\frac{5}{13}$ D. $\frac{10}{13}$

6 Tetraedrul regulat $ABCD$ are muchiile de lungime $2a$, $a > 0$, iar E și F sunt mijloacele segmentelor BC, respectiv CD. Calculați:
a) cosinusul unghiului format de o față laterală cu planul bazei;
b) sinusul unghiului $\sphericalangle EAF$.

7 Piramida patrulateră regulată $SABCD$ are toate muchiile de lungime b, $b > 0$. Aflați:
a) $\sin\sphericalangle((SAD), (ABC))$;
b) $\sin\sphericalangle((SAB), (SBC))$;
c) $\sin\sphericalangle((SAD), (SBC))$;
d) $\operatorname{tg}\sphericalangle((SAC), (SCD))$.

8 Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are înălțimea de 3 cm, perimetrul bazei mari de $36\sqrt{3}$ cm, iar unghiul dintre o față laterală și planul bazei mari are măsura de 45°. Calculați tangenta unghiului dintre o muchie laterală și planul bazei mari.

9 Muchiile laterale ale unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată formează cu planul bazei mari unghiuri de 45°. Razele cercurilor circumscrise bazelor trunchiului au lungimile de $6\sqrt{3}$ cm și $3\sqrt{3}$ cm. Aflați înălțimea trunchiului de piramidă și înălțimea piramidei din care provine trunchiul.

10 Un con circular drept are baza discul de centru O și raza de 3 cm. Distanța de la punctul O la o generatoare este de 2,4 cm. Calculați cosinusul unghiului format de generatoare cu înălțimea conului.

11 Secțiunea axială a unui con circular drept este o suprafață triunghiulară cu aria $\sqrt{3}$ cm². Se știe că diametrul bazei are lungimea $2\sqrt{3}$ cm. Aflați măsura unghiului format de generatoarea conului cu baza acestuia.

12 Secțiunea axială a unui cilindru circular drept are diagonalele perpendiculare. Determinați măsura unghiului format de una dintre diagonalele secțiunii axiale cu planul bazei cilindrului.

13 Se consideră cilindrul circular drept cu bazele $\mathcal{C}(O, AO)$, $\mathcal{C}(Q, QB)$, $OA = 8$ cm. Dreapta MN este perpendiculară pe raza OA și conține mijlocul ei, $M, N \in \mathcal{C}(O, AO)$. Știind că distanța dintre bazele cilindrului este de 4 cm, aflați măsura unghiului dintre planul (QMN) și planul bazei $(\mathcal{C}(O, AO))$.

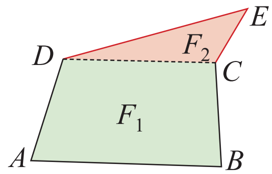
2 Arii și volume ale unor poliedre

L1. Aria și volumul prismei drepte

Ne amintim!

Unitatea standard de măsură pentru arii este metrul pătrat, adică suprafața unui pătrat cu latura de 1 m.
Pentru exprimarea unei arii, folosim și multiplii și submultiplii metrului pătrat.
În general, suprafața pătratică cu latura de 1 *unitate* are aria 1 *unitate*^{2}.
10^{-6} km^2 = 10^{-4} hm^2 = 10^{-2} dam^2 = 1 m^2 = 10^2 dm^2 = 10^4 cm^2 = 10^6 mm^2
Aria poligoanelor regulate cu latura de lungime a și aria cercului:

Triunghi echilateral de latură a	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	Hexagon regulat de latură a	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
Pătrat de latură a	a^2	Cerc de rază R	πR^2



Dacă o suprafață F poate fi descompusă într-o reuniune de două suprafețe disjuncte, F_1 și F_2, atunci aria suprafeței F este suma ariilor suprafețelor F_1 și F_2.
Dacă $F = F_1 \cup F_2$ și $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, atunci $A(F) = A(F_1) + A(F_2)$.

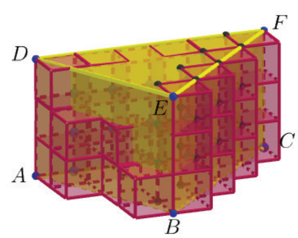
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

A. Considerente generale

Toate fețele poliedrelor sunt suprafețe poligonale.
Desfășurarea în plan a unui poliedru este o suprafață formată din reuniunea mai multor suprafețe poligonale disjuncte, reprezentând fețele poliedrului (fețele laterale și bazele).

Definiția 1. Suma ariilor fețelor laterale ale unui poliedru se numește *arie laterală* și se notează cu $\mathcal{A}_l$.
Definiția 2. Suma ariilor tuturor fețelor unui poliedru se numește *arie totală* și se notează cu $\mathcal{A}_t$.

Observație. Aria totală a unui poliedru este suma dintre aria laterală și aria bazei, respectiv bazelor poliedrului.
O definiție riguroasă a noțiunii de volum aparține unui ramuri a matematicii numită *teoria măsurii* și depășește cadrul acestui manual.
Unitatea standard de măsură pentru volum este metrul cub, adică spațiul ocupat de un cub cu muchia de 1 m.
Pentru exprimarea unui volum, folosim, de asemenea, multiplii și submultiplii metrului cub.
10^{-9} km^3 = 10^{-6} hm^3 = 10^{-3} dam^3 = 1 m^3 = 10^3 dm^3 = 10^6 cm^3 = 10^9 mm^3
În general, cubul cu muchia de 1 *unitate* are volumul 1 *unitate*^{3}.
Pentru aflarea volumului unui corp, folosim aproximări prin numărul minim de cuburi care să acopere corpul. Vom spune că volumul corpului este aproximativ n unități^3 dacă el poate fi acoperit de o construcție compactă formată dintr-o rețea de n cuburi cu latura de 1 unitate. Aproximarea este cu atât mai bună cu cât unitatea de măsură folosită este mai mică.

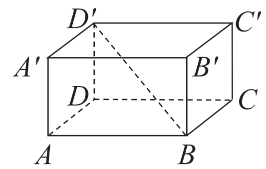
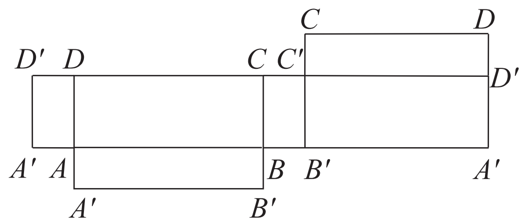


Observație: Dacă un corp geometric C poate fi descompus în reuniune de două corpuri geometrice disjuncte, C_1 și C_2, atunci volumul corpului C este suma volumelor corpurilor C_1 și C_2.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

B. Aria și volumul paralelipipedului dreptunghic

Considerăm paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu dimensiunile $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$ și ne propunem să identificăm tehnici de calcul pentru aria laterală, aria totală și volumul acestuia.

Caracteristici	Reprezentare, exemple de desfășurare
Toate fețele sunt dreptunghiuri. Muchiile laterale sunt perpendiculare pe planele bazelor și sunt congruente. Orice două fețe alăturate sunt situate în plane perpendiculare.	
Segmentele BD', $B'D$, AC', $A'C$ sunt diagonale ale paralelipipedului. Orice două fețe opuse sunt situate în plane paralele. Orice două fețe opuse sunt congruente. Orice două fețe opuse pot fi considerate baze.	

Desfășurarea paralelipipedului dreptunghic este reuniunea dintre o suprafață dreptunghiulară cu dimensiunile $\mathcal{P}_b$ (am notat cu $\mathcal{P}_b$ perimetrul unei baze a prismei), respectiv h (am notat cu h înălțimea prismei), și alte două suprafețe dreptunghiulare congruente (bazele prismei).

Dacă dimensiunile paralelipipedului sunt a, b, c, atunci între acestea și lungimea diagonalei paralelipipedului are loc relația: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

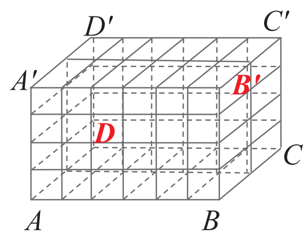
Observație. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt numite uneori: lungime, lățime și înălțime.

Concluzii.

1. Conform definiției, $\mathcal{A}_l = \mathcal{A}_{ABB'A'} + \mathcal{A}_{BCC'B'} + \mathcal{A}_{CDD'A'} + \mathcal{A}_{ADD'A'}$, deci $\mathcal{A}_l = 2ac + 2bc = (2a + 2b)c$, sau $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h$, unde $\mathcal{P}_b$ este perimetrul bazei, iar h este înălțimea paralelipipedului.

2. Aria totală a paralelipipedului este $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b$ sau $\mathcal{A}_t = 2ab + 2ac + 2bc$.

3. Pentru a găsi formula de calcul pentru volumul unui paralelipiped dreptunghic, vom considera pentru început cazul în care dimensiunile acestuia sunt exprimate prin numerele naturale a, b, c, ca în exemplul următor:



Exemplu. Paralelipipedul dreptunghic din desenul alăturat are dimensiunile: $AB = 6$ cm, $BC = 2$ cm și $AA' = 4$ cm. Acesta se poate descompune în $6 \cdot 2 \cdot 4 = 48$ de cuburi cu muchia de 1 cm. Vom spune că volumul paralelipipedului este 48 cm^3 și vom scrie $\mathcal{V} = 48$ cm^3.

Rezultă imediat că, dacă a, b, c sunt numere naturale și exprimă dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic, atunci volumul acestuia este $\mathcal{V} = a \cdot b \cdot c$.

Considerând baza $ABCD$ cu $AB = a$ și $BC = b$, iar înălțimea paralelipipedului $h = c$, atunci $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h$.

Se demonstrează că rezultatul rămâne adevărat pentru orice valori reale pozitive ale dimensiunilor paralelipipedului dreptunghic.

C. Aria laterală, aria totală și volumul prismei patrulatere regulate

Prisma patrulateră regulată este cazul particular al paralelipipedului dreptunghic în care baza este pătrat, deci $a = b$. Atunci, toate fețele laterale sunt dreptunghiuri congruente și

$\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h$ sau $\mathcal{A}_l = 4ac$, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b$ sau $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2a^2$, iar

$\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h$ sau $\mathcal{V} = a^2 \cdot c$.

Aria și volumul cubului

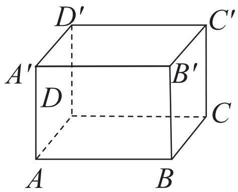
Considerăm cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia $AB = a$.

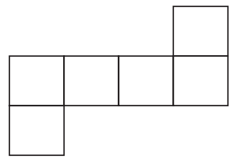
Caracteristici

Cubul este cazul particular al paralelipipedului dreptunghic în care $a = b = c$.
Toate fețele sunt pătrate.
Lungimea diagonalei cubului de muchie a este

$d = a\sqrt{3}$

Reprezentare, exemplu de desfășurare





Concluzie. Formulele de calcul se deduc din cele ale paralelipipedului dreptunghic pentru $a = b = c$.
Pentru cubul de muchie a, $\mathcal{A}_l = 4a^2$, $\mathcal{A}_t = 6a^2$, $\mathcal{V} = a^3$.

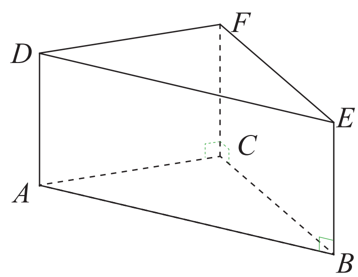
D. Aria laterală, aria totală și volumul prismei triunghiulare drepte

Considerăm prisma triunghiulară dreaptă $ABCDEF$ cu muchia $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ și $AD = h$.

Caracteristici

Bazele sunt triunghiuri congruente.
Toate fețele laterale sunt dreptunghiuri și sunt situate în plane perpendiculare pe planul bazei.
Muchiile laterale sunt perpendiculare pe planele bazelor și sunt congruente.
Prisma *triunghiulară regulată* are bazele triunghiuri echilaterale.
Desfășurarea prismei triunghiulare drepte este reuniunea dintre o suprafață dreptunghiulară cu dimensiunile $\mathcal{P}_b$ (am notat cu – $\mathcal{P}_b$ perimetrul unei baze a prismei), respectiv h (am notat cu h înălțimea prismei) și două suprafețe triunghiulare congruente (bazele prismei).

Reprezentare, exemplu de desfășurare

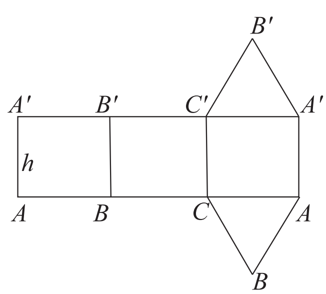


Concluzii.

1. $\mathcal{A}_l = \mathcal{A}_{ABED} + \mathcal{A}_{BCFE} + \mathcal{A}_{CADF} = AD \cdot AB + BE \cdot BC + CF \cdot AC = AD \cdot (AB + BC + CA)$, deci $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h$, unde cu $\mathcal{P}_b$ am notat perimetrul bazei prismei, iar h este înălțimea prismei (egală cu muchia laterală).

2. $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{ABED} + \mathcal{A}_{BCFE} + \mathcal{A}_{CADF} + \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{DEF}$, sau $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b$, unde cu A_b am notat aria unei baze.

3. Dacă două prisme au baze echivalente (cu aceeași arie) și înălțimi egale, atunci volumele lor sunt egale. Prin urmare:



O prismă dreaptă cu baza de arie $\mathcal{A}_b$ și înălțimea h, are volumul egal cu volumul paralelipipedului dreptunghic pentru care aria bazei este $\mathcal{A}_b$ și înălțimea h.

În concluzie, $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h$.

Pentru prisma *triunghiulară regulată*, $AB = BC = AC = a$ și înălțimea h, $\mathcal{A}_l = 3ah$, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b$ cu mențiunea că $\mathcal{A}_b = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, iar $\mathcal{V} = \dfrac{a^2h\sqrt{3}}{4}$.

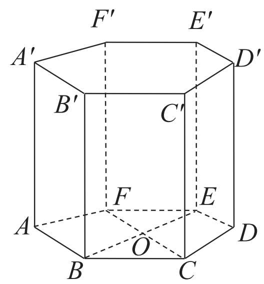
E. Aria laterală, aria totală și volumul prismei hexagonale regulate

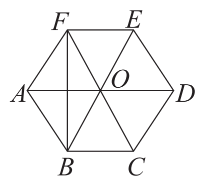
Considerăm prisma hexagonală regulată $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ cu $AB = a$ și $AA = h$

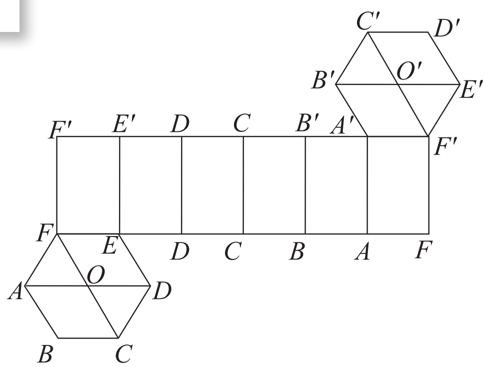
Caracteristici

Fețele laterale sunt dreptunghiuri congruente, iar bazele sunt hexagoane regulate congruente.
Muchiile laterale sunt perpendiculare pe planele bazelor și sunt congruente.
Desfășurarea prismei hexagonale regulate este reuniunea dintre o suprafață dreptunghiulară cu dimensiunile $\mathcal{P}_b$ (am notat cu $\mathcal{P}_b$ perimetrul unei baze a prismei), respectiv h (am notat cu h înălțimea prismei) și două suprafețe hexagonale regulate congruente (bazele prismei).
Prisma hexagonală regulată se „descompune” în 6 prisme triunghiulare regulate cu aceleași dimensiuni.

Reprezentare, exemplu de desfășurare







Concluzii.

1. $\mathcal{A}_b = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

2. $\mathcal{A}_l = \mathcal{A}_{ABB'A'} + \mathcal{A}_{BCC'B'} + \mathcal{A}_{CDD'C'} + \mathcal{A}_{DEE'D'} + \mathcal{A}_{EFF'E'} + \mathcal{A}_{FAA'F'} = 6 \cdot a \cdot h$, deci $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h$, unde cu $\mathcal{P}_b$ am notat perimetrul bazei prismei, iar h este înălțimea prismei (egală cu muchia laterală).

3. $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b$ sau $\mathcal{A}_t = 6 \cdot a \cdot h + 3a^2\sqrt{3}$.

4. $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h$ sau $\mathcal{V} = \dfrac{3a^2h\sqrt{3}}{2}$.

Observație. Prisma hexagonală regulată este reuniunea a 6 prisme triunghiulare regulate cu muchia bazei a, prin urmare, volumul este $\mathcal{V} = 6 \cdot \dfrac{a^2h\sqrt{3}}{4}$.

Observație. Formulele pe care le-am dedus pentru toate prismele particulare, *nu trebuie memorate*. Acestea se deduc din datele concrete ale problemei, având în vedere următoarele:
1. Aria laterală a prismei drepte este suma ariilor fețelor laterale. $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h$
2. Aria totală a prismei drepte este suma dintre aria laterală și ariile celor două baze. $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b$.
3. Volumul prismei drepte este produsul dintre aria bazei și înălțimea prismei. $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h$.

MINITEST Se consideră prisma patrulateră regulată. Se notează a lungimea muchiei bazei, b lungimea muchiei laterale, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ aria bazei, aria laterală respectiv aria totală a prismei și $\mathcal{V}$, volumul prismei. *Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.*

a) Dacă $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, atunci $\mathcal{A}_l$ este:			
A. 48 cm^2	**B.** 84 cm^2	**C.** 64 cm^2	**D.** 72 cm^2
b) Dacă $\mathcal{A}_b = 36$ cm^2 și $b = 4{,}5$ cm, atunci $\mathcal{V}$ este:			
A. 96 cm^3	**B.** 126 cm^3	**C.** 162 cm^3	**D.** 196 cm^3
c) Dacă $\mathcal{A}_t = 312$ cm^2 , $\mathcal{A}_l = 240$ cm^2, atunci $\mathcal{V}$ este egal cu:			
A. 420 cm^3	**B.** 360 cm^3	**C.** 320 cm^3	**D.** 480 cm^3

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipipedul dreptunghic. Notăm $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$, lungimea diagonalei d, aria laterală și aria totală a paralelipipedului cu $\mathcal{A}_l$, respectiv $\mathcal{A}_t$, iar volumul paralelipipedului cu $\mathcal{V}$. Efectuați calculele necesare și completați spațiile libere.

	a	b	c	d	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
1.1	3 cm	4 cm	12 cm				
1.2		12 cm	16 cm	25 cm			

2 Laturile bazei unui paralelipiped dreptunghic au lungimile 10 cm și 24 cm, iar diagonala paralelipipedului face cu planul bazei un unghi de 60°. Calculați înălțimea paralelipipedului.

3 Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$.

a) Dacă $BC = 16$ cm, $AA' = 8$ cm, $V = 768$ cm^3, calculați $d(D', BC)$.

b) Dacă $AA' = 32$cm, $AB = 12$ cm, $d(B', CD) = 40$ cm, aflați aria bazei paralelipipedului.

4 În paralelipipedul dreptunghic $ABCDMNPQ$ se cunosc $AB = 12$ cm, $BC = 6$ cm, $AM = 9$ cm. Determinați poziția unui punct S pe muchia CP astfel încât perimetrul triunghiului BSQ să fie minim.

5 În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ notăm $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$ și cu u, v, w unghiurile formate de diagonala AC' cu fețele (ABC), (ABB'), respectiv (ADD'). Calculați $\sin^2 u + \sin^2 v + \sin^2 w$.

6 **a)** Un cub are muchia de 2 cm. Calculați aria laterală, aria totală și volumul cubului.

b) Se consideră un alt cub cu muchia de trei ori mai mare. Aflați de câte ori este mai mare aria laterală, aria totală și volumul acestui cub față de aria laterală, aria totală, respectiv volumul primului cub.

7 Aria secțiunii diagonale a unui cub este $64\sqrt{2}$ cm^2. Aflați:

a) lungimea muchiei cubului;

b) volumul cubului.

8 O prismă regulată are în total 18 muchii, toate congruente, suma lungimilor lor fiind 216 cm.

a) Precizați numărul muchiilor bazei prismei.

b) Aflați aria totală și volumul prismei.

9 Din cubulețe cu muchia de 1 cm se realizează un cub cu volumul de 27 cm^3.

a) Aflați numărul cubulețelor necesare realizării cubului mare.

b) Se vopsesc fețele.

b$_1$) Aflați numărul cubulețelor care au trei fețe vopsite.

b$_2$) Aflați numărul cubulețelor care au vopsită o singură față.

b$_3$) Precizați numărul cubulețelor care nu au nicio față vopsită.

10 Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, are muchia bazei $AB = 10$ cm, iar $BC' \perp CB'$.

a) Calculați înălțimea prismei.

b) Aflați aria totală și volumul prismei.

11 Aria bazei prismei regulate $ABCDEF$ este $64\sqrt{3}$ cm^2, iar $\cos\sphericalangle(AE, BC) = 0{,}25$.

a) Arătați că muchia bazei are lungimea de 16 cm.

b) Determinați măsura unghiului format de AF cu planul bazei.

c) Calculați aria laterală a prismei.

12 Lungimea diagonalei unei prisme patrulatere regulate este de 9 dm și înălțimea sa este de 7 dm.

a) Calculați lungimea muchiei bazei și volumul prismei.

b) La un atelier, se confecționează, dintr-un material cu densitatea 2,5 g/cm^3, o piesă care are forma și dimensiunile prismei date. Determinați masa piesei și exprimați rezultatul în kilograme.

13 În prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, cu muchia bazei de 12 cm, punctul P este mijlocul muchiei CC' iar $\sphericalangle BPD = 60^\circ$.

a) Calculați înălțimea prismei.

b) Verificați dacă planele $(A'BD)$ și (PBD) sunt perpendiculare.

14 În prisma hexagonală regulată $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, $AB = 12$ cm, M este mijlocul muchiei DD', $AD \cap BF = \{N\}$ și $NM = 12\sqrt{3}$ cm.

a) Determinați măsura unghiului format de dreapta MN cu planul (ABC).

b) Calculați aria laterală a prismei.

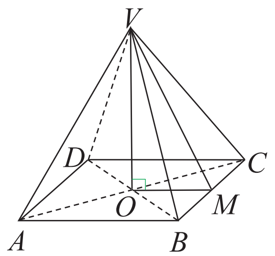
L2. Aria laterală, aria totală și volumul piramidei regulate și ale tetraedrului regulat

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Piramida regulată are următoarele caracteristici:

1. Baza este un poligon regulat, iar proiecția vârfului pe planul bazei este centrul cercului circumscris bazei.
2. Muchiile laterale sunt congruente.
3. Fețele laterale sunt triunghiuri isoscele congruente.
4. Pentru piramida regulată se definește un element specific, numit *apotema piramidei*.

Definiție. Dacă $VA_1A_2\ldots A_n$ este piramidă regulată cu baza $A_1A_2\ldots A_n$, atunci înălțimea VM a unei fețe laterale se numește *apotema piramidei*.
Apotema poligonului regulat $A_1A_2\ldots A_n$ se numește *apotema bazei*.
Lungimea *apotemei piramidei* se notează a_p, iar lungimea *apotemei bazei* se notează a_b.

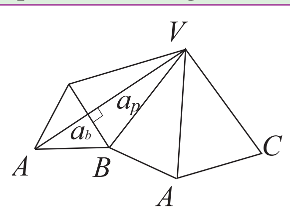


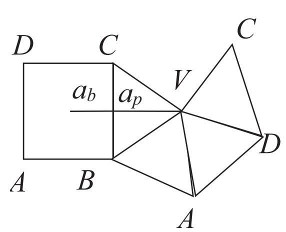
Exemplu. $VABCD$ este piramidă patrulateră regulată și M este mijlocul segmentului BC. Atunci, OM este apotema bazei și scriem $OM = a_b$, iar VM este apotema piramidei și scriem $VM = a_p$.
Observație. În piramida regulată înălțimile fețelor sunt egale, deci calculul apotemei nu depinde de alegerea feței laterale.
Apotema piramidei se poate construi cu ajutorul teoremei celor trei perpendiculare:
a) construim proiecția punctului V pe planul bazei și o notăm cu O.
b) Construim perpendiculara, din O, pe o muchie a bazei, fie aceasta BC, pe care o intersectează în M.
c) Aplicăm teorema celor trei perpendiculare și obținem $VM \perp BC$.

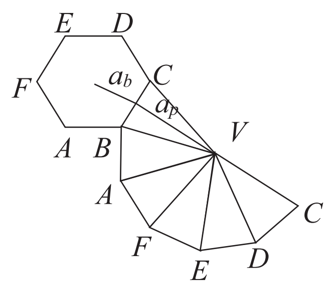
Observație. Apotema piramidei regulate este și mediană a triunghiului isoscel corespunzător feței laterale alese.
Triunghiul MOV este dreptunghic în O, iar laturile sale sunt: $VO = h$, $OM = a_b$, $VM = a_p$.
Teorema lui Pitagora ne oferă relația între înălțimea piramidei regulate, apotema piramidei și apotema bazei acesteia: $a_p^2 = a_b^2 + h^2$. Dacă m este lungimea muchiei laterale, atunci $m^2 = a_p^2 + \frac{L_n^2}{4}$.

5. Desfășurarea unei piramide regulate constă în alăturarea unui poligon regulat cu n laturi (baza piramidei) și a n triunghiuri isoscele (fețele laterale).

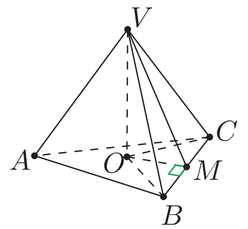
Pentru $n = 3$, piramida triunghiulară regulată	Pentru $n = 4$, piramida patrulateră regulată	Pentru $n = 6$, piramida hexagonală regulată







Un caz special îl constituie tetraedrul regulat (piramida triunghiulară cu toate fețele triunghiuri echilaterale).



Aria laterală a piramidei este suma ariilor fețelor laterale și se notează cu $\mathcal{A}_l$.
Alegem înălțimea unei fețe chiar perpendiculara din vârful piramidei pe muchia bazei.

Atunci, $\mathcal{A}_{BCV} = \dfrac{VM \cdot BC}{2}$, iar $\mathcal{A}_l = n\,\mathcal{A}_{BCV}$, unde n este numărul laturilor bazei.

Dacă latura poligonului bază este L_n, atunci aria laterală este $\mathcal{A}_l = n \cdot \dfrac{L_n \cdot a_p}{2}$ sau $\mathcal{A}_l = \dfrac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2}$, unde $\mathcal{P}_b$ este perimetrul bazei pirmidei.

Aria totală a piramidei este suma dintre aria laterală a piramidei și aria bazei acesteia și se notează A_t.

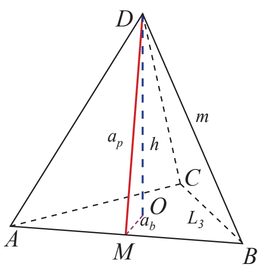
Dacă notăm aria bazei piramidei cu $\mathcal{A}_b$, atunci $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b$ sau $\mathcal{A}_t = \dfrac{\mathcal{P}_b \cdot (a_p + a_b)}{2}$.

Formulele generale de calcul, conduc la formule particulare, în funcție de numărul muchiilor bazei piramidei regulate.

Aria laterală a *tetraedrului regulat* cu muchia a este $\mathcal{A}_l = 3 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, iar aria totală este $\mathcal{A}_t = a^2\sqrt{3}$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Pentru $n = 3$, piramida triunghiulară regulată	Pentru $n = 4$, piramida patrulateră regulată	Pentru $n = 6$, piramida hexagonală regulată

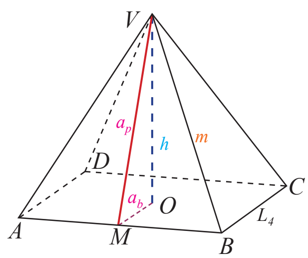


$a_b = \dfrac{L_3\sqrt{3}}{6}$, $a_p = \sqrt{h^2 + \dfrac{L_3^2}{12}}$,

$\mathcal{A}_l = \dfrac{P_b \cdot a_p}{2}$, $A_t = A_l + A$

$\mathcal{A}_l = \dfrac{3L_3 \cdot a_p}{2}$

$\mathcal{A}_t = \dfrac{3L_3 \cdot a_p}{2} + \dfrac{L_3^2\sqrt{3}}{6}$

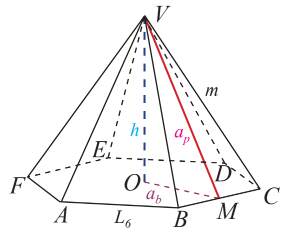


$a_b = \dfrac{L_4}{2}$, $a_p = \sqrt{h^2 + \dfrac{L_4^2}{4}}$,

$\mathcal{A}_l = \dfrac{P_b \cdot a_p}{2}$, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b$

$\mathcal{A}_l = \dfrac{4L_4 \cdot a_p}{2}$

$\mathcal{A}_t = 2L_4 \cdot a_p + L_4^2$



$a_b = \dfrac{L_6\sqrt{3}}{2}$, $a_p = \sqrt{h^2 + \dfrac{3L_6^2}{4}}$,

$\mathcal{A}_l = \dfrac{P_b \cdot a_p}{2}$, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b$

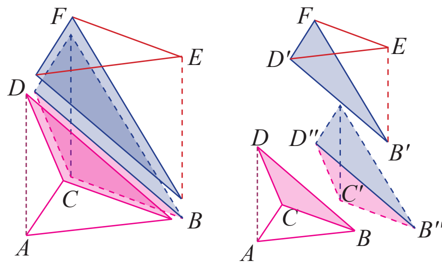
$\mathcal{A}_l = \dfrac{6L_6 \cdot a_p}{2}$

$\mathcal{A}_t = 3L_6 \cdot a_p + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot L_6^2$

Ca la prismă, se justifică intuitiv că două piramide care au baze congruente și înălțimi egale au și același volum (o demonstrație riguroasă depășind cadrul manualului).

Propoziție. Volumul unui tetraedru este egal cu o treime din volumul prismei drepte cu aceeași bază și aceeași înălțime cu cea a piramidei.

Demonstrație. Secționăm prisma $ABCDEF$ după planele (DCB) și (DFB) (figura alăturată). Rezultă trei tetraedre despre care vom arăta că au volumele egale. Pentru tetraedrele $ABCD$ și $D'EFB'$ considerăm bazele ABC și $D'EF$ și înălțimile AD, respectiv EB', egale cu înălțimea prismei. În consecință, cele două tetraedre au volumele egale. Pentru tetraedrele $D'EFB'$ și $D''F'C'B''$ alegem bazele EFB' și $F'C'B''$, triunghiuri dreptunghice congruente. Înălțimea ambelor tetraedre este distanța de la D la planul $BCFE$. Rezultă că și acestea au volumele egale. Am descompus prisma dreaptă în trei tetraedre de volume egale.



Concluzie. Volumul tetraedrului este $\mathcal{V} = \dfrac{A_b \cdot h}{3}$.

Tetraedrul regulat este un tetraedru cu baza și fețele laterale triunghiuri echilaterale, a cărui înălțime conține centrul cercului circumscris bazei. $\mathcal{V} = \dfrac{A_b \cdot h}{3}$ și , deci $\mathcal{A}_b = \dfrac{L_3^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $h = \dfrac{L_3 \cdot \sqrt{6}}{3}$, $\mathcal{V} = \dfrac{L_3^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$.

Observație. O piramidă care are ca bază un poligon cu n laturi se descompune în $n - 2$ piramide triunghiulare cu aceeași înălțime. Formula de calcul $\mathcal{V} = \dfrac{A_b \cdot h}{3}$, identificată pentru piramida triunghiulară, rămâne adevărată pentru orice piramidă.

Observație importantă. Formulele de mai sus nu trebuie memorate, deducerea lor pentru fiecare situație concretă face parte din demersul rezolvării problemei, având în vedere următoarele:

1. Aria laterală a piramidei este suma ariilor fețelor laterale. Dacă piramida este regulată, atunci $\mathcal{A}_l = \dfrac{P_b \cdot a_p}{2}$.
2. Aria totală a piramidei este suma dintre aria laterală și aria totală. $A_t = A_l + A_b$.
3. Volumul piramidei este o treime din produsul dintre aria bazei și înălțimea piramidei. $\mathcal{V} = \dfrac{A_b \cdot h}{3}$.

Minitest La cerințele următoare, alegeți varianta corectă; doar un răspuns este corect.

1. O piramidă patrulateră regulată are muchia laterală egală cu $9\sqrt{3}$ cm și latura bazei de 18 cm. Volumul piramidei este egal cu:			
A. 948 cm³	**B.** 927 cm³	**C.** 948 cm³	**D.** 972 cm³
2. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are latura bazei de 18 cm și înălțimea de $3\sqrt{6}$ cm. Apotema piramidei are lungimea egală cu:			
A. 9 cm	**B.** 6 cm	**C.** 12 cm	**D.** 8 cm
3. O piramidă patrulateră regulată are latura bazei egală cu $6\sqrt{3}$ cm și înălțimea de 9 cm. Măsura unghiului diedru format de o față laterală cu planul bazei este de:			
A. 30°	**B.** 45°	**C.** 60°	**D.** 75°
4. Latura bazei unei piramide hexagonale regulate are lungimea $8\sqrt{3}$ cm, iar apotema piramidei are lungimea de 20 cm. Distanța de la centrul bazei la o față laterală este:			
A. 8,4 cm	**B.** 9,6 cm	**C.** 7,2 cm	**D.** 10,8 cm

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

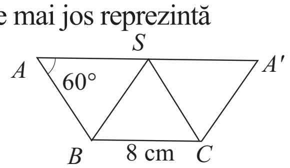
1 Se consideră o piramidă patrulateră regulată. Se notează l, m, a, h lungimile: muchiei bazei, muchiei laterale, apotemei bazei, respectiv a înălțimii piramidei, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ aria bazei, aria laterală respectiv aria totală a piramidei și $\mathcal{V}$, volumul piramidei. Copiați pe caiete tabelul următor, efectuați calculele necesare și completați spațiile libere.

	a)	b)	c)	d)
l	6 cm		10 cm	
m	6 cm			25 cm
a		20 cm		
h		12 cm		
$\mathcal{A}_b$				900 m²
$\mathcal{A}_l$				
$\mathcal{A}_t$				
$\mathcal{V}$			400 cm³	

2 Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are toate muchiile egale cu 18 cm. Calculați:
a) aria secțiunii diagonale;
b) măsura unghiului BVD.

3 Calculați aria totală a piramidei patrulatere regulate $SABCD$ știind că triunghiul SBD este dreptunghic și are aria 288 cm².

4 Trapezul din desenul de mai jos reprezintă desfășurarea în plan a suprafeței laterale a unei piramide triunghiulare regulate.



a) Demonstrați că muchia laterală a piramidei are aceeași lungime cu muchia bazei.
b) Calculați aria laterală și aria totală a piramidei.

5 În piramida regulată $ABCD$ cu vârful punctul A, muchiile bazei au lungimea de 12 cm, iar muchiile laterale au lungimea de 10 cm.
a) Calculați înălțimea și apotema piramidei.
b) Stabiliți poziția punctului P pe muchia AD a piramidei așa încât perimetrul triunghiului PBC să fie minim.

6 O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are muchia laterală de 12 cm și aria laterală $144\sqrt{3}$ cm².
a) Aflați măsura unghiului AVB știind că este un unghi ascuțit.
b) Calculați volumul piramidei.

7 O piramidă triunghiulară regulată are înălțimea de 18 cm și raza cercului circumscris bazei de 6 cm. Aflați:
a) lungimea muchiei bazei piramidei;
b) aria laterală a piramidei.

8 Se consideră tetraedrul $ABCD$ în care $AB \perp AC$, $AC \perp AD$ și $AD \perp AB$.
Demonstrați că $S_{ABC}^2 + S_{ACD}^2 + S_{ADB}^2 = S_{BCD}^2$.

9 Fie piramida hexagonală regulată $SABCDEF$ în care muchia laterală face un unghi de 60° cu planul bazei. Știind că $AB = 24$ mm, calculați:
a) înălțimea piramidei;
b) distanța de la punctul O, centrul bazei piramidei, la dreapta SA.

10 Secțiunea diagonală MAD a piramidei hexagonale regulate $MABCDEF$ este echivalentă cu baza piramidei, iar $AB = 4\sqrt{2}$ cm. Calculați:
a) înălțimea și volumul piramidei;
b) tangenta unghiului format de muchia laterală VA cu planul bazei (ABC).

11 Se consideră o piramidă triunghiulară regulată. Se notează l, m, a, h lungimile muchiei bazei, muchiei laterale, apotemei piramidei, respectiv a înălțimii piramidei, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ aria bazei, aria laterală, respectiv aria totală a piramidei și $\mathcal{V}$, volumul piramidei. Copiați pe caiete tabelul următor, efectuați calculele necesare și completați spațiile libere.

	a)	b)	c)	d)
l	12 cm	6 cm		
m			$6\sqrt{3}$ cm	24 dm
a			$6\sqrt{2}$ cm	
h	6 cm			
$\mathcal{A}_b$				
$\mathcal{A}_l$		27 cm²		
$\mathcal{A}_t$				
$\mathcal{V}$				576 dm³

12 Rezolvați aceleași cerințe ca la exercițiul **11** în situația în care toate elementele date sunt ale unei piramide hexagonale regulate.

L3. Aria și volumul trunchiului de piramidă regulată

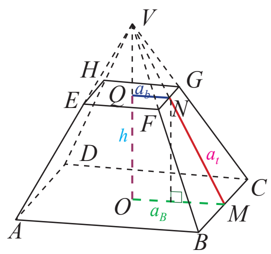
Trunchiul de piramidă regulată se obține prin îndepărtarea piramidei mici rezultate din secționarea unei piramide regulate cu un plan paralel cu baza.

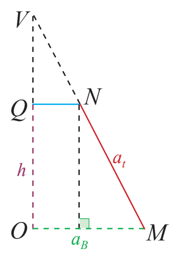
Definiția 1. Segmentul care unește mijloacele a două muchii ale bazelor, situate pe aceeași față laterală, se numește *apotema trunchiului* de piramidă regulată și se notează a_t.

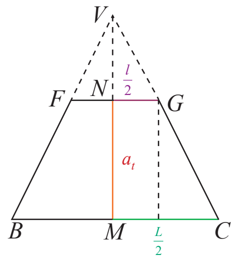
Fețele laterale sunt trapeze isoscele congruente, deci lungimea apotemei nu depinde de fața laterală aleasă.

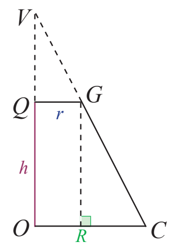
Relații între elementele trunchiului de piramidă

Notăm cu L și l, latura bazei mari, respectiv latura bazei mici, cu a_B și a_b apotema bazei mari, respectiv apotema bazei mici, cu a_t apotema trunchiului de piramidă și cu m muchia laterală, iar cu R și r notăm raza cercului circumscris bazei mari, respectiv bazei mici.









În trapezul dreptunghic $QNMO$,

$$a_t = \sqrt{h^2 + (a_B - a_b)^2}$$

În trapezul dreptunghic $NMCG$,

$$m = \sqrt{a_t^2 + \left(\frac{L-l}{2}\right)^2}$$

În trapezul dreptunghic $OCGQ$,

$$m = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$$

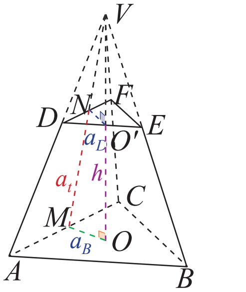
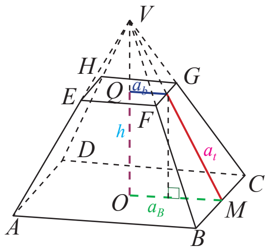
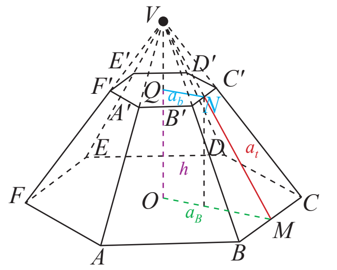
Fețele laterale ale unui trunchi de piramidă regulată sunt trapeze isoscele care au ca baze laturile corespunzătoare ale bazelor trunchiului, laturile neparalele fiind muchiile laterale ale trunchiului.
Bazele trunchiului de piramidă regulată sunt poligoane regulate. Piramida mică (îndepărtată) este asemenea cu piramida din care provine trunchiul, raportul de asemănare fiind egal cu raportul dintre muchia bazei mici și muchia bazei mari.

Definiția 2. Aria laterală a trunchiului de piramidă este suma ariilor fețelor laterale și se notează cu $\mathcal{A}_l$.
Definiția 3. Aria totală a trunchiului de piramidă este suma dintre aria laterală și ariile celor două baze ale trunchiului de piramidă și se notează cu $\mathcal{A}_t$.

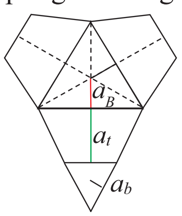
Prin urmare, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$, unde $\mathcal{A}_B$ și $\mathcal{A}_b$ reprezintă aria bazei mari, respectiv aria bazei mici.
Volumul trunchiului de piramidă este diferența dintre volumul piramidei din care provine trunchiul și volumul piramidei îndepărtate. Consultați manualul digital pentru a studia demonstrația rezultatului următor.

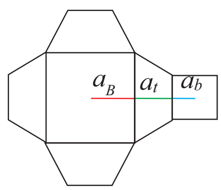
Propoziția 1. Volumul trunchiului de piramidă cu aria bazei mari egală cu $\mathcal{A}_B$, aria bazei mici egală cu $\mathcal{A}_b$ și cu înălțimea h este $\mathcal{V} = \frac{h}{3}\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b}\right)$.

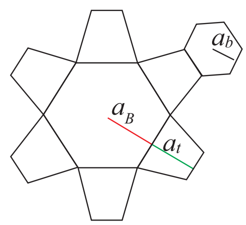
Notăm latura bazei mari cu L, latura bazei mici cu l, înălțimea cu h.

Trunchi de piramidă triunghiulară regulată	Trunchi de piramidă patrulateră regulată	Trunchi de piramidă hexagonală regulată
		
$\mathcal{P}_B = 3L$, $\mathcal{P}_b = 3l$	$\mathcal{P}_B = 4L$, $\mathcal{P}_b = 4l$	$\mathcal{P}_B = 6L$, $\mathcal{P}_b = 6l$
$\mathcal{A}_B = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$, $\mathcal{A}_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$	$\mathcal{A}_B = L^2$, $\mathcal{A}_b = l^2$	$\mathcal{A}_B = 6 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$, $\mathcal{A}_b = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

Bazele trunchiului de piramidă regulată sunt poligoane regulate, situate în plane paralele.
Muchiile laterale sunt congruente și formează unghiuri congruente cu planele bazelor.
Fețele laterale sunt trapeze isoscele congruente.
Desfășurarea suprafeței unui trunchi de piramidă este reuniunea a n suprafețe trapezoidale congruente și a două suprafețe poligonale regulate cu n laturi.







$\mathcal{A}_l = \frac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b) \cdot a_t}{2}$, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$, $\mathcal{V} = \frac{h}{3}(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b})$, unde h este înălțimea trunchiului de piramidă, $\mathcal{A}_B$ este aria bazei mari, iar $\mathcal{A}_b$ este aria bazei mici.
Aria laterală a trunchiului de piramidă regulată este suma ariilor fețelor laterale.
Aria totală a trunchiului de piramidă regulată este suma dintre aria laterală și aria celor două baze.
Volumul trunchiului de piramidă este diferența între volumul piramidei din care provine trunchiul și volumul piramidei îndepărtate.

MINITEST *Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.*

1. Un tetraedru regulat se secționează cu un plan paralel cu una dintre fețe, plan care trece prin mijlocul înălțimii. Raportul dintre volumul tetraedrului și cel al trunchiului de piramidă obținut este:

A. $\frac{1}{8}$	**B.** $\frac{7}{8}$	**C.** $\frac{8}{7}$	**D.** $\frac{8}{1}$

2. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are lungimea bazei mari de 15 cm, iar cea a bazei mici de 3 cm. Dacă apotema trunchiului are lungimea 8 cm, atunci muchia laterală are lungimea:

A. 12 cm	**B.** 10 cm	**C.** 9 cm	**D.** 15 cm

3. Apotema unui trunchi de piramidă hexagonală regulată are lungimea de 12 cm, muchia laterală de 13 cm, iar latura bazei mici de 8 cm. Atunci raza cercului circumscris bazei mari are lungimea:

A. 9 cm	**B.** 18 cm	**C.** 12 cm	**D.** 15 cm

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 În tabelul următor L, l, h, a_t, m, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$, $\mathcal{V}$ reprezintă latura bazei mari, latura bazei mici, înălțimea, apotema, muchia laterală, aria laterală, aria totală, respectiv volumul unui trunchi de piramidă patrulateră regulată. Calculați, copiați pe caiete și completați căsuțele libere ale tabelului.

L	l	h	a_t	m	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
18	10	3					
16	6		13				
	8	6					1664
10			3		96		

2 Fie $ABCDA'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată în care $AB = 12$ cm, $A'B' = 4$ cm, $AA' = 4\sqrt{5}$ cm. Calculați:
a) aria totală a trunchiului de piramidă;
b) măsura unghiului planelor (ABC) și (BCB').

3 Un rezervor pentru apă, confecționat din tablă, are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată. Se știe că lungimea bazei mari a trunchiului este de $12\sqrt{2}$ dm, lungimea bazei mici de $8\sqrt{2}$ dm și aria laterală de $160\sqrt{3}$ dm^2. Determinați:
a) înălțimea rezervorului;
b) capacitatea, exprimată în litri, a rezervorului.

4 Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are înălțimea de 3 cm, volumul de 208 cm^3 și aria bazei mari de 9 ori mai mare decât aria bazei mici.
a) Aflați lungimile laturilor bazelor trunchiului.
b) Calculați tangenta unghiului format de diagonala trunchiului cu baza mare a acestuia

5 Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are volumul $\dfrac{1053\sqrt{3}}{2}$ cm^3, înălțimea de 6 cm și latura bazei mici de 9 cm. Determinați:
a) lungimea laturii bazei mari;
b) aria laterală a trunchiului de piramidă;
c) numărul p, știind că volumul trunchiului de piramidă reprezintă $p\%$ din volumul piramidei din care provine trunchiul.

6 Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are apotemele bazelor de $4\sqrt{3}$ cm, respectiv $\sqrt{3}$ cm și înălțimea de 3 cm. Calculați:
a) volumul trunchiului de piramidă;
b) volumul piramidei din care provine trunchiul;
c) tangenta unghiului format de muchia laterală cu planul bazei mari.

7 Într-o piramidă triunghiulară regulată muchia bazei este 12 cm, iar muchia laterală are lungima de $8\sqrt{3}$ cm. Se secționează piramida cu un plan paralel cu baza piramidei, situat la distanța de 4 cm de aceasta. Aflați volumul și aria laterală a trunchiului de piramidă format.

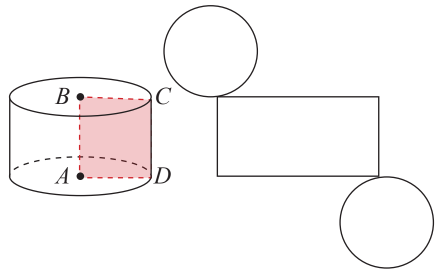
8 $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ este un trunchi de piramidă hexagonală regulată în care $AB = AA' = 20$ cm, iar unghiul diagonalei AD' cu planul (ABC) are măsura de 30°.
a) Arătați că $A'B'=10$ cm.
b) Calculați aria laterală a trunchiului de piramidă.
c) Determinați înălțimea piramidei din care provine trunchiul.

9 Se consideră trunchiul de piramidă hexagonală regulată $ABCDEFMNPQRS$ în care O este centrul bazei mari $ABCDEF$, $AB = 12$ cm, $MO \perp OQ$, iar muchia laterală face cu planul (ABC) un unghi cu măsura de 45°. Calculați:
a) lungimea muchiei laterale a trunchiului de piramidă;
b) aria secțiunii diagonale $ADQM$;
c) sinusul unghiului format de o față laterală cu planul bazei mari a trunchiului;
d) aria totală și volumul trunchiului de piramidă.

3 Arii și volume ale unor corpuri geometrice rotunde

L1. Aria laterală, aria totală și volumul cilindrului circular drept

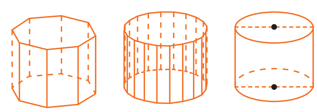
Descoperim, înțelegem, exemplificăm



Cilindrul circular drept este corpul geometric obținut prin rotația unui dreptunghi $ABCD$ în jurul uneia din laturile sale. Considerând axa de simetrie dreapta AB, laturile AD și BC devin razele cercurilor de bază ale cilindrului, iar latura CD devine generatoarea cilindrului.
Suprafața descrisă de generatoarea cilindrului se numește *suprafața laterală* a cilindrului.
Desfășurarea unui cilindru circular drept este formată din dreptunghiul care corespunde suprafeței laterale a cilindrului (are o dimensiune egală cu lungimea cercului bazei și cealaltă egală cu generatoarea cilindrului) și două cercuri congruente (bazele cilindrului).

Definiția 1. Aria laterală a cilindrului circular drept este aria suprafeței laterale și se notează $\mathcal{A}_l$.
Definiția 2. Aria totală a cilindrului circular drept este suma dintre aria laterală și ariile celor două baze și se notează cu $\mathcal{A}_t$.

Notăm cu $\mathcal{A}_B$ aria bazei, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_B$, formulă pe care o cunoaștem de la prismă.
Folosind desfășurarea cilindrului circular drept, obținem $\mathcal{A}_l = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot G$, apoi $\mathcal{A}_t = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot (G + R)$ unde R este raza bazei, iar G este generatoarea cilindrului.



Putem aproxima aria unui cerc cu aria unui poligon regulat cu latura din ce în ce mai mică. Atunci volumul cilindrului este aproximat cu volumul unei prisme drepte care are poligonul de bază înscris în cercul de bază a cilindrului și înălțimea egală cu generatoarea cilindrului.
Știm că volumul prismei regulate este produsul dintre aria poligonului de bază și înălțime și intuim formula pentru calculul volumului cilindrului de rază R și generatoare G. Având în vedere că înălțimea cilindrului circular drept este egală cu generatoarea, $\mathcal{V} = \mathcal{A}_B \cdot h$ sau $\mathcal{V} = \pi \cdot R^2 \cdot G$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1. O țestoasă pleacă dintr-un punct A al unei baze a cilindrului circular drept cu raza R și înălțimea $\pi \cdot R$ și ocolește cilindrul deplasându-se pe suprafața lui laterală cu o pantă de urcare de 10% până când ajunge în punctul de pe cealaltă bază, situat pe aceeași generatoare.
a) Aflați de câte ori ocolește țestoasa cilindrul.
b) Știind că broasca parcurge în total $2 \cdot \pi \cdot \sqrt{101}$ m, aflați raza, aria laterală și volumul cilindrului.

Soluție. **a)** Desfășurând suprafața laterală obținem un dreptunghi cu o dimensiune $2 \cdot \pi \cdot R$ și cealaltă $\pi \cdot R$. La o rotație completă (momentul în care ajunge pe generatoarea de pe care a plecat), țestoasa parcurge o înălțime de 10% din $2 \cdot \pi \cdot R$, adică de $\frac{\pi R}{5}$. Pentru a ajunge pe cealaltă bază, înconjoară de 5 ori cilindrul.
b) Desfășurând în plan suprafața laterală a cilindrului și alăturând cinci astfel de dreptunghiuri cu latura comună egală cu generatoarea cilindrului, observăm că „drumul” parcurs de țestoasă este diagonala unui dreptunghi cu dimensiunile $5 \cdot 2\pi R$ și πR. Calculând obținem $d = \pi R\sqrt{101}$. Dar, $d = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{101}$. Atunci, $R = 2$ m, $G = h = 2\pi$ m, $\mathcal{A}_l = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot G = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 2\pi = 8\pi^2$ (m²) și $\mathcal{V} = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 2\pi = 8\pi^2$ (m³).

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Copiați în caiete și completați tabelul de mai jos, știind că R, G, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ reprezintă raza, generatoarea, aria bazei, aria laterală, aria totală, respectiv volumul unui cilindru circular drept.

	R	G	$\mathcal{A}_b$ (cm²)	$\mathcal{A}_l$ (cm²)	$\mathcal{A}_t$ (cm²)	$\mathcal{V}$ (cm³)
a)	5 cm	10 cm				
b)	8 cm			80π		
c)		40 mm	9π			
d)				108π	270π	
e)		1,6 dm				256π

2 Calculați aria laterală a unui cilindru circular drept care are diametrul bazei de 20 cm și înălțimea egală cu jumătate din raza bazei.

3 Un cilindru circular drept are raza de 15 cm și generatoarea $\frac{3}{5}$ din lungimea razei. Calculați lungimea generatoarei și volumul cilindrului.

4 Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu latura de 20 cm. Aflați raza, generatoarea, aria laterală și volumul cilindrului.

5 Un cilindru circular drept are diametrul cercului de la bază 16 cm. Dacă distanța de la centrul unei baze la mijlocul unei generatoare este de 10 cm, calculați generatoarea, aria totală și volumul.

6 Raportul dintre lungimea razei și lungimea generatoarei unui cilindru circular drept este $\frac{4}{3}$. Știind că suma dintre lungimea generatoarei și lungimea diametrului unei baze este 33 cm, aflați aria secțiunii axiale și volumul cilindrului.

7 Aria laterală a unui cilindru circular drept este 90π cm², iar volumul este 225π cm³. Calculați raza, generatoarea și aria totală a cilindrului.

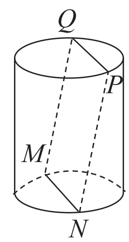
8 Aria totală a unui cilindru circular drept este cu 72π cm² mai mare decât aria sa laterală, iar generatoarea cilindrului este de 16 cm. Calculați raza, volumul și diagonala secțiunii axiale.

9 Se consideră $ABCD$ secțiunea axială a unui cilindru circular drept, $BC = G = 20$ cm. În baza care conține diametrul AB se înscrie triunghiul echilateral AEF de arie $75\sqrt{3}$ cm².

a) Aflați raza și volumul cilindrului.

b) Calculați distanța de la punctul D la dreapta EF.

10 În desenul alăturat este reprezentat un cilindru circular drept, iar MN și PQ sunt coarde paralele și congruente.



a) Demonstrați că $MNPQ$ este un dreptunghi.

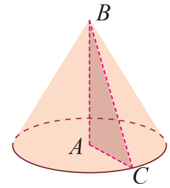
b) Se știe că raza bazei cilindrului și coarda MN au lungimile egale cu 6 cm și $MQ = 12$ cm. Calculați înălțimea cilindrului.

11 Pe marginea unei autostrăzi, pentru a susține afișe publicitare se montează 24 de stâlpi, fiecare având forma unui cilindru circular drept cu înălțimea de 3 m și diametrul de 40 cm. Pentru a vopsi stâlpii se folosesc 10 g de vopsea pentru o suprafață de 1 dm². Calculați cantitatea de vopsea necesară vopsirii tuturor stâlpilor ($\pi \approx 3{,}15$).

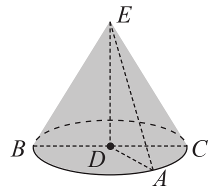
12 O țeavă are diametrul interior de 36 mm, diametrul exterior de 48 mm, lungimea de 4,5 m și este confecționată dintr-un material având densitatea $\rho = 5$ g/cm³. Calculați masa bucății de țeavă (se aproximează π cu 3,1).

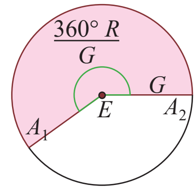
L2. Aria laterală, aria totală și volumul conului. Aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con circular drept

Descoperim, înțelegem, exemplificăm



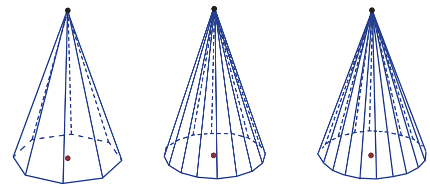
Conul circular drept este corpul generat prin rotația suprafeței unui triunghi dreptunghic, în jurul unei catete.
Cateta care are ca dreaptă suport axa de rotație devine înălțimea conului, cealaltă catetă este raza bazei conului, iar ipotenuza devine generatoare a conului.
Desfășurarea suprafeței laterale a conului cu raza cercului de bază R și generatoarea de lungime G, este un sector de cerc de rază G cu lungimea arcului de cerc subîntins egală cu lungimea cercului de bază al conului, adică $2\pi R$.
Rezultă că suprafața laterală este un sector de cerc de rază G cu unghiul la centru de măsură $\dfrac{360°R}{G}$.





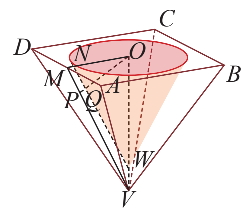
Aria laterală a conului circular drept este aria sectorului de cerc cu raza G și lungimea arcului egală cu lungimea cercului bază a conului. $\mathcal{A}_l = \pi RG$.
Aria totală este suma dintre aria laterală și aria bazei. $\mathcal{A}_t = \pi RG + \pi R^2$ sau $\mathcal{A}_t = \pi R\,(G + R)$.

Pentru noțiunea de *volum* vom aproxima baza conului prin poligoane regulate cu latura din ce în ce mai mică.
Atunci, volumul piramidei va aproxima volumul conului. Cum acesta este o treime din produsul dintre aria bazei și înălțimea piramidei, intuim o formulă similară și la con.



$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\,\mathcal{A}_b \cdot h$ sau $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$.

Aplicația 1. O piesă din metal având forma unei piramide patrulatere regulate cu baza de 16 cm și înălțimea de 6 cm se prelucrează prin îndepărtarea din ea a unui con astfel încât peretele corpului rămas să aibă grosimea minimă de 1 cm. Determinați volumul corpului rămas după prelucrare.



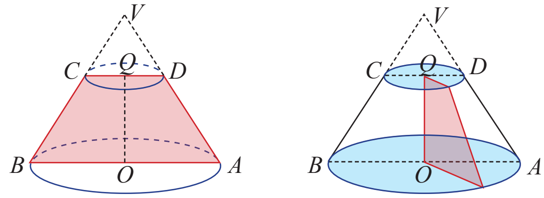
Soluție. Notăm cu M mijlocul muchiei AD a piramidei $VABCD$, cu ON raza conului și OW înălțimea sa. Grosimea minimă a corpului rămas după prelucrare este în secțiunea axială care trece prin M, fiind distanța dintre dreptele paralele NW și MV.
Construim, în planul triunghiului OMV, perpendiculara din O pe MV. Aceasta intersectează NW în Q și MV în P.
Problema impune $PQ = 1$ cm. Calculăm înălțimea din O a triunghiului dreptunghic OMV, $PO = \dfrac{OM \cdot OV}{MV} = \dfrac{24}{5}$, de unde $OQ = OP - PQ = \dfrac{19}{5}$. Dar, $\Delta ONW \sim \Delta OMV$ cu raportul de asemănare $\dfrac{OQ}{OP} = \dfrac{19}{24}$, deci $ON = \dfrac{19}{3}$ și $OW = \dfrac{19}{4}$. Obținem volumul conului $\mathcal{V}_{con} = \dfrac{\pi ON^2 \cdot OW}{3} = \dfrac{6859\pi}{108}$ cm³, iar volumul piramidei este

$$\mathcal{V}_{piramidă} = \frac{AB^2 \cdot OV}{3} = 512 \text{ cm}^3.$$

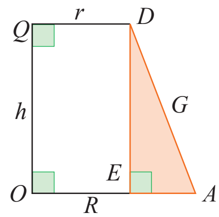
$$\mathcal{V}_{corp} = \mathcal{V}_{piramidă} - \mathcal{V}_{con}.$$

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Trunchiul de con circular drept se obține prin secționarea unui con circular drept cu un plan paralel cu baza sau prin rotația suprafeței unui trapez dreptunghic în jurul laturii neparalele, perpendiculare pe baze.
Bazele trapezului devin raze ale bazelor trunchiului, latura perpendiculară pe baze este înălțimea trunchiului, iar a doua latură neparalelă devine generatoare a trunchiului.



Considerăm trunchiul de con circular drept cu secțiunea axială $ABCD$, O și Q fiind centrele bazelor. Notăm $OA = R$, $QD = r$, $OQ = h$ și $AD = G$.
În trapezul dreptunghic $OADQ$, prin calcul, obținem relația $G^2 = h^2 + (R - r)^2$.
Bazele trunchiului de con sunt discuri mărginite de cercuri cu razele: OA și QD, iar înălțimea trunchiului de con este OQ.
Aria laterală a trunchiului de con este aria suprafeței descrise de generatoarea trunchiului, în mișcarea de rotație și se notează cu $\mathcal{A}_l$.



Suprafața totală a trunchiului de con, este reuniunea dintre suprafața laterală și suprafețele celor două baze. Aria acestei suprafețe se numește *aria totală* a trunchiului de con și se notează cu $\mathcal{A}_t$.

Propoziția 1. Într-un trunchi de con circular drept cu R, r razele bazelor și cu generatoarea G, $\mathcal{A}_l = \pi G(R + r)$; $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$, cu precizarea că $\mathcal{A}_B = \pi R^2$ și $\mathcal{A}_b = \pi r^2$

Propoziția 2. Volumul trunchiului de con cu razele bazelor R, r și înălțimea h este: $\mathrm{V_t} = \frac{\pi \mathrm{h}}{3}\left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right)$.

Demonstrație. Volumul trunchiului de con circular drept este diferența volumelor celor două conuri: de rază R și înălțime h_1 și de rază r și înălțime h_2.

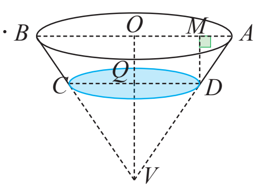
$\mathrm{V_t} = \frac{\pi R^2 \cdot h_1}{3} - \frac{\pi r^2 \cdot h_2}{3}$. Din asemănarea $\Delta VQD \sim \Delta VOA$, rezultă $\frac{r}{R} = \frac{h_2}{h_1}$, iar cu proporții derivate,

$h_2 = \frac{r \cdot h}{R - r}$ și $h_1 = \frac{R \cdot h}{R - r}$. Înlocuite în expresiile de mai sus, obținem: $\mathrm{V}_t = \frac{\pi \mathrm{h}}{3}\left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right)$.

Observație. Formula cunoscută de la trunchiul de piramidă, $\mathrm{V}_t = \frac{\pi \mathrm{h}}{3}\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \mathcal{A}_b}\right)$, rămâne valabilă și la trunchiul de con circular drept, având în vedere că $\mathcal{A}_B = \pi R^2$ și $\mathcal{A}_b = \pi r^2$, unde R, r și h sunt raza bazei mari, raza bazei mici, respectiv înălțimea trunchiului de con.

Aplicația 2. Un vas are formă de trunchi de con circular drept. Diametrele cercurilor de bază sunt 80 cm, respectiv 50 cm, iar generatoarea este de 25 cm. Aflați volumul vasului.

Soluție. $AB = 80$ cm, $CD = 50$ cm și $AD = 25$ cm. Considerăm secțiunea sa axială ($ABCD$). Dacă $M = pr_{AB}D$, atunci DM este înălțimea trunchiului de con.



În triunghiul dreptunghic AMD, $h = DM = \sqrt{AD^2 - MA^2} = 20$ cm, iar volumul este

$\mathcal{V}_t = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right) = 21\,500\pi \text{ cm}^3$.

MINITEST *Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.*

1. Un con circular drept se secționează cu un plan paralel cu baza, care trece prin mijlocul înălțimii. Raportul dintre volumul conului mic și cel al trunchiului de con obținut este:			
A. $\frac{1}{8}$	**B.** $\frac{1}{7}$	**C.** $\frac{7}{1}$	**D.** $\frac{2}{3}$
2. Un con circular drept are raza de 9 cm și generatoarea de 15 cm. Aria laterală este:			
A. 200π	**B.** 225π	**C.** 180π	**D.** 135π
3. Volumul unui trunchi de con este de 732 cm^3. Raza bazei mari are lungimea 15 cm, a bazei mici este 12 cm, iar generatoarea este de 5 cm. Atunci înălțimea trunchiului este:			
A. 9 cm	**B.** 10 cm	**C.** 4 cm	**D.** 5 cm

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Prin rotirea în jurul catetelor AB și AC ale triunghiului dreptunghic ABC se obțin două conuri circulare drepte.

a) Realizați câte un desen pentru fiecare din cele două rotații.

b) Specificați în fiecare caz raza, înălțimea și generatoarea conului.

c) Pentru $AB = a$ cm, $AC = b$ cm, $a > b$ copiați în caiete tabelul următor, completați și comparați rezultatele știind că R, H, G, A_l, A_t și V reprezintă raza, înălțimea, generatoarea, aria laterală, aria totală, respectiv volumul conului circular drept.

	R	H	G	A_l	A_t	V
Conul 1	a	b				
Conul 2	b	a				

d) Completați un tabel asemănător luând $AB = 15$ cm, $AC = 7$ cm.

2 Un con circular drept are generatoarea de 5 cm și raza de 3 cm. Aflați înălțimea, aria laterală și volumul conului.

3 Generatoarele unui con circular drept au lungimea de $18\sqrt{2}$ cm și fiecare dintre ele formează cu planul bazei unghiuri cu măsura u. Puntru $u \in \{30^\circ, 45^\circ, 60^\circ\}$ calculați lungimea razei conului, înălțimea și volumul conului.

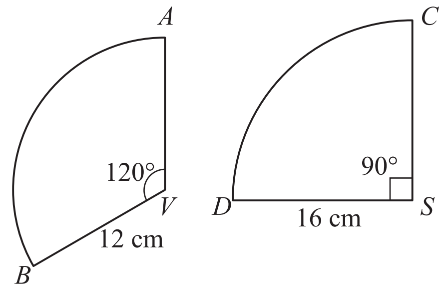
4 Diametrul bazei unui con circular drept este de 18 cm iar raportul dintre înălțimea și generatoarea conului $\frac{4}{5}$. Aflați:

a) raza, generatoarea și înălțimea conului;

b) aria secțiunii axiale;

c) raportul dintre aria bazei și aria laterală a conului. Scrieți acest raport ca raport procentual.

5 Suprafața laterală a unui con se poate obține prin „înfășurarea“ unui sector de cerc. În desenul de mai jos sunt prezentate două sectoare de cerc care provin din cercuri diferite.



a) Determinați raza și înălțimea pentru fiecare con.

b) Calculați ariile laterale și volumele corpurilor.

6 Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi echilateral, iar distanța dintre centrul bazei conului și mijlocul unei generatoare este de 4 cm.

a) Aflați raza, generatoarea și înălțimea conului.

b) Calculați aria totală și volumul conului.

7 Un con circular drept are diametrul bazei 64 cm și înălțimea de 24 cm.
a) Calculați raza, generatoarea și volumul conului.
b) Aflați la ce distanță de vârful conului trebuie dus un plan paralel cu baza astfel încât aria cercului de secțiune să fie 144 cm^2.

8 Desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept este un semicerc cu diametrul de 12 cm.
a) Aflați generatoarea și înălțimea conului.
b) Calculați volumul conului.

9 Un cort având forma unui con circular drept are înălțimea de 3 m, iar suprafața pe care se sprijină cortul este de 16π m^2. Aflați câți metri de pânză se folosesc pentru confecționarea cortului. (În calcul se ia și suprafața orizontală.)

10 Înălțimea unui con circular drept este de 20 cm. Aflați la ce distanță de baza conului trebuie dus un plan paralel cu baza acestuia pentru a obține, prin secționare, două corpuri cu ariile laterale egale.

11 Un con circular drept are raza egală cu 18 cm și generatoarea egală cu 3 dm. Aflați:
a) înălțimea, aria laterală și volumul conului;
b) măsura unghiului sectorului de cerc obținut prin desfășurarea suprafeței laterale a conului.

12 Un con circular drept are vârful V. În cercul de bază al conului se înscrie pătratul $ABCD$.
a) Arătați că VABCD este o piramidă regulată.
b) Știind că $VA = 8\sqrt{3}$ cm, $AB = 16$ cm, calculați înălțimea conului și raportul volumelor celor două corpuri.

13 Dintr-o bucată de tablă având forma unui sector de disc se confecționează prin înfășurare un recipient conic. Se știe că unghiul la centru al sectorului de disc are măsura de 120°, iar lungimea arcului de cerc care mărginește bucata de tablă are lungimea de 60π cm.
a) Calculați înălțimea recipientului conic.
b) Aflați capacitatea recipientului exprimând valoarea acesteia în litri cu două zecimale (se folosesc valorile aproximative $\pi = 3,14$ și $\sqrt{2} = 1,41$).

14 Un trunchi de con circular drept are lungimile razelor bazelor 5 cm, respectiv 2 cm și înălțimea de 4 cm. Aflați generatoarea trunchiului de con.

15 Volumul unui trunchi de con circular drept este 84π cm^3, înălțimea de 4 cm, iar raportul dintre razele bazelor 0,5. Calculați:
a) lungimile razelor bazelor trunchiului;
b) aria totală a trunchiului de con;
c) înălțimea conului din care provine trunchiul de con.

16 Un trunchi de con circular drept are înălțimea de 15 cm, generatoarea de 25 cm și linia mijlocie a secțiunii axiale de 30 cm.
a) Calculați aria laterală a trunchiului de con.
b) Aflați lungimile razelor și volumul trunchiului de con.

17 Un recipient în formă de trunchi de con circular drept are înălțimea de 40 cm și diametrele bazelor de 140 cm, respectiv 80 cm. Aflați câți litri de apă încap în rezervor. (Dați răspunsul cu aproximație la nivelul unităților.)

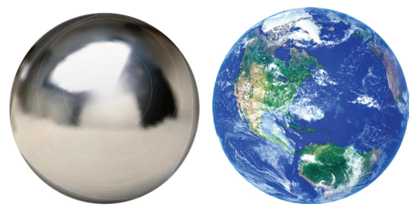
18 Un con circular drept are raza de 6 cm și înălțimea egală cu 0,(6) din lungimea diametrului bazei.
a) Aflați înălțimea și generatoarea conului.
b) Un plan paralel cu baza conului determină în con o secțiune cu aria 9π cm^2. Calculați volumul trunchiului de con obținut prin secționare.

19 Un cort de forma unui trunchi de con circular drept are înălțimea de 3 m și circumferințele bazelor de 1600π cm, respectiv 800π cm. Câți metri pătrați de pânză s-au folosit pentru confecționarea cortului?

20 Un trunchi de con circular drept are ca secțiune axială trapezul isoscel $ABCD$ în care $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, $AB = 8$ cm, $CD = 4$ cm.
a) Calculați aria laterală a trunchiului.
b) Calculați volumul trunchiului.
c) Calculați lungimea celui mai scurt drum dintre punctele A și B, parcurs pe suprafața laterală a trunchiului.

L3. Sfera. Aria și volumul sferei

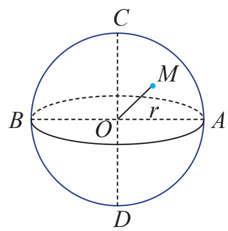
Descoperim, înțelegem, exemplificăm



Sfera este „perla” tuturor corpurilor geometrice. Încă din Antichitate, sfera era considerată „*cea mai desăvârșită dintre toate*“ (Platon).
Din orice punct al spațiului ar fi privită, sfera arată la fel.
Pretutindeni întâlnim obiecte care au formă de sferă sau de porțiuni dintr-o sferă.

Considerăm un punct O fixat în spațiu și un număr real strict pozitiv r.

Definiția 1. Mulțimea tuturor punctelor din spațiu care sunt situate la distanța r de punctul O se numește sferă de centru O și rază r și se notează $\mathcal{S}(O, r)$.



Despre un punct M, din spațiu, spunem că aparține sferei dacă și numai dacă distanța la punctul fix O este r și scriem: $M \in \mathcal{S}(O, r) \Leftrightarrow d(M, O) = r$.
Sfera împarte punctele din spațiu în două categorii:
1) puncte interioare sferei: sunt punctele N, pentru care distanța la centrul sferei este mai mică decât raza;
2) puncte exterioare sferei: sunt punctele P, pentru care distanța la centrul sferei este mai mare decât raza.

Observații.

1. Sfera nu conține și punctele din interiorul său.

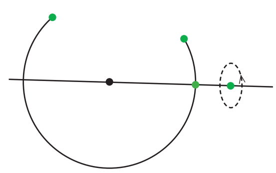
2. Reuniunea dintre sferă și mulțimea punctelor interioare formează *sfera plină* sau *bila* de centru O și rază r, notată $B(O, r)$, adică $B(O, r) = \{P \mid d(P, O) \leq r\}$.

Extinderea conceptului de sferă la sfera plină (bilă) este necesară pentru a putea vorbi despre volumul acestui corp geometric.

3. Sfera este un corp de rotație. Prin rotația completă (până când ajunge în poziția inițială) a unui semicerc în jurul diametrului determinat de capetele sale se generează o sferă. Centrul sferei obținute coincide cu centrul cercului din care provine semicercul, iar raza sferei este egală cu raza semicercului.

Lucrare practică

Verificați folosind un program de geometrie dinamică (de exemplu, ***Geogebra***) validitatea afirmației: „Prin rotația unui arc de cerc care conține un semicerc, în jurul unei drepte care conține centrul cercului din care provine arcul și îl intersectează în două puncte distincte se obține o sferă”.



Intersecția dintre un plan α și sfera $\mathcal{S}(O, r)$, depinde de distanța dintre centrul sferei și planul α.

Propoziție. Sunt posibile următoarele situații:

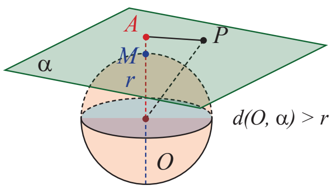
a) $\alpha \cap \mathcal{S}(O, r) = \varnothing$, dacă $d(O, \alpha) > r$. Planul α se numește *exterior* sferei.

b) $\alpha \cap \mathcal{S}(O, r)$ conține un punct, dacă $d(O, \alpha) = r$. Planul este *tangent* la sferă în acel punct.

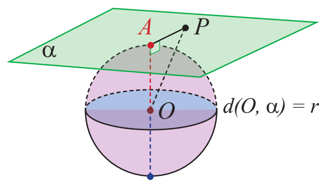
c) $\alpha \cap \mathcal{S}(O, r)$ este un cerc cu centrul în proiecția lui O pe α, dacă $d(O, \alpha) < r$. Planul este *secant* sferei.

Demonstrație. Notăm cu A proiecția punctului O pe planul α și cu M intersecția dintre semidreapta OA și sferă. Atunci, $d(O, \alpha) = OA$, iar $OM = r$.

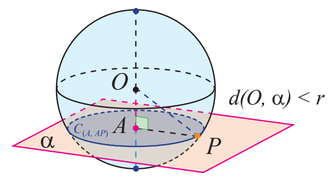
a) Din $OM < OA$, rezultă M aparține segmetului OA, deci pentru orice punct P al planului avem $d(O, P) > d(O, \alpha) > r$.
Atunci, $\alpha \cap \mathcal{S}(O, r) = \varnothing$.



b) Pentru orice punct $P \in \alpha$, ΔOAP este dreptunghic, deci $OP > OA = r$, adică $P \notin \mathcal{S}(O, r)$.
Rezultă $\alpha \cap \mathcal{S}(O, r) = \{A\}$.

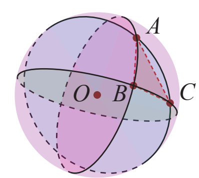


c) Pentru $P \in \alpha \cap \mathcal{S}(O, r)$, ΔOAP este dreptunghic, deci
$AP = \sqrt{OP^2 - OA^2} = \sqrt{r^2 - OA^2}$, adică este constantă și
$\alpha \cap \mathcal{S}(O, r) = \mathcal{C}(O, AP)$.



În particular, pentru $d(O, \alpha) = 0$, planul conține centrul O, al sferei, intersecția fiind un cerc de rază r. Planul α se numește *plan diametral* al sferei, iar cercul de intersecție se numește *cerc mare* al sferei.
Reprezentarea bidimensională a sferei se realizează prin evidențierea unui cerc cu centrul în centrul sferei. Pentru a sugera că figura este un corp, o sferă și nu un cerc într-un plan, convenim să reprezentăm cel puțin o intersecție a sferei cu un plan, de regulă cu planul orizontal, desenat ca un cerc turtit.

Pentru două puncte distincte A și B de pe sferă, există un unic arc al unui cerc mare al sferei care le unește.
Considerăm trei puncte A, B, C pe sferă. Acestea determină arcele din cercurile mari ale sferei care trec prin fiecare două dintre ele. Se obține astfel un „*triunghi pe sferă*”, dar și triunghiul din spațiu ABC, determinat de cele trei puncte. Intuim că pentru triunghiuri din ce în ce mai mici putem aproxima aria „*triunghiului de pe sferă*” cu aria triunghiului plan. Calculând suma ariilor „triunghiurilor” disjuncte care acoperă sfera, se aproximează aria sferei.
Consultați manualul digital pentru a urmări modul în care putem intui, tot prin aproximări și formula de calcul pentru volumul corpului sferic.



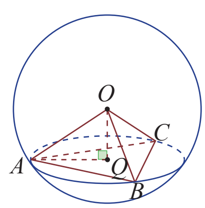
Observație. Nu se poate realiza o desfășurare, în plan, a sferei.
Acceptăm următoarele formule de calcul, demonstrația lor depășind nivelul manualului:

Aria sferei de rază r este $\mathcal{A} = 4\pi r^2$, iar volumul sferei de rază R este $\mathcal{V} = \dfrac{4\pi r^3}{3}$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

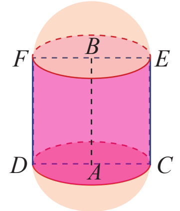
Aplicația 1. Pe suprafața unei sfere $\mathcal{S}(O, r)$ se află punctele A, B, C așa încât $AB = BC = CA = 9$ cm. Știind că distanța de la centrul sferei la planul (ABC) este de 3 cm, aflați raza sferei, aria și volumul acesteia.

Soluție. $A, B, C \in \mathcal{S}(O, r)$, rezultă $AO = BO = CO = r$. Piramida $OABC$ este regulată și $Q = pr_{(ABC)}O$ este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. $AQ = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$ cm.
În triunghiul AOQ, aplicând teorema lui Pitagora, se obține $AO^2 = AQ^2 + OQ^2$, $AO = r = 6$ cm.
Atunci, $\mathcal{A} = 4\pi r^2 = 144\pi$ cm^2 și $\mathcal{V} = \dfrac{4\pi r^3}{3} = 288\pi$ cm^3.



Aplicația 2. Secționăm o sferă de rază r după un plan diametral și „lipim" între cele două semisfere un cilindru. Determinați înălțimea cilindrului, știind că volumul corpului obținut este dublul volumului sferei.

Soluție. Observăm că raza sferei și raza bazei cilindrului sunt egale. Volumul sferei este $\mathcal{V}_S = \dfrac{4\pi r^3}{3}$, iar pentru volumul cilindrului de rază r și înălțime h avem $\mathcal{V}_C = \pi \cdot r^2 \cdot h$.
Pentru ca volumul corpului să fie dublul volumului sferei, trebuie ca $\mathcal{V}_S = \mathcal{V}_C$, adică $h = \dfrac{4r}{3}$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

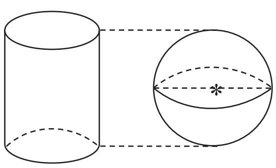
1 **a)** Numiți forma geometrică descrisă de fiecare din punctele situate pe un semicerc $\overset{\frown}{AB}$ când acesta se rotește în jurul dreptei AB.
b) Numiți corpul geometric obținut prin rotirea completă a semicercului $\overset{\frown}{AB}$ în jurul dreptei AB.

2 Copiați pe caiete tabelul de mai jos și completați căsuțele libere. Datele înscrise se referă la o sferă.

	R	$\mathcal{A}_{sf}$ (cm²)	$\mathcal{V}$ (cm³)
a)	4 cm		
b)		144π	
c)			36π
d)	0,06 m		

3 În întrecerea sportivilor la aruncarea greutății se folosește o bilă în formă de sferă. Aflați diametrul sferei știind că o secțiune care conține centrul sferei are aria de 49π cm².

4 În desenul de mai jos sunt reprezentate un cilindru circular drept și o sferă.
a) Scrieți relația dintre înălțimea cilindrului și raza sferei.



b) Știind că aria laterală a cilindrului este egală cu aria sferei, comparați raza bazei cilindrului cu raza sferei.
c) Comparați raza bazei cilindrului cu raza sferei în cazul când corpurile au aceeași arie.

5 O sferă cu aria 144π cm² se secționează cu un plan, lungimea cercului de secțiune fiind 4π cm. Calculați:
a) raza și volumul sferei;
b) distanța de la centrul sferei la planul de secțiune.

6 O sferă cu raza de 20 cm este intersectată de un plan situat la distanța de 12 cm față de centrul sferei. Aflați:
a) volumul sferei;
b) raza cercului obținut prin secționarea sferei.

7 Pe suprafața unei sferei se consideră punctele A, B, C astfel încât $AB = 9$ cm, $BC = 12$ cm, $CA = 15$ cm, iar planul (ABC) conține centrul sferei.
Aflați raza și volumul sferei.

8 Sfera de centru O și rază $r = 8$ cm conține punctele A, B, C și $OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$. Calculați:
a) aria și volumul sferei;
b) aria triunghiului ABC;
c) distanța de la centrul sferei la planul (ABC).

9 Un acvariu are forma unei semisfere. Raza sferei din care provine este de 15 cm:
a) Calculați aria și volumul acvariului.
b) Aflați dacă se pot pune 6 litri de apă în acvariu, știind că acesta poate fi umplut cu apă doar la 90% din capacitatea sa.

TEST DE AUTOEVALUARE *Se acordă 10 puncte din oficiu.*

Subiectul I. *Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.*

5p **1.** În paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$, $AB = 5$ cm, $AD = 24$ cm, $AE = 10$ cm.
Aria patrulaterului $ABGH$ este:

A. 110 cm² B. 120 cm² C. 130 cm² D. 140 cm²

5p **2.** Muchia laterală a unei piramide patrulatere regulate are lungimea de 12 cm și formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 60°. Apotema piramidei are lungimea:

A. 4 cm B. $\sqrt{14}$ cm C. $2\sqrt{14}$ cm D. $3\sqrt{14}$ cm

5p **3.** Lungimile laturilor bazelor unui trunchi de piramidă patrulateră regulată sunt a cm și b cm, iar lungimea apotemei c cm. Aria laterală a trunchiului de piramidă este:

A. $2a \cdot (b + c)$ cm² B. $2b \cdot (a + c)$ cm² C. $2c \cdot (a + b)$ cm² D. $2abc$ cm²

5p **4.** Un trunchi de piramidă regulată s-a obținut prin secționarea unui tetraedru regulat și are volumul 0,936 din volumul tetraedrului. Raportul muchiilor bazelor trunchiului este:

A. $\dfrac{2}{3}$ B. $\dfrac{2}{5}$ C. $\dfrac{4}{5}$ D. $\dfrac{4}{3}$

5p **5.** Volumul unui cilindru circular drept este 12π cm³, iar $3 \cdot R = 2 \cdot G$. Diametrul bazei cilindrului este:

A. 4 cm B. 6 cm C. 2 cm D. 3 cm

5p **6.** Un trunchi de con circular drept are generatoarea $G = 26$ cm, raza bazei mari $R = 15$ cm și înălțimea $h = 24$ cm. Volumul trunchiului de con este:

A. 2400π cm³ B. 2450π cm³ C. 2500π cm³ D. 2600π cm³

5p **7.** O sferă, cu volumul 2304π cm³, are aria egală cu:

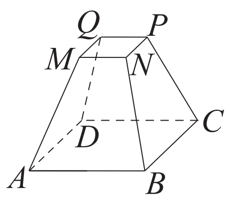
A. 480π cm² B. 536π cm² C. 596π cm² D. 576π cm²

5p **8.** Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi dreptunghic cu aria de 32 cm².
Aria laterală a conului este:

A. $32\sqrt{2}\,\pi$ cm² B. $16\sqrt{2}\pi$ cm² C. 32π cm² D. 16π cm²

Subiectul al II-lea. *La problemele următoare, se cer rezolvări complete.*

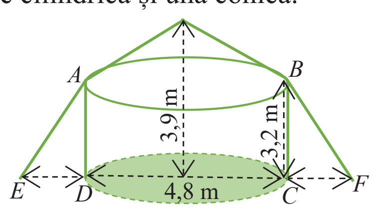
1. Un baraj hidrotehnic este construit pe scheletul din beton al unui trunchi de piramidă regulată $ABCDMNPQ$, cu $AB = 180$ m, $MN = 60$ m și adâncimea h.
Volumul trunchiului de piramidă este $1248 \cdot 10^3$ m³.



10p **a)** Calculați înălțimea h a trunchiului de piramidă.

10p **b)** Construcția finală a barajului include adăugarea în jurul scheletului din beton a unui volum de rocă egal cu 175% din volumul trunchiului.
Exprimați în metri cubi volumul barajului.

2. În desenul alăturat, este schița unui cort format din două părți; o parte cilindrică și una conică.
Dimensiunile sunt date în desen, în metri.



10p **a)** Calculați volumul cortului.

10p **b)** Cortul este prevăzut cu ancorele din frânghie AE și BF, punctele E și F fiind situate fiecare la distanța de 4,8 m față de centrul bazei cortului.
Calculați lungimea frânghiei folosite la ancorarea cortului.

10p **3.** Un muncitor trebuie să vopsească trei bile. El vopsește două dintre bile, acestea având diametrul de 18 cm, respectiv 24 cm, apoi o vopsește și pe a treia. După ce termină activitatea, constată că pentru vopsirea celei de-a treia bile a folosit aceeași cantitate de vopsea cât a fost necesară pentru a vopsi primele două bile. Aflați raza celei de-a treia bile.

Recapitulare finală
Probleme de sinteză

1 Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{4}{x-3} \in \mathbb{Z}\}$ și P mulțimea numerelor prime. Aflați mulțimile A și $A \cap P$.

2 Fie numerele $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $b = 1 + \sqrt{6}$ și mulțimea $I = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{5}}{2}\}$. Arătați că $(a^2 - b^2 + 1)^{10} \in I$.

3 Se consideră numerele $a = 2\sqrt{7} + 3$, $b = 5 + 2\sqrt{3}$ și mulțimea $M = \{a^2, |-50 - \sqrt{101}|, b^2\}$. Determinați cel mai mic element al mulțimii M.

4 Arătați că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, numărul $m = (2n - 3)^2 + (4n - 6)(3n + 4) + (3n + 4)^2$ este pătratul unui număr real.

5 Se consideră șirul infinit de numere reale $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{12}, \sqrt{20}, \ldots$

a) Găsiți regula de formare a termenilor șirului și completați șirul cu încă trei termeni.

b) Stabiliți dacă există sau nu un termen al șirului care să fie egal cu media geometrică a vecinilor săi.

6 Fie expresiile $E_1(x) = x^3 - 9x$ și $E_2(x) = x^2 + 9x + 6x$.

a) Descompuneți în factori cele două expresii.

b) Calculați valoarea expresiei $E_2(x)$ pentru $x = 2 - \sqrt{5}$.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $E_1(x) = x(x - 4)^2 - x$.

7 Pentru x și y numere reale, determinați:

a) Minimul expresiei $4x^2 + 12x + 11$

b) Maximul expresiei $-x^2 - 6x + 3$

c) Perechile de numere (x, y) care verifică egalitatea $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 17 = 0$

8 Efectuați calculele:

a) $\left(\frac{3a}{1-3a} + \frac{2a}{3a+1}\right) : \frac{6a^2 + 10a}{1 - 6a + 9a^2}$, $a \in \mathbb{R} - \{-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\}$;

b) $\left(\frac{ab^2 + a^2b}{a^2 + 2ab + b^2} - 2b + \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}\right) : \frac{b^2 - a^2}{-ab}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \neq b$, $a \neq -b$.

9 Arătați că expresia $E(x) = \left[1 - \frac{(x-3)^2}{x^2+9}\right] : \frac{2x}{x^2+9}$ este un număr natural, oricare ar fi numărul real nenul x.

10 Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$

a) Calculați $\frac{f(\sqrt{3}) - f(1)}{\sqrt{3} - 1}$.

b) Trasați graficul funcției f.

c) Determinați punctul de intersecție al graficului funcției f cu graficul funcției $g : [-2, +\infty)$, $g(x) = -x + 3$.

11 Aflați numărul a știind că punctul $A(a, 2a + 1)$ este situat pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a^2$

12 **a)** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$. Arătați că oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, are loc inegalitatea $f(a) < f(b)$.

b) Fie funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 3$. Arătați că oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, are loc inegalitatea $g(a) > g(b)$.

13 Rezolvați ecuațiile:

a) $2(x + 4)^2 - (x - 1)(x + 1) = x^2 + 1$;

b) $\frac{2x-1}{3x+2} = \frac{4x-3}{5x+6}$.

14 Se consideră în necunoscuta x, ecuația: $x^2 - x = a^2 - a$, $a \in \mathbb{R}$.

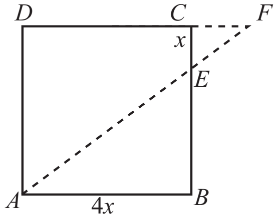
a) Rezolvați ecuația pentru $a = 1$.

b) Determinați a știind că ecuația admite soluția $x = 2$.

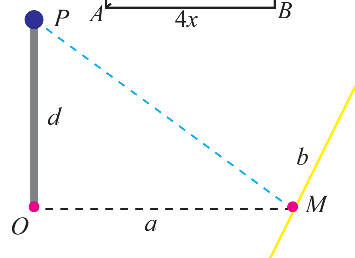
c) Arătați că oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, ecuația admite soluții reale.

15 Determinați numărul $\overline{ab}$ scris în baza 10, știind că $\overline{ab}^{\,2} + 3 \cdot \left(\overline{2ab} - 20\right) = 2020$.

16 Se știe că $ABCD$ este un pătrat. Folosind datele înscrise în desenul alăturat calculați în funcție de numărul real pozitiv x, perimetrul și aria $ABEFD$.



17 Iluminatul unui parc se face prin luminatoare montate pe stâlpi cu înălțimea de 5 m, stâlpii fiind perpendiculari pe planul solului. Unul dintre stâlpi este situat la distanța de 12 m față de aleea „b" (figura alăturată). Calculați distanța de la vârful stâlpului la alee.



18 Pe planul triunghiului dreptunghic ABC se ridică perpendiculara în mijlocul M al ipotenuzei BC pe care se fixează punctul N astfel încât $MN = 8$ cm. Știind că $AB = AC = 6\sqrt{2}$ cm, calculați:

a) cosinusul unghiului format de dreapta NB cu planul triunghiului;

b) măsura unghiului format de dreapta AB cu planul (AMN);

c) lungimea proiecției segmentului AC pe planul (AMN).

19 Fie C un punct situat pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$, $AO \equiv OB$ și $DC \perp (AOB)$. Demonstrați că triunghiurile DOA și DOB au aceeași arie.

20 Pătratele $ABCD$ și $ABEF$ sunt situate în plane diferite, $AB = a$.

a) Dacă M este mijlocul segmentului CE, demonstrați că $AM \perp CE$.

b) Știind că $EC = AB \cdot \sqrt{3}$, calculați în funcție de a, distanța de la punctul B la dreapta DF.

21 $ABCDA'B'C'D'$ este un cub. Demonstrați că:

a) $A'B \perp BC$;

b) $A'BCD'$ este dreptunghi;

c) $\mathcal{A}_{A'BCD'} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABC'}$.

22 Fie d lungimea diagonalei unui cub. Calculați volumul cubului.

23 O piramidă patrulateră regulată cu latura bazei de 6 cm, are volumul $36\sqrt{3}$ cm^3. Determinați:

a) măsura unghiului format de fețele laterale cu planul bazei;

b) aria laterală a piramidei.

24 Fie $ABCDA'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu $AB = 18$ cm și $A'B' = 6$ cm. Știind că înălțimea trunchiului este $6\sqrt{3}$ cm, calculați înălțimea unei fețe laterale.

25 În trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, M și M' sunt mijloacele muchiilor AB, respectiv $A'B'$, iar O și O' sunt centrele bazelor. Știind că $AB = a$, $A'B' = b$, $a > b$ și $MM' = c$, calculați OO'.

26 Piramida triunghiulară regulată $SABC$ are înălțimea $SO = 18$ cm și muchia laterală $SA = 3$ dm. Secționăm piramida cu un plan α, paralel cu baza, astfel încât perimetrul secțiunii să fie o treime din perimetrul bazei. Calculați:

a) distanța de la planul de secțiune la planul bazei piramidei;

b) muchia laterală a trunchiului de piramidă rezultat prin secționarea piramidei;

c) volumul trunchiului de piramidă.

27 Fie cubul $ABCDEFGH$, $AB = 4$ dm și punctul P mijlocul muchiei EH.

a) Calculați perimetrul patrulaterului $BCHP$.

b) Aflați distanța de la punctul P la dreapta AC.

c) Aflați sinusul unghiului format de dreapta PC cu planul (BCD).

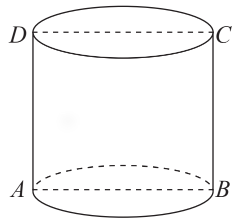
28 În paralelipipedul dreptunghic $ABCDMNPQ$, $AB = 12$ cm, $DQ = 15$ cm și suma tuturor muchiilor este de 144 cm.
a) Aflați lungimea diagonalei paralelipipedului.
b) Determinați cosinusul unghiului planelor (ABQ) și (MNP).

29 În prisma patrulateră regulată $BCDEFGHI$ cu baza $BCDE$, $BD = 24$ cm, iar diagonala unei fețe laterale are lungimea de 26 cm. Calculați:
a) înălțimea prismei;
b) sinusul unghiului dreptelor EF și CH.

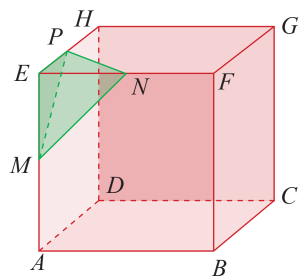
30 Un con circular drept are aria bazei de 64π cm^2 și aria totală 144π cm^2. Aflați volumul conului.

31 Un cilindru circular drept, are raza bazei egală cu r cm și înălțimea egală cu jumătate din lungimea cercului de bază. Calculați aria laterală și volumul cilindrului.

32 Se consideră cilindrul circular drept cu secțiunea axială $ABCD$ și punctul E mijlocul arcului $\overset{\frown}{CD}$. Aflați distanța dintre punctele A și E, măsurată pe suprafața laterală a cilindrului (figura alăturată), știind că lungimea cercului de bază este de 32 dm și înălțimea cilindrului de 7 dm.

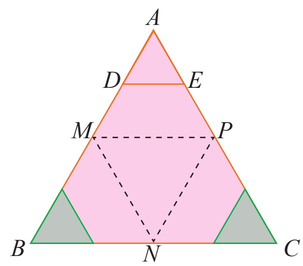


33 O piesă din metal are forma unui con circular drept cu raza bazei de 18 cm și înălțimea de 10 cm. Se topește piesa și din ea se confecționează o altă piesă sferică. Știind că prin prelucrare se pierde 10% din volum, calculați raza piesei sferice.



34 Un cub din lemn $ABCDEFGH$ are muchia de 24 cm, iar punctele M, N, P sunt mijloacele muchiilor EA, EF, respectiv EH.
a) Arătați că piramida $EMNP$ este piramidă regulată.
b) Dacă se îndepărtează piramida $EMNP$, calculați volumul corpului rămas.

35 O bucată de carton este suprafața unui triunghi echilateral ABC cu aria $64\sqrt{3}$ cm^2. Se împart laturile triunghiului în câte patru părți egale, notăm M, N, P mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC și se înlătură triunghiurile mici cu vârfurile B și C.
a) Arătați că suprafața rămasă poate fi desfășurarea unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată având baza mare triunghiul MNP.
b) Îndoim suprafața de carton rămasă după dreptele MN, NP, PM și DE, până când se formează o cutie având forma unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată. Aflați înălțimea cutiei.



36 Dintr-un bol în formă de semisferă cu raza de 15 cm se toarnă apă într-un vas cilindric gol, dimensiunile vasului cilindric fiind raza $R = 10$ cm și generatoarea $G = 25$ cm. Știind că apa din bol ocupă 75% din capacitatea acestuia și s-a turnat în vasul cilindric jumătate din cantitate, aflați înălțimea apei din vasul cilindric.

TEST FINAL 1 *Se acordă 10 puncte din oficiu.*

Subiectul I.

La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

5 p **1.** Numărul $\dfrac{\left|\sqrt{3}-2\right|}{2+\sqrt{3}}$ aparține intervalului:

A. $(-1; 0)$ B. $(0; 1)$ C. $(1; 2)$ D. $(1; +\infty)$

5 p **2.** Dacă $E(x) = (1 - x)(2 + x) + x$, atunci $E\left(\sqrt{2}\right)$ este:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

5 p **3.** Fie $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$. Simplificând raportul $\dfrac{4x^2+6x}{4x^2-9}$ se obține:

A. $-\dfrac{2}{2x-3}$ B. $-\dfrac{2}{2x+3}$ C. $-\dfrac{2x}{2x+3}$ D. $\dfrac{2x}{2x-3}$

5 p **4.** Pentru $x \neq 3$, rezultatul calculului $\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{3}{3-x}$ este:

A. 1 B. -1 C. x D. $-x$

5 p **5.** *ABCDEFGH* este un cub cu muchia de 9 cm. Distanța de la punctul *A* la dreapta *BH* este:

A. $6\sqrt{3}$ cm B. $3\sqrt{6}$ cm C. $4\sqrt{3}$ cm D. $4\sqrt{6}$ cm

5 p **6.** Suma muchiilor unui tetraedru regulat este 60 cm. Aria totală a tetraedrului este:

A. $100\sqrt{3}$ cm^2 B. $100\sqrt{3}$ cm^2 C. $100\sqrt{3}$ cm^2 D. $100\sqrt{3}$ cm^2

5 p **7.** Un cilindru circular drept și o sferă au razele egale și volumele egale cu 36π cm^3 . Înălțimea cilindrului este egală cu:

A. 4 cm B. 6 cm C. 8 cm D. 12 cm

5 p **8.** Secțiunea axială a unui con circular drept este suprafața unui triunghi dreptunghic cu aria 81 cm^2. Calculând volumul conului obținem:

A. 252π cm^3 B. 243π cm^3 C. 216π cm^3 D. 324π cm^3

Subiectul al II-lea.

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + a$, $a \in \mathbb{R}$.

5 p **a)** Pentru $a = 2$, trasați graficul funcției *f*.

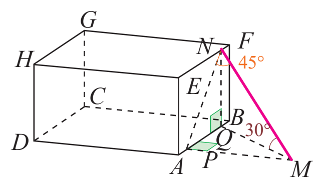
5 p **b)** Aflați numărul *a* știind că punctul $A(a, 8)$ este situat pe graficul funcției *f*.

5 p **c)** Calculați $a \cdot f(2) + (a - 1) \cdot f(-2)$

10 p **2.** Fie expresia $E(x) = \dfrac{(x+3)^2-2(x+1)-4}{x^2+3x}$, $x \in \mathbb{R}-\{-3, -1, 0\}$. Arătați că $E(x)$ este un număr rațional, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}-\{-3, -1, 0\}$.

Subiectul al III-lea.

1. Pentru a urca pe o clădire în formă de paralelipiped dreptunghic *ABCDEFGH*, un pompier se deplasează pe scara fixă *MN*, lungă de 24 m. Știind că dreapta *MN* face cu α, planul solului, un unghi de 30°, cu planul (*ABFE*) (al clădirii) un unghi de 45° și că planele α și (*ABFE*) sunt perpendiculare, se cer:



5 p **a)** distanța de la capătul *M* al scării la clădire;

10 p **b)** înățimea clădirii;

10 p **c)** dacă $P = pr_{(ABE)}M$ și $Q = pr_{\alpha}N$ calculați lungimea segmentului *PQ*.

TEST FINAL 2 *Se acordă 10 puncte din oficiu.*

Subiectul I.

La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

5 p **1.** Rezultatul calculului $\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(2x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right]:4^{-1}$ este:

A. $2x-3$ B. $2x+3$ C. $3x-2$ D. $3-2x$

5 p **2.** Ecuațiile $6x^2-x-1=0$ și $3x^2+a=0$ au o soluție comună pentru:

A. $a\in\left\{-\frac{3}{4};-\frac{1}{3}\right\}$ B. $a\in\left\{-\frac{4}{3};-3\right\}$ C. $a\in\left\{-\frac{3}{4};-3\right\}$ D. $a\in\left\{-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right\}$

5 p **3.** Cel mai mic număr întreg soluție a inecuației $-2x+\frac{1}{3}\le\frac{x}{-3}+\frac{1}{2}$ este:

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

5 p **4.** Reprezentarea grafică a funcției $f:[-2;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x-3$ este o semidreaptă închisă, cu originea A. Coordonatele punctului A sunt:

A. $(-1,-2)$ B. $(-2,-1)$ C. $(-1,2)$ D. $(-2,1)$

5 p **5.** Numărul planelor determinate de vârfurile unui pătrat și un punct exterior planului pătratului este:

A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

5 p **6.** $ABCDEFGH$ este un cub. Valoarea raportului $\frac{AG}{CH}$ este:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

5 p **7.** Volumul unui trunchi de piramidă este 93,6% din volumul piramidei din care provine trunchiul. Valoarea raportului dintre înălțimile celor două corpuri este:

A. 0,4 B. 0,2 C. 0,6 D. 0,8

5 p **8.** Dacă un cilindru circular drept are înălțimea egală cu o treime din lungimea diametrului bazei și diagonala secțiunii axiale de $2\sqrt{10}$ cm, atunci volumul cilindrului este egal cu:

A. 12π cm³ B. 18π cm³ C. 24π cm³ D. 16π cm³

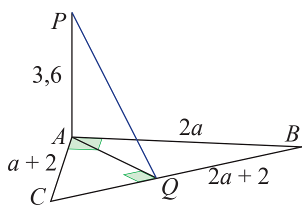
Subiectul al II-lea.

În următoarele reprezentări lungimile segmentelor sunt în cm. Rezolvați cerințele.

1. $PA\perp(ABC)$, $PA=3{,}6$ cm, $\sphericalangle BAC=90^\circ$, $AB=2a$, $BC=2a+2$, $AC=a+2$.

(5p) a) Aflați numărul a.

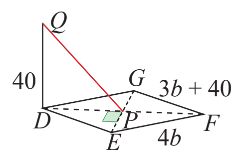
(10p) b) Calculați distanța de la punctul P la dreapta BC.



2. $DEFG$ este un pătrat, $QD\perp(DEG)$, $QD=40$ cm, $EF=4b$, $FG=3b+40$.

(5p) a) Aflați numărul b.

(5p) b) Calculați distanța de la punctul Q la dreapta EG.



Subiectul al III-lea.

1. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{3}{2}x+4$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-3$.

a) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

5 p p_1: „Punctul $P(4,-2)$ aparține graficului funcției f."

5 p p_2: „Punctul $Q(-\frac{1}{2}, 3)$ aparține graficului funcției g."

5 p p_3: „Punctul de intersecție a graficelor funcțiilor f și g este $M(2,1)$."

10 p **b)** Trasați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor f și g.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

Test 1 (pag. 9)

I. 1. A; 2. F; 3. A; 4. A; 5. F; 6. F; 7. F; 8. A. **II. 1.** Fie p prețul inițial. Atunci, $\frac{90}{100}\cdot(p-10)=27$. Se obține $p = 40$ (lei). **2.** $DE \parallel BC$ și $BD \parallel CE$. Rezultă că $BCED$ este paralelogram și DE = BC = 9 cm. În triunghiul CDE, $\sphericalangle CDE = 90°$, $CD = AB = 12$ cm, $DE = 9$ cm, rezultă $CE = 15$ cm. **III. 1. a)** $a = 1$. Ecuația devine $\frac{x+2}{3}-\frac{x-1}{4}=1$ și $S=\{1\}$. **b)** $x = 2$ este soluție, deci $\frac{4}{3}-\frac{2-1}{4}=1$, de unde $a=\frac{2}{3}$. **2. a)** $AO = BO$, deci O aparține mediatoarei segmentului AB. Segmentul TO intersectează AB în C și cercul în D. Atunci, $d(O, AB)$ $= OC = \frac{r}{2}$. Se obține $\sphericalangle AOC = 60°$. Cum ΔAOD și ΔBOD sunt echilaterale, obținem $\overset{\frown}{AB} = \sphericalangle AOB = 120°$; **b)** În triunghiul AOT, $AC \perp OT$, $C \in OT$ și $OA^2 = r^2$, iar $OC \cdot OT = \frac{r}{2}\cdot 2r = r^2$. Rezultă că $\sphericalangle OAT = 90°$ și în triunghiul dreptunghic AOT, obținem $AT = r\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ (cm). Din $\Delta AOT \equiv \Delta BOT$ (LUL), rezultă $\sphericalangle OBT = 90°$, deci $d(O, BT) = OB = r$, iar BT este tangentă la cerc.

Test 2 (pag. 10)

I. 1. 2; **2.** 150; **3.** 3; **4.** –3 și 3; **5.** 4,2 cm; **6.** 8 cm²; **7.** 20 cm; **8.** 18 cm. **II-lea. 1. a)** $\sqrt{n} \in M$ și $n = 10\cdot m + 4$, $m\in\mathbb{N}$. $4=10\cdot 0 + 4$ și $394 = 10\cdot 39 + 4$. Mulțimea M conține 40 de elemente. **b)** $\sqrt{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow n = k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Dar, $u(n) = 4 \Rightarrow u(k)\in\{2, 8\}$. Condiția este verificată de numerele 2^2, 8^2, 12^2, 18^2, iar $M \cap \mathbb{N} = \{2, 8, 12, 18\}$. **c)** În șirul de numere naturale 4, 14, 24, …, 394, doar patru sunt pătrate perfecte, deci mulțimea $M \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ conține 40–4=36 elemente. **2.** $AC = 2n$ și $BD = 2n + 2$, $n \in \mathbb{N}$. Fie $AC \cap BD=\{O\}$. Rezultă $AO = n$, $BO = n + 1$ și $\sphericalangle AOB = 90°$. În triunghiul AOB din $\text{tg}\sphericalangle ABD=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{n}{n+1}=\frac{3}{4}$, de unde $n = 3$. Atunci $AO = 3$ cm, $BO = 4$ cm și $AB = 5$ cm. **III. 1. a)** Din enunț, obținem: $|\sqrt{2}-a|+|b-\sqrt{3}|=0 \Leftrightarrow |\sqrt{2}-a|=|b-\sqrt{3}|=0 \Rightarrow a=\sqrt{2}$ și $b=\sqrt{3}$. **b)** $x = 2$ și $|y| = 7$. $S=\{(2, -7), (2,7)\}$. **2. a)** Fie $EF \perp CD$, $F\in CD$. Din triunghiul CEF se obține $CF = a\sqrt{10}$. **b)** $\mathcal{A}_{BCE} = \mathcal{A}_{AECD} \Leftrightarrow \frac{AE+CD}{2}\cdot AD=\frac{BE\cdot AD}{2}$. Rezultă $BE = AE + CD$ sau $b = 3\cdot a$. **c)** Fie $BM \perp CE$, $M \in CE$. Din $CE \cdot BM = BE \cdot AD$ se obține $BM = 3\sqrt{10}$ cm și apoi $CM = 3\sqrt{10}$ cm. Rezultă $\sphericalangle BCE = 45°$.

Test de autoevaluare INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$ (pag. 40)

Subiectul I. **1.** D; **2.** C; **3.** D; **4.** A; **5.** D; **6.** B; **7.** C; **8.** A.

Subiectul al II-lea. **1.** $|r-3| < 10 < r+3 \Rightarrow r \in \{8; 9; 10; 11; 12\}$. **2.** $M=\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ și $M \cap I$ conține doar numere consecutive având suma **5.** Există posibilitățile: 2 + 3 = 5, deci $M \cap (a; b) = \{2; 3\}$, rezultă $a = 1$, $b = 4$ sau –1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 5, deci $M \cap (a; b) = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$, rezultă $a = -2$, $b = 4$.

Subiectul al III-lea. 1. a) $B = [-3; -2)$; **b).** $A \cup B = [-3; -\frac{3}{2})$, $A \cap B = (-3; -2)$, $A \setminus B = [-2; -\frac{3}{2})$, $B \setminus A = \{-3\}$. **2. a)** $S_1 = (-\infty; \frac{1}{4})$, $S_2 = (\frac{1}{6}; +\infty)$; **b)** $S_1 \cap S_2 = (\frac{1}{6}; \frac{1}{4})$, $n \in \mathbb{N}$ și $\frac{1}{6}<\frac{1}{n}<\frac{1}{4}$. Rezultă $n = 5$.

Test autoevaluare CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$ (pag. 82)

Subiectul I. 1. A; **2.** B; **3.** D; **4.** A; **5.** C; **6.** C; **7.** B; **8.** C.

Subiectul al II-lea.1. a) $x = 2$; **b)** $x = 2$, $y = -\frac{3}{2}$.**2. a)** $F(a,b) = \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a+b+1)} = \frac{a+b}{a+b+1}$;

b) $a + b = \sqrt{3} - 1$ și $F = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$. **2. a)** $-\frac{3x^2}{1-x^2} = \frac{3x^2}{-(1-x^2)} = \frac{3x^2}{x^2-1}$; **b)** $E(x) = \frac{2x+1}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{4x^2-1} = \frac{x-1}{2x-1}$;

c) $2 \cdot \frac{n-1}{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} = 1 - \frac{1}{2n-1} \in \mathbb{Z}$. Se obține $n = 0$ și $n = 1$. Convine doar $n = 0$.

Test autoevaluare FUNCȚII (pag. 112)

Subiectul I. 1. C; **2.** B; **3.** C; **4.** A; **5.** D; **6.**A; **7.** B; **8.** A. **Subiectul al II-lea. 1. a)** $u = 4$; **b)** $v = -1$; **c)** $O(0, 0)$; **d)** $A(2, 4) \in d$, $B(2, -1) \in d'$; $OB^2 + OA^2 = AB^2 \Rightarrow OA \perp OB \Leftrightarrow d \perp d'$. **2. a)** Spațiile libere se completează cu: 240000; 264600; 277830; **b)** 1034430 autoturisme.

Test de autoevaluare ELEMENTE DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU (pag. 188)

Subiectul I. 1. F**; 2.** A**; 3.** A**; 4.** F**. Subiectul al II-lea. 1.** a. 4; b. 5; c. 3; d. 2.

Subiectul al III-lea. 1. a) desen; **b)** Fie $P = pr_{BD} A$. Se obține $pr_{(BDH)} AH = PH = 2\sqrt{30}$ cm;

c) $pr_{(ACD)} BH = BD$, ΔBDH este dreptunghic isoscel și $\sphericalangle(BH,(ACD)) = 45°$; **2. a)** MD este linie mijlocie în triunghiul ACE, deci $AE \parallel MD$; b) Luând P mijlocul muchiei BC, obținem $BE \parallel DP$ și $\sphericalangle(AD; BE) = \sphericalangle(AD; DP) = u$. $\sin u \cdot \cos u + \operatorname{tg} u = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Test autoevaluare ARII ŞI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

Subiectul I. 1. C; **2.** D; **3.** C; **4.** B; **5.** A; **6.** D; **7.** D; **8.** A

Subiectul al II-lea. 1. a) $h = 80$ m; **b)** $V_{baraj} = 3432 \cdot 10^3$ m^3.**2. a)** $H_{con} = 3{,}9 - 3{,}2 = 0{,}7$ m.
$V_{cort} = V_{cil} + V_{con} = \pi \cdot 2{,}4^2 \cdot 3{,}2 + \pi \cdot 2{,}4^2 \cdot 0{,}7 = 19{,}776\pi = 62{,}09$(m^3); **b)** Fie O centrul bazei cilindrului.
$d(E, O) = 4{,}8 = ED + DO = ED + 2{,}4$, deci $ED = 2{,}4$ (m). La fel $FC = 2{,}4$ (m). $\Delta ADE \equiv \Delta BCF$ (C. C).
Se obține $AE = BF = 4$. Lungimea frânghiei folosite este $2 \cdot 4$ m $= 8$ m. **3.** $R_1 = 9$ cm, $R_2 = 12$ cm și $A_1 + A_2 = A_3$.
Din egalitatea $4\pi R_1^2 + 4\pi R_2^2 = 4\pi R_3^2$, rezultă $R_3 = 15$ cm.

Test final 1

Subiectul I. 1. B; **2.** A; **3.** D; **4.** A; **5.** B; **6.** C; **7.** A; **8.** D. **Subiectul al II-lea. a)** grafic; **b)** $a = 2$; **c)** 3.

Subiectul al III-lea. a) $pr_{(ABE)} M = P$, rezultă $d(M, (ABE)) = MP$. $pr_{(ABE)} MN = PN$ și $\sphericalangle MNP = 45°$.

Se obține $MP = MN : \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ (cm); **b)** $pr_{\alpha} MN = MQ$ și $\sphericalangle NMQ = 30°$. Atunci $d_{clădire} = 12$ m;
c) În triunghiul NQP, $\sphericalangle NQP = 90°$, $NQ = 12$ m, $NP = 12$ m și aplicând teorema lui Pitagora, $PQ = 12$ m.

Test final 2

Subiectul I. 1. D; **2.** A; **3.** B; **4.** B; **5.** A; **6.** D; **7.** A; **8.** B. **Subiectul al II-lea. 1. a)** $a = 4$; **b)** $AQ = 4{,}8$ cm, $d(P, BC) = PQ = 6$ cm. **2.** $EF = FG$ și atunci $b = 40$ cm; **b)** $DP = 20$ cm, $d(Q, EG) = QP = 20$ cm.

Subiectul al III-lea. 1. a) p_1 : A; p_2: F; p_3 : A; **b)** desen.

Programa școlară poate fi accesată la adresa:
http://programe.ise.ro.

Manualul este prezentat în variantă tipărită și în variantă digitală.
Varianta digitală are un conținut similar celei tipărite.
În plus, cuprinde o serie de activități multimedia interactive de învățare (exerciții interactive, jocuri educaționale, animații, filme, simulări).

Tot ce e gândire corectă este sau matematică sau susceptibilă de matematizare. Învățând matematică înveți să gândești.

Grigore Moisil

Tradiție din 1989
www.litera.ro
ISBN 978-606-33-5481-6

LITERA