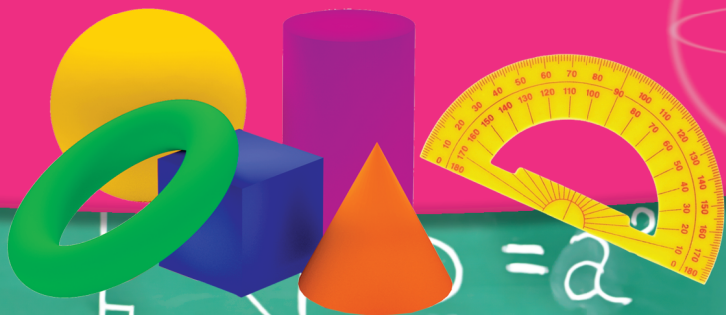


MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Mona MARINESCU • Ioan PELTEACU • Elefterie PETRESCU

Matematică

manual
pentru clasa
a V-a



$$a = a$$
$$P = 4a$$
$$= a$$

$$b_2$$

$$m = \frac{a+b}{2}$$



AROBS
Transilvania Software

**Acest manual este proprietatea
Ministerului Educației Naționale.**

Acest manual școlar este realizat în conformitate cu
Programa școlară aprobată prin OM nr. 3393/28.02.2017.

Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului educației naționale
nr. 5294/05.10.2017

**Numărul de telefon european de
asistență pentru copii:**



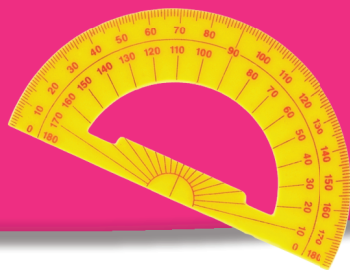
116.111

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Mona MARINESCU • Ioan PELTEACU • Eleferie PETRESCU

Matematică

manual
pentru clasa
a **V-a**



Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și în format digital.

Inspectoratul Școlar

Școala/Colegiul/Liceul

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*			
				format tipărit		format digital	
				la primire	la predare	la primire	la predare
1							
2							
3							
4							

*Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: **nou, bun, îngrijit, neîngrijit, deteriorat.**

- Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Referenți: Prof. gr. I Marian Voinea, Colegiul Național „Mihai Eminescu”, București
Prof. gr. I Florentin Vișescu, Colegiul Național „Mihai Eminescu”, București

Redactare: Dan-Sorin Manea
DTP: Claudiu Isopescul
Corectură: Eugenia Oprea
Culegere: Georgeta Haralambie
Ilustrații: Shutterstock.com

ISBN 978-606-706-631-9

Copyright © 2017 Aramis Print s.r.l. toate drepturile rezervate

Aramis Print s.r.l. • Redacția și sediul social: B-dul Metalurgiei nr. 46-56, cod 041833, sector 4, București, O.P. 82 – C.P. 38
Tel.: 021.461.08.10/14/15; fax: 021.461.08.09/19; e-mail: office@edituraaramis.ro; office@megapress.ro
Departamentul desfacere: tel.: 021.461.08.08/12/13/16; fax: 021.461.08.09/19; e-mail: desfacere@edituraaramis.ro
www.librariaaramis.ro
Tipărit la MEGApress

CUPRINS

Competențe generale și competențe specifice	5
Instrucțiuni de utilizare a manualului	8
<i>Ce știi? Cum știi? Cât știi?</i>	
<i>Test de evaluare inițială</i>	9
UNITATEA I Numere naturale	
1. Numere naturale	10
1.1 Scrierea și citirea numerelor naturale ..	10
1.2 Reprezentarea pe axă a numerelor naturale	13
1.3 Compararea și ordonarea numerelor naturale	16
1.4 Aproximări și estimări	18
2. Adunarea și scăderea	20
2.1 Suma a două sau mai multe numere naturale	20
2.2 Proprietăți ale adunării	20
2.3 Diferența a două numere naturale	23
3. Înmulțirea	26
3.1 Produsul a două numere naturale	26
3.2 Proprietăți ale înmulțirii	26
3.3 Factor comun	30
4. Împărțirea	33
4.1 Împărțirea cu rest 0 a numerelor naturale	33
4.2 Împărțirea cu rest a numerelor naturale	37
5. Recapitulare	41
5.1 Numere naturale și operații cu numere naturale	41
5.2 Exerciții și probleme cu numere naturale	42
<i>Ce știi? Cum știi? Cât știi?</i>	44
6. Ridicarea la putere	45
6.1 Puterea cu exponent natural a unui număr natural	45
6.2 Pătratul unui număr natural	47
6.3 Reguli de calcul cu puteri	50
6.4 Compararea puterilor	52
6.5 Scrierea numerelor naturale în baza 10	55
6.6 Scrierea numerelor naturale în baza 2	56
7. Ordinea efectuării operațiilor și utilizarea parantezelor	58
7.1 Ordinea efectuării operațiilor	58
7.2 Folosirea parantezelor rotunde, pătrate și acolade	59
8. Metode aritmetice de rezolvare a problemelor	62
8.1 Metoda reducerii la unitate	62
8.2 Metoda comparației	62
8.3 Metoda figurativă	64
8.4 Metoda mersului invers	65
8.5 Metoda falsei ipoteze	66
9. Divizibilitatea numerelor naturale	69
9.1 Divizor, multiplu	69
9.2 Divizori comuni	71
9.3 Multipli comuni	72
10. Criterii de divizibilitate	74
10.1-10.3 Criteriile de divizibilitate cu: 2, 5 și 10^n	74
10.4-10.5 Criteriile de divizibilitate cu 3 și 9	77
10.6 Numere prime, numere compuse	79
11. Recapitulare	82
11.1 Ridicarea la putere	82
11.2 Metode aritmetice de rezolvare a problemelor	83
11.3 Divizibilitatea numerelor	84
<i>Ce știi? Cum știi? Cât știi?</i>	85
UNITATEA II Frații. Numere raționale	
12. Frații ordinare	86
12.1 Frații echiunitare, subunitare, supraunitare. Scriere procentuală	86
12.2 Frații echivalente	89
13. Amplificarea și simplificarea fracțiilor	91
13.1 Amplificarea fracțiilor	91
13.2 Cel mai mare divizor comun	93
13.3 Simplificarea fracțiilor	96
14. Aducerea fracțiilor la un numitor comun	99
14.1 Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale	99
14.2 Aducerea fracțiilor la cel mai mic numitor comun	102
15. Compararea fracțiilor	105
15.1 Compararea fracțiilor cu același numitor/numărător	105
15.2 Reprezentarea pe axa numerelor a unei fracții ordinare	107
16. Introducerea și scoaterea întregilor dintr-o fracție	110
17. Adunarea și scăderea fracțiilor	112
17.1 Suma și diferența fracțiilor cu același numitor	112
17.2 Suma și diferența fracțiilor cu numitori diferiți	116
18. Înmulțirea și împărțirea fracțiilor	118
18.1 Produsul fracțiilor	118
18.2 Puterea cu exponent natural a unei fracții ordinare	122
18.3 Împărțirea fracțiilor ordinare	125

19. Aflarea unei fracții sau procent dintr-un număr sau fracție	127
19.1 Aflarea unei fracții dintr-un număr sau fracție	127
19.2 Procente	131
20. Recapitulare	133
Operații cu fracții	133
<i>Ce știi? Cum știi? Cât știi?</i>	134
21. Frații zecimale	135
21.1 Scrierea și citirea fracțiilor zecimale ...	135
21.2 Scrierea în formă zecimală a fracțiilor ordinare care au numitorul o putere a lui 10	138
21.3 Transformarea unei fracții zecimale în fracție ordinară	139
22. Aproximări	140
22.1 Aproximarea prin lipsă sau adaos ...	140
22.2 Rotunjiri	142
22.3 Compararea și ordonarea fracțiilor zecimale	143
22.4 Reprezentarea pe axa numerelor a unor fracții zecimale	144
23. Adunarea și scăderea numerelor zecimale	145
24. Înmulțirea fracțiilor zecimale	148
24.1 Produsul fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule	148
24.2 Puteri cu exponent număr natural ...	152
25. Împărțirea	153
25.1 Împărțirea a două numere naturale cu rezultat fracție zecimală; transformări	153
25.2 Media aritmetică a două sau a mai multor numere naturale ..	155
25.3 Împărțiri care au ca rezultate numere zecimale periodice	156
25.4 Împărțirea unui număr zecimal cu un număr finit de zecimale nenule la un număr natural nenul	157
25.5 Împărțirea a două numere zecimale finite	159
<i>Ce știi? Cum știi? Cât știi?</i>	160
26. Exprimarea unui număr zecimal periodic printr-o fracție ordinară	161
27. Număr rațional pozitiv. Ordinea efectuării operațiilor	162
28. Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții	164
29. Probleme de organizare a datelor	167
30. Recapitulare	169
Operații cu numere zecimale	169
<i>Ce știi? Cum știi? Cât știi?</i>	170
UNITATEA III Elemente de geometrie și unități de măsură	
31. Punct, dreaptă, plan, semiplan, semidreaptă, segment	171
32. Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă; puncte coliniare	176
33. Pozițiile relative a două drepte: drepte concurente și drepte paralele	179
34. Distanța dintre două puncte; lungimea unui segment	182
35. Segmente congruente (construcție); mijlocul unui segment; simetricul unui punct față de un alt punct	185
36. Unghi: definiție, notații, elemente, interiorul unui unghi, exteriorul unui unghi	188
37. Măsura unui unghi, unghiuri congruente (măsurarea și construcția cu raportorul) 191	
38. Clasificări de unghiuri: unghi drept, unghi ascuțit, unghi obtuz, unghi nul, unghi alungit	193
39. Calcule cu măsuri de unghiuri exprimate în grade și minute sexagesimale	196
40. Figuri congruente; axa de simetrie	199
41. Unități de măsură pentru lungime, transformări; aplicație: perimetre	202
42. Unități de măsură pentru arie, transformări; aplicații: aria pătratului și dreptunghiului	205
43. Unități de măsură pentru volum, transformări; aplicații: volumul cubului și paralelipipedului dreptunghic	209
44. Recapitulare	213
Elemente de geometrie și unități de măsură	213
<i>Ce știi? Cum știi? Cât știi?</i>	216
45. Recapitulare finală	217
45.1 Numere naturale	217
45.2 Frații ordinare. Frații zecimale	218
45.3 Elemente de geometrie și unități de măsură	219
<i>Ce știi? Cum știi? Cât știi?</i>	
<i>Teste de evaluare finală</i>	220
Anexă: Tabel cu numerele prime și pătrate perfecte până la 1000. Unități de măsură uzuale. Arii, perimetre și volume. Reguli de calcul cu puteri	223
Termeni matematici utilizați în manual	224

Competențe generale și competențe specifice

Competențe generale și competențe specifice	Conținuturi ale învățării	Titlurile lecțiilor
<p>1.1. Identificarea numerelor naturale în contexte variate</p> <ul style="list-style-type: none"> - Scrierea și citirea numerelor naturale în sistemul de numerație zecimal - Identificarea unor numere naturale într-o diagramă, într-un grafic sau într-un tabel care conține date referitoare la o situație practică - Identificarea unui număr natural pe baza unor condiții impuse cifrelor sale <p>2.1. Identificarea unei metode aritmetice adecvate pentru rezolvarea unei probleme date</p> <p>2.1. Efectuarea de calcule cu numere naturale folosind operațiile aritmetice și proprietățile acestora</p> <ul style="list-style-type: none"> - Efectuarea operațiilor aritmetice cu numere naturale - Efectuarea de calcule utilizând factorul comun - Efectuarea operațiilor cu puteri utilizând regulile de calcul specifice - Reprezentarea datelor dintr-o problemă, în vederea aplicării unei metode aritmetice adecvate <p>3.1. Utilizarea regulilor de calcul pentru efectuarea operațiilor cu numere naturale și pentru divizibilitate</p> <ul style="list-style-type: none"> - Utilizarea algoritmului împărțirii, cu restul egal sau diferit de zero, în cazul în care delimpărțitul și împărțitorul au una sau mai multe cifre - Aproximarea/estimarea rezultatelor obținute prin utilizarea algoritmului împărțirii - Calcularea unor expresii numerice care conțin paranteze (rotunde, pătrate și acolade), cu respectarea ordinii efectuării operațiilor - Aplicarea metodelor aritmetice pentru rezolvarea unor probleme cu numere naturale - Determinarea unui număr natural pe baza unor condiții impuse cifrelor sale (de exemplu, determinați numerele de forma $a2b5$, știind că produsul cifrelor sale este 120) <p>4.1. Exprimarea în limbaj matematic a unor proprietăți referitoare la comparații, aproximări, estimări și ale operațiilor cu numere naturale</p> <ul style="list-style-type: none"> - Reprezentarea pe axa numerelor a unui număr natural, utilizând compararea și ordonarea numerelor naturale - Justificarea estimărilor rezultatelor unor calcule cu numere naturale - Justificarea scrierii unui număr natural dat sub formă de putere cu baza sau exponential indicat <p>5.1. Analizarea unor numere naturale de două cifre ca produs de numere prime pentru a verifica validitatea unor calcule</p> <ul style="list-style-type: none"> - Evidențierea avantajelor folosirii proprietăților operațiilor cu numere naturale în diferite contexte - Analizarea faptului că un număr este sau nu pătratul unui număr natural (utilizând ultima cifră, încadrarea între pătratele a două numere naturale consecutive) - Determinarea unor numere naturale care respectă anumite condiții (de exemplu, determinați numerele prime a și b, știind că $3a + 2b = 16$) - Compararea a două numere naturale scrise sub formă de puteri folosind aducerea la aceeași bază sau la același exponent - Aplicarea criteriilor de divizibilitate a numerelor naturale pentru situații cotidiane - Estimarea ordinului de mărime a numerelor de forma 2^n, pornind de la probleme practice (de exemplu, țoi de hârtie îndoite consecutiv, povestea tablei de șah) - Realizarea unor estimări utilizând procente (de exemplu, cunoscând numărul elevilor de gimnaziu dintr-un oraș și faptul că aproximativ 2% dintre aceștia studiază un instrument muzical, estimați numărul de elevi de gimnaziu care studiază un instrument muzical) - Stabilirea valorii de adevăr a unui enunț matematic cu numere naturale, folosind metode aritmetice <p>6.1. Modelarea matematică, folosind numere naturale, a unei situații date, rezolvarea problemei obținute prin metode aritmetice și interpretarea rezultatului</p> <ul style="list-style-type: none"> - Modelarea unor probleme practice utilizând metode aritmetice (metoda reducerii la unitate, metoda comparației, metoda figurativă, metoda mersului invers etc.) - Evidențierea unor situații în care metoda de rezolvare propusă este aplicată încorect - Exemplificarea, folosind gândirea critică, a unor probleme cu date insuficiente, a unor probleme cu date contradictorii etc. - Formularea unei probleme pe baza unei scheme sau reguli date și rezolvarea acesteia prin metode aritmetice (metoda reducerii la unitate, metoda comparației, metoda figurativă, metoda mersului invers etc.) 	<p>1. NUMERE NATURALE</p> <p>Operații și citirea numerelor naturale;</p> <ul style="list-style-type: none"> • Scrierea și citirea numerelor naturale; reprezentarea pe axa numerelor; compararea și ordonarea numerelor naturale; aproximări, estimări • Adunarea numerelor naturale, proprietăți; scăderea numerelor naturale • Înmulțirea numerelor naturale, proprietăți; factor comun • Împărțirea cu rest 0 a numerelor numerelor naturale • Puterea cu exponent natural a unui număr natural; pătratul unui număr natural; reguli de calcul cu puteri; compararea puterilor; scrierea în baza 10; scrierea în baza 2 (fără operații) • Ordinea efectuării operațiilor; utilizarea parantezelor: rotunde, pătrate și acolade • Metode aritmetice de rezolvare a problemelor: metoda reducerii la unitate, metoda comparației, metoda figurativă, metoda mersului invers, metoda falsei ipoteze <p>Divizibilitatea numerelor naturale</p> <ul style="list-style-type: none"> • Divizibilitatea numerelor naturale; divisor; multiplu, divizori comuni; multipli comuni • Criterii de divizibilitate cu: 2, 5, 10ⁿ, 3 și 9; numere prime; numere compuse 	<p>Ce știu? Cum știu? Cât știu? Test de evaluare inițială</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Numere naturale <ul style="list-style-type: none"> - Scrierea și citirea numerelor naturale - Reprezentarea numerelor naturale pe axa numerelor - Compararea și ordonarea numerelor naturale; - Aproximări și estimări 2. Adunarea și scăderea <ul style="list-style-type: none"> - Suma a două sau mai multe numere naturale - Proprietăți ale adunării - Diferența a două numere naturale 3. Înmulțirea <ul style="list-style-type: none"> - Produsul a două numere naturale - Proprietăți ale înmulțirii 4. Factor comun <ul style="list-style-type: none"> - Factor comun - Împărțirea - Împărțirea cu rest 0 a numerelor naturale - Împărțirea cu rest a numerelor naturale 5. Recapitulare <ul style="list-style-type: none"> - Numere naturale și operații cu numere naturale - Exerciții și probleme cu numere naturale - Ce știu? Cum știu? Cât știu? 6. Ridicarea la putere <ul style="list-style-type: none"> - Puterea cu exponent natural a unui număr natural - Pătratul unui număr natural - Reguli de calcul cu puteri - Compararea puterilor - Scrierea în baza 10 7. Ordinea efectuării operațiilor și utilizarea parantezelor <ul style="list-style-type: none"> - Ordinea efectuării operațiilor - Folosirea parantezelor rotunde, pătrate și acolade 8. Metode aritmetice de rezolvare a problemelor <ul style="list-style-type: none"> - Metoda reducerii la unitate - Metoda comparației - Metoda figurativă - Metoda mersului invers - Metoda falsei ipoteze 9. Divizibilitatea numerelor naturale <ul style="list-style-type: none"> - Divizor, multiplu - Divizori comuni - Multipli comuni 10. Criterii de divizibilitate <ul style="list-style-type: none"> - Criteriile de divizibilitate cu: 2, 5 și 10ⁿ - Criteriile de divizibilitate cu 3 și 9 - Numere prime, numere compuse 11. Recapitulare <ul style="list-style-type: none"> - Ridicarea la putere - Divizibilitate - Exerciții și probleme - Ce știu? Cum știu? Cât știu?

Competențe generale și competențe specifice

- 1.2. Identificarea fracțiilor ordinare sau zecimale în contexte variate**
 - Utilizarea unor reprezentări grafice variate pentru ilustrarea fracțiilor echivalente, subunitare, supraunitare
 - Verificarea echivalenței a două fracții prin diferite reprezentări
 - Scrierea unui procent sub formă de fracție ordinară (de exemplu, 20% se scrie $\frac{20}{100}$)
2.2. Efectuarea de calcule cu fracții folosind proprietăți ale operațiilor aritmetice
 - Introducerea și scoaterea întregilor dintr-o fracție ordinară
 - Înmulțirea și împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule cu 10, 100, 1000
 - Scrierea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule ca un produs dintre un număr zecimal și o putere a lui 10; scrierea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule ca un cât dintre un număr zecimal și o putere a lui 10
 - Calcularea unei fracții echivalente cu o fracție dată, prin amplificarea sau simplificarea
 - Simplificarea unei fracții ordinare în vederea obținerii unei fracții ireductibile (prin simplificări succesive, dacă este cazul)
 - Efectuarea de operații cu numere raționale exprimate sub formă de fracție zecimală și/sau ordinară
3.2. Utilizarea de algoritmi pentru efectuarea operațiilor cu fracții ordinare sau zecimale
 - Aplicarea algoritmilor de împărțire a unei fracții zecimale la un număr natural sau la o fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule
 - Transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale și invers
4.2. Utilizarea limbajului specific fracțiilor/procentelor în situații date
 - Încadrarea unei fracții zecimale între două numere naturale consecutive
 - Utilizarea limbajului specific pentru determinarea unei fracții dintr-un număr natural n , multiplu al numitorului fracției
 - Utilizarea limbajului adecvat pentru exprimarea unor transformări monetare (inclusiv schimburi valutare)
5.2. Analizarea unor situații date în care intervin fracții pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule
 - Reprezentarea pe axa numerelor a fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule folosind aproximarea acestora
 - Analizarea unor scheme, modele sau algoritmi pentru rezolvarea unor probleme practice care implică utilizarea operațiilor cu fracții ordinare sau zecimale și ordinea efectuării operațiilor
 - Evidențierea, pe cazuri concrete, a relației dintre volum și capacitate
 - Estimarea măsurilor unor mărimi caracteristice ale unor obiecte din mediul înconjurător (capacitate, masă, preț)
 - Estimarea mediei unui set de date; compararea estimării cu valoarea determinată prin calcule
6.2. Reprezentarea matematică, folosind fracțiile, a unei situații date, în context intra și interdisciplinar (geografie, fizică, economie etc.)
 - Formularea unor probleme cu fracții, pe baza unor scheme sau reguli date și rezolvarea acestora prin metode aritmetice (metoda reducerii la unitate, metoda comparației, metoda mersului invers etc.)
 - Argumentarea datelor statistice folosind softuri matematice
 - Argumentarea demersului de rezolvare a unei probleme pornind de la un set de informații cu caracter cotidian sau științific (fizic, economic etc.)

Conținuturi ale învățării

- 2. FRAȚII ORDINARE. FRAȚII ZECIMALE**
Fracții ordinare
 • Fracții ordinare; fracții subunitare, echivalente, supraunitare; procente; fracții echivalente (prin reprezentări)
 • Compararea fracțiilor cu același numitor/numărător; reprezentarea pe axa numerelor a unei fracții ordinare
 • Introducerea și scoaterea întregilor dintr-o fracție
 • Cel mai mare divizor comun a două numere naturale (fără algoritmi); amplificarea și simplificarea fracțiilor; fracții ireductibile
 • Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale (fără algoritmi); aducerea fracțiilor la un numitor comun
 • Adunarea și scăderea fracțiilor
 • Înmulțirea fracțiilor; puteri; împărțirea fracțiilor
 • Fracții/procente dintr-un număr natural sau dintr-o fracție ordinară
Fracții zecimale
 • Fracții zecimale; scrierea fracțiilor ordinare cu numitori puteri ale lui 10 sub formă de fracții zecimale; transformarea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule în fracție ordinară
 • Aproximări; compararea, ordonarea și reprezentarea pe axa numerelor a unor fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule
 • Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule
 • Înmulțirea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule; puteri cu exponent număr natural
 • Împărțirea a două numere naturale cu rezultat fracție zecimală; aplicație: media aritmetică a două sau mai multor numere naturale; transformarea unei fracții ordinare într-o fracție zecimală; periodicitate
 • Împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule la un număr natural nenul; împărțirea a două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule
 • Transformarea unei fracții zecimale periodice în fracție ordinară
 • Număr rațional pozitiv; ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive
 • Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții în care intervin și unități de măsură pentru lungime, arie, volum, capacitate, masă, timp și unități monetare
 • Probleme de organizare a datelor; frecvență; date statistice organizate în tabele, grafice cu bare și/sau cu linii; media unui set de date statistice

Titlurile lecțiilor

12. Frații ordinare
 - Fracții echivalente, subunitare, supraunitare. Scriere procentuală
 - Fracții echivalente
 13. Amplificarea și simplificarea fracțiilor
 - Amplificarea fracțiilor
 - Cel mai mare divizor comun
 - Simplificarea fracțiilor
 14. Aducerea fracțiilor la un numitor comun
 - Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale
 - Aducerea fracțiilor la cel mai mic numitor comun
 15. Compararea fracțiilor
 - Compararea fracțiilor cu același numitor/numărător
 - Reprezentarea pe axa numerelor a unei fracții ordinare
 16. Introducerea și scoaterea întregilor dintr-o fracție
 17. Adunarea și scăderea fracțiilor
 - Suma și diferența fracțiilor cu același numitor
 - Suma și diferența fracțiilor cu numitori diferiți
 18. Înmulțirea și împărțirea numerelor fracționare
 - Înmulțirea numerelor fracționare
 - Puterea cu exponent natural a unui număr fracționar
 - Împărțirea numerelor fracționare
 19. Afișarea unei fracții sau procent dintr-un număr sau fracție
 20. Recapitulare
 - Operații cu fracții ordinare
 - Ce știu? Cum știu? Cât știu?
 21. Numere zecimale
 - Scrierea și citirea numerelor zecimale
 - Scrierea în forma zecimală a fracțiilor ordinare care au numitorul o putere a lui 10
 - Transformarea unui număr zecimal în fracție ordinară
 22. Aproximări
 - Aproximări prin lipsă sau adăos; rotunjiri
 - Compararea, ordonarea și reprezentarea pe axa numerelor a unor fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule
 23. Adunarea și scăderea numerelor zecimale
 - Suma și diferența fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule
 24. Înmulțirea numerelor zecimale
 - Produsul fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule
 - Puteri cu exponent număr natural
 25. Împărțirea
 - Împărțirea a două numere naturale cu rezultat număr zecimal finit
 - Aplicație: media aritmetică a două sau mai multor numere naturale;
 - Transformarea unei fracții ordinare într-o fracție zecimală; periodicitate
 - Împărțirea unui număr zecimal cu un număr finit de cifre nenule la un număr natural nenul
 - Împărțirea a două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule
 - Ce știu? Cum știu? Cât știu?
 26. Exprimarea unei fracții zecimale periodice în fracție ordinară
 27. Număr rațional pozitiv; ordinea efectuării operațiilor
 28. Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții
 - Probleme cu fracții în care intervin și unități de măsură pentru lungime, arie, volum, capacitate, masă, timp și unități monetare
 29. Probleme de organizare a datelor - Date statistice organizate în tabele, grafice cu bare și/sau cu linii
 - Frecvență
 - Media unui set de date statistice
 30. Recapitulare
 - Operații cu numere zecimale
 - Exerciții și probleme
 - Ce știu? Cum știu? Cât știu?

Competențe generale și competențe specifice

1.3. Identificarea noțiunilor geometrice elementare și a unităților de măsură în diferite contexte

- Observarea unor figuri geometrice pe modele fizice/desene
- Descrierea și identificarea unor elemente ale figurilor și ale corpurilor geometrice
- Identificarea unor segmente congruente sau unghiuri congruente în configurații cu axe de simetrie
- Alegerea unității de măsură pentru estimarea lungimilor/distanțelor, arilor și volumelor în diferite situații practice

2.3. Utilizarea instrumentelor geometrice pentru a măsura sau pentru a construi configurații geometrice

- Construcția unor figuri geometrice cu dimensiuni date
- Măsurarea unor lungimi pe modele sau obiecte din realitatea înconjurătoare (utilizând instrumente de măsură adecvate)
- Aplicarea unor metode practice pentru măsurarea perimetrelor pe modele sau obiecte din realitatea înconjurătoare
- Construcția unor segmente congruente și a unor unghiuri congruente
- Reprezentarea prin desen a unor configurații geometrice (drepte paralele, drepte perpendiculare, unghiuri de măsură dată etc.)
- Măsurarea cu raportorul a unui unghi dat

3.3. Determinarea perimetrelor, a arilor (pătrat, dreptunghi) și a volumelor (cub, paralelipiped dreptunghic) și exprimarea acestora în unități de măsură corespunzătoare

- Transformări ale unităților de măsură standard folosind fracții zecimale
 - Calcularea perimetrului unei figuri geometrice, evidențind intuitiv perimetrul
 - Operații cu măsuri de unghiuri (limitate numai la grade și minute sexagesimale)
 - Determinarea volumului unui cub, al unui paralelipiped dreptunghic, utilizând rețeaua de cuburi cu lungimea muchiei egală cu 1, și deducerea formulei de calcul
 - Aplicarea formulei pentru calculul volumului unui cub și a unui paralelipiped dreptunghic
- ### 4.3. Transpunerea în limbaj specific a unor probleme practice referitoare la perimetre, arii, volume, utilizând transformarea convenabilă a unităților de măsură
- Compararea unor distanțe/lungimi, perimetre, arii și volume exprimate prin unități de măsură diferite
 - Descrierea unor reprezentări geometrice în situații practice/aplicative (de exemplu, realizarea planului clasei, al curții școlii prin metoda proiectului)
 - Descrierea metodelor utilizate pentru verificarea coliniarității unor puncte date (de exemplu, cu măsuri de unghiuri, cu lungimi de segmente)

5.3. Interpretarea prin recunoașterea elementelor, a măsurilor lor și a relațiilor dintre ele, a unei configurații geometrice dintr-o problemă dată

- Estimarea sau determinarea arilor unor suprafețe în contexte reale, utilizând caroiaje/pavaje
- Estimarea ariei unei piese de pavaj atunci când cunoaștem aria suprafeței și numărul de piese
- Estimarea mărимii unor caracteristici (lungime, arie, volum) ale unor obiecte din mediul înconjurător
- Determinarea prin pliere a axelor de simetrie pentru pătrat, dreptunghi
- Estimarea capacității unui vas prin raportare la capacitatea altui vas (activitate practică sau lectii demonstrative utilizând calculatorul)

6.3. Analizarea unor probleme practice care includ elemente de geometrie studiate, cu referire la unități de măsură și la interpretarea rezultatelor

- Alegerea unui etalon adecvat pentru activități practice referitoare la lungimi/arii/volume/capacități
- Stabilirea unor legături, în contexte reale, între diferite tipuri de măsurători (de exemplu: determinarea indicelui de masă corporală, determinarea cantității de apă care se acumulează într-un vas în timp dat)
- Aplicarea în situații practice a elementelor de geometrie, pentru a obține un răspuns la o problemă deschisă (de exemplu, utilizarea unor metode personale pentru transpunerea unui model geometric dat pe hârtie la suprafețe mari: rond de flori, mozaic, mandala) sau pentru a realiza estimări (de exemplu, determinarea numărului de portocale care încap într-o cutie cubică imaginată cu latura de 100 metri)
- Modelarea unei situații date, referitoare la segmente, figuri congruente, mijlocul unui segment și simetrul unui punct față de un punct, prin transpunerea acestora din contextul dat în limbaj specific matematicii

Conținuturi ale învățării

3. ELEMENTE DE GEOMETRIE ȘI UNITĂȚI DE MĂSURĂ

- Punct, dreaptă, plan, semiplan, semidreaptă, segment (descriere, reprezentare, notații)
- Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă; puncte coliniare; „prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una”;
- Două puncte distincte trace o dreaptă și numai una”;
- Pozițiile relative a două drepte: drepte concurente, drepte paralele
- Distanța dintre două puncte; lungimea unui segment; segmente congruente (construcție); mijlocul unui segment; simetrul unui punct față de un punct
- Unghi: definiție, notații, elemente; interiorul unui unghi, exteriorul unui unghi
- Măsura unui unghi, unghiuri congruente (măsurarea și construcția cu raportorul); clasificări de unghiuri: unghi drept, unghi ascuțit, unghi obtuz; unghi nul, unghi alungit
- Calcule cu măsuri de unghiuri exprimate în grade și minute sexagesimale
- Figuri congruente; axa de simetrie (prin suprapunere)
- Unități de măsură pentru lungime, arie, volume; unități de măsură pentru arie, aplicatii: aria pătratului/dreptunghiului; unități de măsură pentru volum, aplicatii: volumul cubului și al paralelipipedului dreptunghic; transformări ale unităților de măsură

Titlurile lecțiilor

1. Punct, dreaptă, plan
2. Pozițiile relative ale punctelor și dreptelor în plan
3. Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă;
4. Puncte coliniare; „prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una”;
5. Pozițiile relative a două drepte: drepte concurente și drepte paralele
6. Distanța dintre două puncte; lungimea unui segment
7. Segmente congruente (construcție); mijlocul unui segment; simetrul unui punct față de un alt punct
8. Unghi: definiție, notații, elemente; interiorul unui unghi, exteriorul unui unghi (raportorul)
9. Măsura unui unghi, unghiuri congruente (măsurarea și construcția cu raportorul)
10. Clasificări de unghiuri: unghi drept, unghi ascuțit, unghi obtuz, unghi nul, unghi alungit
11. Calcule cu măsuri de unghiuri
12. Transformări de măsuri de unghiuri
13. Calcule cu măsuri de unghiuri exprimate în grade și minute sexagesimale
14. Figuri congruente; axa de simetrie
15. Unități de măsură pentru lungime, transformări; aplicație: perimetre dreptunghiului
16. Unități de măsură pentru arie, transformări; aplicații: aria pătratului și paralelipipedului dreptunghic
17. Unități de măsură pentru volum, transformări; aplicații: volumul cubului și paralelipipedului dreptunghic
18. Recapitulare
19. Elemente de geometrie și unități de măsură
20. Segmente, distanțe și unghiuri
21. Unități de măsură
22. Perimetre, arii și volume
23. Ce știu? Cum știu? Cât știu?
24. Recapitulare finală
25. Numere naturale
26. Frații ordinare și zecimale
27. Elemente de geometrie și unități de măsură
28. Exerciții și probleme
29. Ce știu? Cum știu? Cât știu? Teste finale
30. Anexă
31. Tabel cu numerele prime și pătrate perfecte până la 1000;
32. Reguli de calcul cu puteri
33. Unitățile de măsură uzuale;
34. Arii, perimetre și volume;
35. Termeni matematici utilizați în manual

Instrucțiuni de utilizare a manualului

Titlu de lecție

2. Adunarea și scăderea

2.1 Suma a două sau mai multe numere naturale

IMI AMINTESC!

In cursul anului școlar, clasele a V-a, A, B și C au colectat hârtie pentru a fi reciclată. Clasa a V-a a strâns 329 kg, a V-a B 189 kg și a V-a C 1 790 kg. Ce cantitate de hârtie au strâns cele trei clase?

Rezolvare: Pentru a afla cantitatea de hârtie colectată, adunăm:

$$\begin{array}{r} 1\ 790 + 189 + 329 = 2\ 308 \\ 1\ 790 \\ 189 \\ 329 \\ \hline 2\ 308 \end{array}$$

Calculul se efectuează ca în tabel.

Răspuns: cele trei clase au strâns 2 308 kg.

2.2 Proprietăți ale adunării

ÎNȚELEG

Câtă hârtie au strâns clasele a V-a B și a V-a C?

189 + 329 = 518 sau 329 + 189 = 518

Dacă schimbăm locul termenilor într-o adunare suma nu se schimbă. Spunem că adunarea este **comutativă**: $a + b = b + a$, oricare ar fi numerele naturale a și b .

A comuta înseamnă a schimba locul sau poziția.

Dacă asociem sau grupăm câte doi termeni ai unei adunări de mai mulți termeni suma nu se schimbă. Spunem că adunarea este **asociativă**. $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi numerele naturale a , b și c .

Dacă adunăm un număr natural cu zero suma nu se schimbă. Spunem că zero este **element neutru** pentru adunare. $0 + a = a + 0 = a$, oricare ar fi numărul natural a .

Videoclip în varianta digitală

Secvență de învățare/lucru cu nivel de dificultate mai ridicat

- Pot mai mult
- Sunt campion

EXERSEZ

1. Alegeti totalul corect:

a) $23 + 167 = 180$ b) $245 + 389 = 524$ c) $478 + 324 = 802$ d) $1\ 457 + 27\ 809 = 29\ 266$

e) $200\ 836 + 1\ 004\ 609 = 1\ 305\ 445$ f) $1\ 234 + 57 + 234\ 709 = 236\ 000$

g) $1\ 234 + 507 + 3\ 234\ 709 = 3\ 236\ 446$ h) $1\ 234 + 507 + 3\ 234\ 709 = 3\ 236\ 446$

2. Cu datele din tabel exprimate în kilograme, calculați câtă hârtie au colectat cele patru clase împreună.

	a V-a A	a V-a B	a V-a C	a V-a D
Sem. I	294	1 067	762	1 149
Sem. II	384	678	1 134	1 083
Total	?	?	?	?

3. Efectuați sumele:

a) $36 + 21 + 10$; b) $608 + 234$; c) $1\ 089\ km + 34\ km + 290\ km$;
d) $35\ 879 + 20\ 067$; e) $123\ 980\ km + 45\ 897\ km$; f) $1\ 209\ 675 + 497\ 000$;
g) $1\ 457\ dag + 27\ 809\ dag$; h) $1\ 234 + 507 + 3\ 234\ 709$; i) $MCMXXXIX + CDXLIV$.

Secvență de lucru

- Aplic
- Exerseze
- Activitate practică
- Activitate în echipă

EXERSEZ

1) Scrieți descompunerile în baza 10 a numerelor: 128; 2 198; 34 098; 180 974; 2 384 591; 1 000 101.

2) Periviți numerele scrise în baza 10 cu echivalentele lor scrise în baza 2:

1101	1001	1000	1111	1010
5	15	10	9	13

3) Alegeti valoarea în baza 10 a numerelor:

a) $10\ 010_{(2)} = 14_{(10)}$ b) $10\ 000_{(2)} = 16_{(10)}$ c) $10\ 010\ 111_{(2)} = 144_{(10)}$ d) $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 30_{(10)}$ e) $111\ 000\ 110\ 010_{(2)} = 3634_{(10)}$ f) $123_{(10)} = 291_{(2)}$

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

1. Găsiți egalițele adevărate din tabel, numerele fiind scrise în baza 2, respectiv 10.

101 = 7	100 = 8	1 000 = 16
101 = 5	10 = 4	1 000 = 8
1 010 = 18	10 = 2	1 111 = 13
111 = 7	1 111 = 30	1 011 = 22
10 = 5	1 111 = 15	1 001 = 18

2. Descompuneți în mai multe moduri ca sumă de puteri ale bazei 10, numerele: 4 567; 701 809; 55 040 291; 942; 72ab; a01ab6.

SUNT CAMPION

1. Aflați baza de numerație x dacă:

a) $120_x = 15_{(10)}$; b) $105_{(10)} = 110\ 110_{(x)}$;
c) $100_{(10)} = 100_{(x)}$; d) $100_{(10)} = 100_{(x)}$;
e) $100_{(10)} = 100_{(x)}$; f) $100_{(10)} = 100_{(x)}$.

TEST DE EVALUARE

Partea I

La exercițiile 1 și 2 scrieți numai rezultatele, la exercițiul 3 scrieți (A) dacă propoziția este adevărată și (F) dacă propoziția este falsă.

1. Efectuați:

a) $234\ 509 + 37912$; b) $207 - 1\ 559$; c) $3476 - 98$; d) $26\ 144 \cdot 43$.

2. Ce sumă au coordonatele punctelor Q, R, T și U din figura alăturată?

P	Q	R	S	T	U
34		36		37	

3. Precizați pentru fiecare din propozițiile de mai jos dacă este adevărată sau falsă:

a) Cel mai mic număr par de patru cifre este 1000.
b) Numărul 50 012 este mai mare decât 50 201.
c) Numărul 190 780 este cu 77 348 mai mic decât numărul 268 128.
d) Numărul care împărțit la 54 dă câtul 683 și restul 19 este numărul 36 945.

Partea a II-a

La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

1. a) Dacă $a - b = 967$ iar $c = 84$, calculați $a - c - b$.
b) Alex alegează duminică 2 162 m iar luni 1 786 m. Dacă Alex parcurge 94 m într-un minut, cu câte minute a alergat Alex mai mult duminică decât luni? Rezolvați în două moduri.

2. Determinați:

a) un număr natural a știind că $a \div 2 = 780$, rotunjit la zeci; și că astfel de numere sunt
b) suma $5 + 6 + 7 + \dots + 56$.

3. Un număr este cu 19 mai mic decât un altul. Dacă împărțim suma lor la diferența lor obținem câtul 17 și restul 7, aflați numerele.

4. a) Determinați numerele de forma $a2b5$ știind că produsul cifrelor este 240.
b) Scrieți în ordine crescătoare numerele: aaa ; baa ; aab ; bbb dacă $a > b$.

Tabel autoevaluare

	1	2	3	4	Total
Partea I (45 p.)	20 p.	5 p.	20 p.	-	-
Partea a II-a (45 p.)	15 p.	13 p.	7 p.	10 p.	-
	a) 5 p.; b) 10 p.	a) 7 p.; b) 6 p.		(2 x 5 p.)	

Se acordă 10 puncte din oficiu. Pentru a afla nota finală, rezultatul obținut se împarte la 10.

Varianta digitală a manualului:



videoclipuri



jocuri interactive



imagini statice

TEST DE EVALUARE INIȚIALĂ

Ce știi? Cum știi? Cât știi?

Partea I

La exercițiile 1 și 2 scrieți numai rezultatele, la exercițiul 3 scrieți (A) dacă propoziția este adevărată și (F) dacă propoziția este falsă.

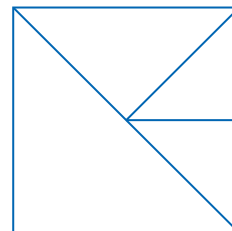
1 Efectuați:

a) $467 + 1\ 309$; b) $2\ 017 - 378$; c) 608×15 ; d) $89\ 250 : 6$.

2 Câte triunghiuri sunt desenate în figura alăturată?

3 Precizați pentru fiecare dintre propozițiile de mai jos dacă este adevărată sau falsă:

- a) Cel mai mare număr par de trei cifre este 998.
b) Numărul 3 003 este mai mic decât 3 030.
c) Numărul 1 914 este cu 958 mai mare decât numărul 956.
d) Numărul care împărțit la 6 dă câtul 708 și restul 5 este numărul 4 253.



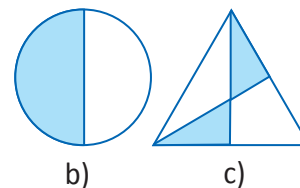
Partea a II-a

La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

1 Efectuați: $34 - [20 : (15 - 30 : 6) + 42 : 7 \times 2]$

2 Determinați:

- a) numărul a , știind că este egal cu o treime din 675;
b) fracția din cerc care reprezintă partea hașurată;
c) fracția din triunghi care reprezintă partea hașurată.



3 Mihaela citește o carte de 108 pagini în trei zile. Dacă în prima zi a citit cu 2 pagini mai puțin decât în a doua zi, iar în a treia zi a citit cu 5 pagini mai mult decât în a doua zi, câte pagini a citit în a doua zi?

Punctaj acordat:				
	1	2	3	Total
Partea I (45 p.)	20 p. (4 × 5 p.)	5 p.	20 p. (4 × 5 p.)	
Partea a II-a (45 p.)	15 p.	20 p. a) 7 p.; b) 6 p.; c) 7 p.	10 p.	

Se acordă 10 puncte din oficiu. Pentru a afla nota finală, rezultatul obținut se împarte la 10.



1. Numere naturale

1.1 Scrierea și citirea numerelor naturale

ÎMI AMINTESC!

Scriem	Citim
407	Patru sute șapte
5 690	Cinci mii șase sute nouăzeci
12 058	Douăsprezece mii cincizeci și opt
307 892	Trei sute șapte mii opt sute nouăzeci și doi
5 001 028	Cinci milioane o mie douăzeci și opt
30 670 103 002	Trei zeci de miliarde șase sute șaptezeci de milioane o sută trei mii doi

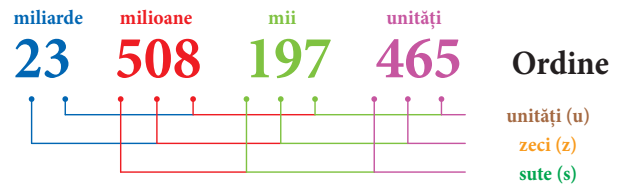
Pentru scrierea și citirea numerelor naturale în *sistemul de numerație zecimal pozițional* folosim cifrele arabe, *clasele de numerație* și *ordinele de numerație* pentru fiecare clasă.

Cifrele arabe

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

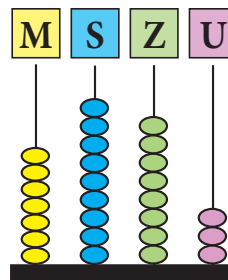
Un număr natural se scrie de la stânga la dreapta: *poziția* unei cifre într-o clasă și într-un ordin indică *ordinul ei de mărime*: ultima cifră reprezintă cifra unităților, penultima reprezintă cifra zecilor, următoarea cifră este cifra sutelor, urmează apoi cifra unităților din clasa miilor etc.

Clase

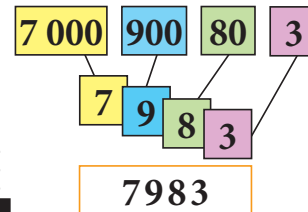


ÎNȚELEG

Cifra 7 a numărului 7 983 reprezintă ordinul unităților de mii...



...iar cifra 6 din scrierea numărului 30 670 103 002 indică ordinul sutelor de milioane.



Cifrele arabe sunt numere? Dar numerele sunt cifre?



Cifrele arabe au fost inventate de indieni și au fost aduse în Europa de arabi.

Cifrele arabe sunt asemănătoare literelor alfabetului. Cu ajutorul lor scriem *numere* așa cum cu ajutorul literelor scriem *cuvinte*. De exemplu, cu cifra 7 scriem numerele 7; 77, 777 etc.



ÎMI AMINTESC!

Scrierea numerelor naturale cu **cifre romane** (I, V, X, L, C, D, M) este un sistem de numerație nepozițional. Fiecare cifră reprezintă un număr natural ca în tabel și își păstrează valoarea indiferent de poziția pe care o ocupă.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Un număr natural oarecare se scrie prin alăturarea de cifre romane:

$$2556 = \text{MMDLVI}$$

1000 + 1000 + 500 + 50 + 5 + 1

Numerele 4, 9, 40, 90, 400, 900 se scriu astfel:

4	9	40	90	400	900
IV	IX	XL	XC	CD	CM

Primul simbol reprezintă un număr care se scade din al doilea și nu poate fi repetat decât de cel mult trei ori.

APLIC

Câte zeci, sute și mii are numărul 7 983?

$7\ 983 = 7\ 000 + 900 + 80 + 3 = 700 \cdot 10 + 90 \cdot 10 + 8 \cdot 10 + 3$, așadar avem $700 + 90 + 8 = 798$ zeci.

$7\ 983 = 7\ 000 + 900 + 80 + 3 = 70 \cdot 100 + 9 \cdot 100 + 80 + 3$, iar $70 + 9 = 79$ sute.

$7\ 983 = 7\ 000 + 900 + 80 + 3 = 7 \cdot 1\ 000 + 900 + 80 + 3$, deci 7 mii.

Așadar: $7\ 983 \rightarrow 7983 \rightarrow 798$ zeci, $7\ 983 \rightarrow 7983 \rightarrow 79$ sute, $7\ 983 \rightarrow 7983 \rightarrow 7$ mii

POT MAI MULT

Pentru a scrie un număr natural oarecare de 2, 3 sau 4 cifre folosim literele a, b, c, d care vor ține locul cifrelor necunoscute. Obținem numerele: \overline{ab} , \overline{abc} , \overline{abcd} unde b, c, d pot lua 10 valori posibile, iar a numai 9, întrucât $a \neq 0$.

Exemple: 1) Numerele de forma $\overline{ab7}$ care au suma cifrelor 10 sunt numerele pentru care $a + b + 7 = 10$, așadar $a + b = 3$ și rezultă numerele: 307, 217, 127.

2) Câte numere de 6 cifre încep și se termină cu 7?

Numerele căutate sunt de forma $\overline{7abcd7}$. Vom afla câte numere sunt de forma \overline{abcd} . Cifrele necunoscute având fiecare câte 10 posibilități, avem $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\ 000$ de numere.

Putem proceda și *altfel*: numerele $\overline{7abcd7}$ sunt 700 007, 700 017, 700 027, ..., 799 987, 799 997, adică 10 000 de numere.

EXERSEZ

1) Asociază scrierea cu litere cu scrierea cu cifre.

două milioane două mii doi

cinci sute șase

patru mii nouă

zece mii trei sute doi

506

10 302

202 002

2 002 002

4 009

2 Potriveți cifrele numărului 309 571 cu ordinul și clasa:



3 Scrieți cu cifre arabe numerele naturale: cincizeci și trei, două sute cinci, trei mii nouă sute optzeci și doi, șaptezeci de mii cinci, patru milioane trei mii unu, șaiszeci de miliarde cinci sute două milioane treizeci de mii o sută treisprezece.

4 În câte bancnote de 10 lei pot fi plătite următoarele sume de bani?

150 lei; 342 lei; 2 059 lei;
234 097 lei; 8 123 699 lei

Aceeași întrebare pentru bancnotele de 100 lei.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

5 Citiți, apoi scrieți cu litere într-un tabel prețurile obiectelor reprezentate în imagini:

Obiectul	Prețul în cifre [lei]	Prețul în litere [lei]
Casă
Automobil
...



49 280 097 lei



702 509 lei



10 008 982 008 lei



340 567 893 lei



50 456 lei



608 lei



3 078 lei

6 Scrieți descompunerea numerelor în sume: 57; 208; 1 978; 23 005; 298 003; 12 008 736 după exemplul:

$$35\,702 = 30\,000 + 5\,000 + 700 + 2$$

7 Scrieți cu cifre arabe numerele: XI, XXVI, LXIII, MCII, MMXVII, CMLVI, DXCIX.

8 Scrieți cu cifre romane numerele: 12, 27, 79, 805, 2 018, 945, 3 000, 555.

SUNT CAMPION

9 a) Aflați numerele naturale \overline{ab} care au suma cifrelor mai mică decât suma cifrelor numărului $\overline{ab} + 1$.

b) O carte are 120 de pagini. Câte cifre s-au folosit pentru numerotarea paginilor?

c) Pentru numerotarea paginilor unei cărți s-au folosit 2 016 cifre. Câte pagini are cartea?

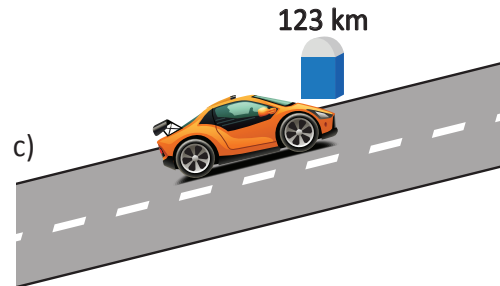
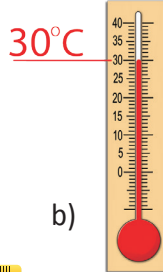
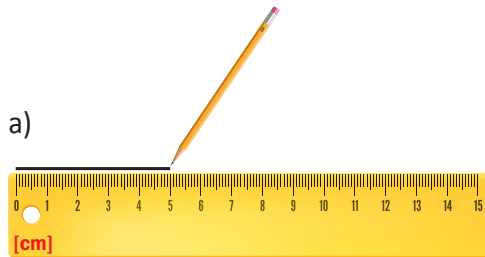
PORTOFOLIU

Faceți o scurtă istorie a cifrelor. Căutați într-o enciclopedie informații succinte însoțite de 2, 3 exemple, despre sistemele de numerație sumerian, babilonian, egiptean, ebraic, grec, roman, hindus și arab.

1.2 Reprezentarea pe axa numerelor

OBSERV

Ce vedem în imaginile alăturate?

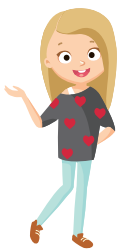
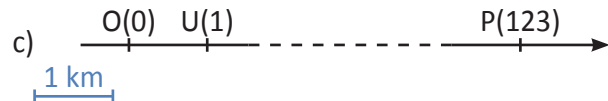
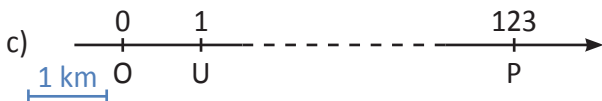
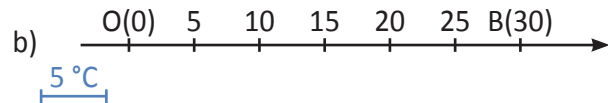
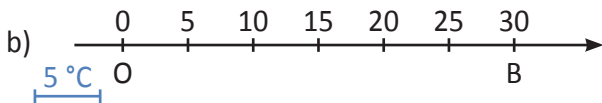
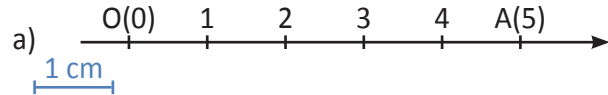
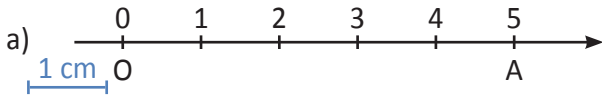


Ce au în comun imaginile?

De fiecare dată un număr este asociat cu un punct situat pe o linie dreaptă deplasându-ne într-un anumit sens și folosind o unitate de măsură: centimetrul (cm), gradul Celsius ($^{\circ}\text{C}$) sau kilometrul (km).

ÎNȚELEG

Aceste situații pot fi reprezentate mai simplu, ca în figură:



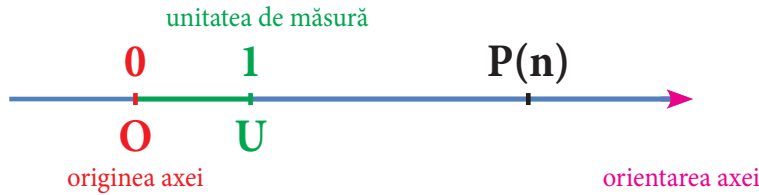
Am desenat astfel *axa numerelor naturale* pentru fiecare imagine și observăm că numărul 5 este asociat cu punctul A, numărului 30 îi corespunde punctul B, iar lui 123 îi revine punctul P. Scriem (notăm) mai pe scurt A(5), B(30) respectiv P(123) și avem $OA = 5\text{ cm}$, $OB = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$ iar $OP = 123\text{ km}$.

Numerele 5, 30 și 123 se numesc *coordonatele* punctelor A, B, respectiv P.



Reprezentăm o axă a numerelor naturale dacă desenăm:

- 1) o linie dreaptă pe care fixăm un punct numit *originea axei*;
- 2) un segment de dreaptă numit *unitatea de măsură a axei*;
- 3) o săgeată care indică un sens de parcurs crescător spre dreapta originii numit și *orientarea axei*.

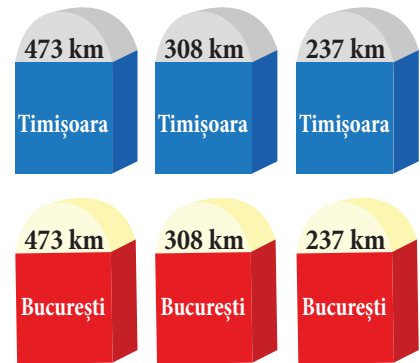


Cu ajutorul axei asociem fiecărui număr natural n un punct P pe o linie dreaptă astfel încât $OP = n$ unități. Notăția $P(n)$ se citește „punctul P de coordonată n ”.

APLIC

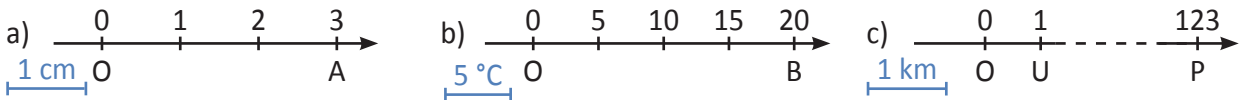
Mergând cu autocarul pe drumul național București – Timișoara, Alex observă numerele înscrise pe bornele kilometrice: 473, 308, 237. Știind că distanța București – Timișoara este de 546 km, dacă reprezentăm șoseaua ca o axă de numere cu originea la kilometrul 0 din București, puteți afla coordonatele bornelor kilometrice observate de Alex? Analizați două cazuri:

- a) Alex merge de la București la Timișoara;
- b) Alex merge de la Timișoara la București.

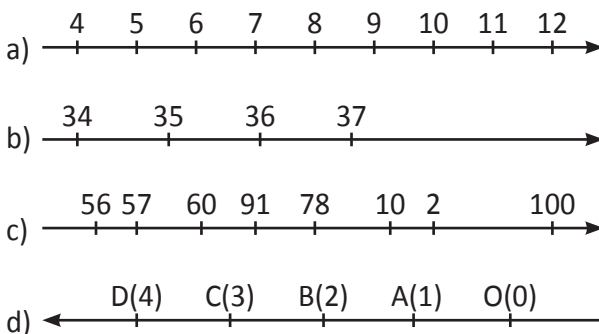


EXERSEZ

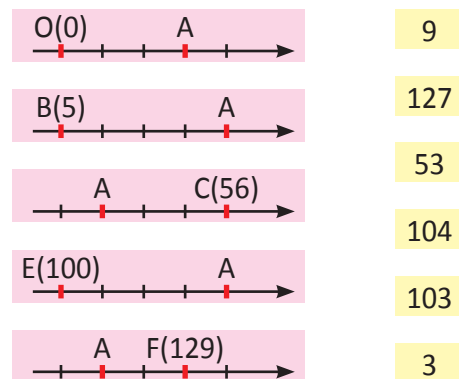
1 Care sunt etaloanele celor trei axe?



2 Bianca a reprezentat numere naturale pe axe. Care dintre reprezentări e corectă? Justificați!

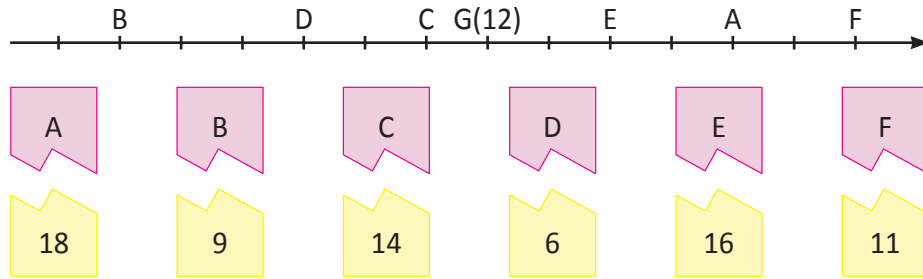


3 Asociați punctul A cu coordonata lui.



4 Reprezențați pe axa numerelor naturale punctele ale căror coordonate sunt: 3, 5, 23, 400, 12 000; alegeți convenabil etalonul axei pentru fiecare număr.

5 Potrivii coordonatele punctelor A, B, C, D, E și F.



6 Alex merge cu autocarul pe autostradă. În dreptul marcajului cu 23 km începe lectura unei cărți și după ce citește 10 pagini observă că autocarul tocmai a trecut de marcajul cu 115 km. Ce distanță a parcurs autocarul în timpul cât Alex a citit cele 10 pagini?

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

7 Pe o riglă gradată în centimetri numărul 14 este marcat cu punctul A, iar numărul 35 cu B. Notăm A(14) și B(35). Calculați lungimea segmentului AB. Completați tabelul cu lungimile corespunzătoare dacă notăm cu a și b coordonatele lui A respectiv B, $a \leq b$. Propuneți o regulă (formulă) de calcul a distanței și verificați dacă e corectă.

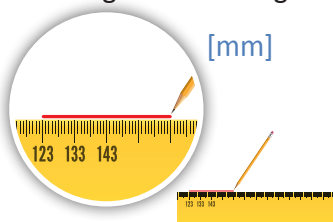
Punctul A (a cm)	14	8	0	5	43	69	5
Punctul B (b cm)	35	54		56	70	91	152
Lungimea AB (cm)		12	0	19	48		68

8 Pe o axă a numerelor naturale cu etalonul $1u$ sunt reprezentate punctele A(3), B(7) și C. Aflați coordonata punctului C dacă ordinea punctelor este:

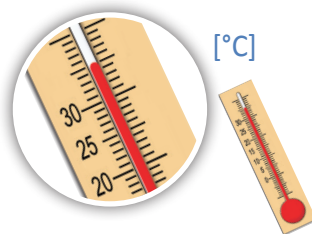
a) A, C, B și $AC = 2u$;

b) C, B, A și $BC = 3u$.

9 Puteți spune ce lungime are segmentul din figură?



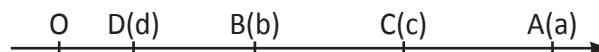
Ce temperatură arată termometrul?



Care este masa corpului cântărit?



10 În figura de mai jos sunt reprezentate punctele A, B, C și D cu coordonatele lor. Care este cea mai mică dintre coordonate? Dar cea mai mare? Ordonăți descrescător numerele a, b, c, d .



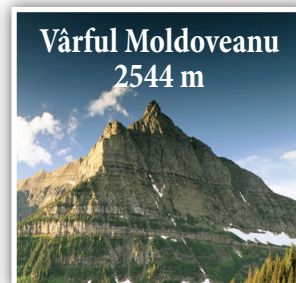
1.3 Compararea și ordonarea numerelor naturale

ÎMI AMINTESC!

Dintre vârfurile Negoiu și Moldoveanu din Munții Făgăraș, mai înalt este vârful Moldoveanu, deoarece:

Vf. Moldoveanu	2	5	4	4
Vf. Negoiu	2	5	3	5
Comparăm	$2 = 2$	$5 = 5$	$4 > 3$	

Așadar: $2\ 544 > 2\ 535$.



ÎNȚELEG



Pentru a compara două numere cu același număr de cifre comparăm cifră cu cifră de la stânga la dreapta până când două cifre de același ordin sunt diferite; este mai mare numărul cu cifra de același ordin mai mare.

Dacă două numere nu au același număr de cifre atunci este mai mare numărul care are mai multe cifre. De exemplu: $153 > 98$.



Între două numere naturale sunt posibile relațiile:

Semnul	Denumirea	Exemple
=	egal	$2\ 017 = 2\ 017$
≠	diferit	$2\ 017 \neq 2\ 022$
>	(strict) mai mare	$2\ 021 > 2\ 019$
<	(strict) mai mic	$2\ 017 < 2\ 023$
≥	mai mare sau egal	$23 \geq 21$; $45 \geq 45$
≤	mai mic sau egal	$39 \leq 45$; $67 \leq 67$
≈ sau ≅	aproximativ egal	$48 \approx 50$; $114 \cong 100$

OBSERV

Numerele

$$567 < 568 < 569$$

sunt *numere consecutive* ordonate crescător.

567 este *predecesorul* lui **568**, iar **569** este *succesorul* lui **568**. Orice număr natural are un succesori, dar numai numerele diferite de zero (nenule) au un predecesor; zero nu are un predecesor.

APLIC

Din șirul de numere:
456, 457, 458, ..., 679

alegeți trei numere și completați tabelul.

	Numere consecutive	Numere pare consecutive	Numere impare consecutive
a)	?	?	?
b)	?	?	?
c)	?	?	?

POT MAI MULT

Alex a scris numerele naturale: a , $a + 1$ și $a + 2$, unde $a \geq 0$.

Bianca a scris: $n - 2$, $n - 1$, n , $n \geq 2$.

Cristi a scris: $x - 1$, x , $x + 1$, $x \geq 1$.

Ce fel de numere naturale au scris copiii? Care este succesorul numărului n ? Dar predecesorul numărului $a + 2$?

EXERSEZ

1 Comparați numerele:

a) 45 și 54; b) 101 și 1 001; c) 608 și 806.

3 Completați pentru a ordona numerele.

284 < 184 < 384 < 348

8 947 > 8 794 > 7 924 > 7 942 > 8 749

5 Găsiți cel mai mare număr natural de șapte cifre mai mic decât cel mai mare număr natural de șapte cifre diferite.

6 Pentru ce cifre a are loc inegalitatea $\overline{23a5} > \overline{235a}$?

Dar inegalitatea $\overline{23a5} < \overline{235a}$?

Este posibil să avem $\overline{23a5} = \overline{235a}$?

7 Fie numărul:

$$n = 17277377747777...9777777777.$$

Scrieți cel mai mic și cel mai mare număr care se poate forma cu cifrele numărului n .

2 Ordonăți crescător numerele:

70 407; 607; 7 008 002; 207 007; 500 107; 97 007.

4 Ordonăți țările din tabel în ordine descrescătoare după numărul de locuitori, apoi după suprafață.

Țara	Număr de locuitori	Suprafața [km pătrat]
Rusia	145 433 700	17 101 081
S.U.A.	318 626 220	9 629 091
China	1 350 695 000	9 596 961
Japonia	127 799 000	377 944
Anglia	53 012 456	130 395

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

8 Aflați trei numere consecutive dacă suma lor este 6. Completați tabelul și formulați o regulă de calcul. Ce observați? Compuneți o problemă asemănătoare.

Suma numerelor	$n - 1$	n	$n + 1$
6	?	?	?
18			
2 019			
56			

1.4 Aproximări și estimări

OBSERV



Am citit că lungimea cursului Dunării este de 2 800 km.



Nu este adevărat, din Wikipedia am aflat că Dunărea are lungimea de 2 860 km.

Nu ai dreptate, eu am citit într-o revistă că Dunărea are lungimea de 2 900 km.



Bianca are dreptate! Numerele date de Alex și Cristi sunt *aproximări* ale lungimii cursului Dunării.



Scriem: $2\ 860 \approx 2\ 800$, *aproximare prin lipsă la sute* dată de Alex.

$2\ 860 \approx 2\ 900$, *aproximare prin adaos la sute* dată de Cristi.

ÎNȚELEG

- *Aproximarea prin lipsă* a unui număr natural până la zeci, sute, mii... este cel mai mare număr natural format numai din zeci, sute, mii... mai mic decât numărul dat.

- *Aproximarea prin adaos* a unui număr natural până la zeci, sute, mii... este cel mai mic număr natural format numai din zeci, sute, mii... mai mare decât numărul dat.

Numerele date de Alex și Cristi sunt lungimi ale cursului Dunării ușor de reținut. Astfel de situații întâlnim destul de frecvent, ca în exemplele din tabel:

	<i>Exact</i>	<i>Aproximativ</i>	<i>Felul aproximării</i>	<i>Ordinul până la care se aproximează</i>
<i>Viteza luminii</i> [km/s]	299 792	300 000	prin adaos	sute de mii
<i>Distanța Pământ-Soare</i> [km]	149 600 000	150 000 000	prin adaos	milioane
<i>Populația Pământului</i> [locuitori]	7 324 000 000	7 000 000 000	prin lipsă	miliarde
<i>Număr utilizatori Google</i>	61 350 000	61 300 000	prin lipsă	sute de mii

- *Rotunjirea* unui număr natural până la zeci, sute, mii,... este aproximarea prin lipsă sau adaos până la zeci, sute, mii,... cea mai apropiată de numărul dat. Dacă cele două aproximări sunt apropiate în mod egal de valoarea exactă, se ia ca rotunjire aproximarea prin adaos. De exemplu, numărul de utilizatori Google are aproximările prin lipsă și respectiv adaos până la sute de mii:

$61\ 350\ 000 \approx 61\ 300\ 000$;

$61\ 350\ 000 \approx 61\ 400\ 000$. În acest caz se ia ca *rotunjire* aproximarea prin adaos.

- O aproximare a unor date numerice care convine unor condiții prestabilite se numește *estimarea* datelor respective. Exemple: 7 000 000 000 locuitori este o estimare a populației Pământului, 200 000 000 km este o estimare a distanței Pământ-Soare, iar dacă la efectuarea unor calcule folosim aproximările numerelor care intervin în calcule, rezultatul obținut este o estimare a rezultatului exact.

APLIC

Într-o școală sunt înscriși 1 126 elevi, iar în clasele a V-a A, B, C, D și E sunt 29, 24, 28, 27 și respectiv 25 elevi. Rotunjiți la zeci numărul elevilor din școală și din clasele a V-a.

EXERSEZ

- 1 Aproximați, prin lipsă și prin adaos la zeci, numerele: 78, 35, 98, 193, 4 567, 3 599.
- 2 Rotunjiți viteza luminii, distanța Pământ-Soare, populația Pământului și numărul de utilizatori Google din tabelul de la pagina anterioară la ordinul precizat și apoi realizați estimările.
- 3 Unele dintre rotunjirile de mai jos au fost efectuate greșit. Care dintre ele?
 a) $250\ 000 \approx 300\ 000$; b) $177\ 789 \approx 177\ 800$;
 c) $97\ 789 \approx 97\ 000$; d) $578\ 126 \approx 578\ 130$;
 e) $90\ 346 \approx 90\ 400$; f) $9\ 045\ 639 \approx 9\ 050\ 000$.
- 4 Asociați cu ordinul la care s-a efectuat aproximarea.
- | | |
|-----------------------------------|----------------|
| $782 \approx 780$ | la mii |
| $5\ 678 \approx 5\ 700$ | la sute de mii |
| $162\ 892 \approx 160\ 000$ | la zeci de mii |
| $5\ 678 \approx 6\ 000$ | la sute |
| $4\ 673\ 892 \approx 4\ 000\ 000$ | la zeci |
| | la milioane |

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

- 5 Într-o acțiune de colectare a deșeurilor, Alex și Cristi au strâns baterii. Cu ajutorul datelor din tabel, reprezentați estimativ într-o diagramă cu bare câte baterii au strâns lunar cei doi copii împreună.

	Alex	Cristi	Estimare total
Octombrie	136	178	
Noiembrie	57	21	
Decembrie	95	101	
Ianuarie	14	68	

- 6 Un camion suportă o încărcătură maximă de 3 834 kg. Câți saci de 100 kg pot fi transportați cu acest camion? Ce tip de aproximare ați efectuat și la ce ordin?
- 7 Pentru fabricarea unei cantități de ciocolată sunt necesari 564 litri de lapte. Dacă laptele se livrează numai în bidoane de 10 litri, aflați câte bidoane sunt necesare. Ce fel de aproximare se aplică și la ce ordin?
- 8 În caietul de teme, Bianca a făcut următoarea problemă de rotunjire:
- Problema: Rotunjiți la mii numărul 128 473.*

Rezolvare: Rotunjesc prima dată la sute și obțin $128\ 473 \approx 128\ 500$, apoi rotunjesc la mii și obțin $128\ 473 \approx 129\ 000$.
- Este corectă rezolvarea Biancăi? Justificați!

- 9 Dacă am efectuat rotunjirea $\overline{2a57} \approx 2\ 400$, aflați valoarea cifrei a . Dar dacă facem rotunjirea $816\overline{a2} \approx 81\ 700$, care sunt valorile posibile ale cifrei a ?

2. Adunarea și scăderea

2.1 Suma a două sau mai multe numere naturale

ÎMI AMINTESC!

În cursul anului școlar, clasele a V-a A, B și C au colectat hârtie pentru a fi reciclată. Clasa a V-a A a strâns 329 kg, a V-a B 189 kg și a V-a C 1 790 kg. Ce cantitate de hârtie au strâns cele trei clase?



Rezolvare: Pentru a afla cantitatea de hârtie colectată, adunăm:

$$1\ 790 + 189 + 329 = 2\ 308$$

Calculule se efectuează ca în tabel.

Răspuns: cele trei clase au strâns 2 308 kg.

$$\begin{array}{r} 1\ 790 + \\ 189 \\ \hline 2\ 308 \end{array}$$

M	S	Z	U
1 ⁺¹	7 ⁺¹	9 ⁺¹	0
	1	8	9
	3	2	9
2	1 3	2 0	1 8

$$\begin{array}{ccccccc} 1\ 790 & + & 189 & + & 329 & = & 2\ 308 \\ \text{termen 1} & & \text{termen 2} & & \text{termen 3} & & \text{sumă sau total} \end{array}$$

Suma a două sau mai multe numere naturale este un număr natural.

2.2 Proprietăți ale adunării

ÎNȚELEG



Câtă hârtie au strâns clasele a V-a B și a V-a C?

Cele două clase au strâns 518 kg.

$$189 + 329 = 518 \text{ sau } 329 + 189 = 518$$



Dacă schimbăm locul termenilor într-o adunare suma nu se schimbă.

Spunem că adunarea este *comutativă*:

$$a + b = b + a,$$

oricare ar fi numerele naturale a și b

A comuta înseamnă a schimba locul sau poziția.

Dacă asociem sau grupăm câte doi termeni ai unei adunări de mai mulți termeni suma nu se schimbă.

Spunem că adunarea este *asociativă*.

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

oricare ar fi numerele naturale a , b și c .

Dacă adunăm un număr natural cu zero suma nu se schimbă.

Spunem că zero este *element neutru* pentru adunare.

$$0 + a = a + 0 = a,$$

oricare ar fi numărul natural a

- Calculați în alt mod cantitatea de hârtie colectată de cele trei clase.

$$1\ 790 + 189 + 329 = 1\ 790 + 518 = 2\ 308 \text{ sau}$$

$$1\ 790 + 189 + 329 = 1\ 979 + 329 = 2\ 308$$

Așadar: $1\ 790 + 189 + 329 = 1\ 790 + 189 + 329$

- Dacă a V-a D nu a participat la colectarea de hârtie, câtă hârtie au strâns cele patru clase?

$$2\ 308 + 0 = 0 + 2\ 308.$$

APLIC

Efectuați cât mai rapid sumele:

a) $42 + 38 + 58 + 162$;

b) $163 + 281 + 137 + 419$;

c) $2\ 345 + 578 + 2\ 655 + 5\ 422$;

d) $12\ 672 + 34\ 674 + 11\ 328 + 15\ 526$.

POT MAI MULT

Pe când era elev în clasa a V-a, lui Carl Friedrich Gauss i s-a dat să calculeze suma $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 20$. Profesorul lui a rămas uimit când Gauss a dat răspunsul imediat: 210.

Cum a procedat Gauss?

Scriem și asociem termenii sumei ca în figură și observăm că avem $20 : 2 = 10$ grupe de 21.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 18 + 19 + 20 = 21 \cdot 10 = 210$$

Suma $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = n \cdot (n + 1) : 2$, unde n este un număr natural oarecare, este cunoscută ca **suma lui Gauss**.



*Carl Friedrich Gauss:
matematician, fizician
și astronom german
(1777–1855)*

EXERSEZ

1 Alegeți totalul corect:

a) $23 + 167 =$

180

190

200

d) $1\ 457 + 27\ 809 =$

29 265

29 266

28 266

b) $245 + 389 =$

524

624

634

e) $200\ 836 + 1\ 004\ 609 =$

1 305 445

1 205 544

1 205 445

c) $478 + 324 =$

802

902

812

f) $1\ 234 + 57 + 234\ 709 =$

236 000

237 000

1 200 000

2 Cu datele din tabel exprimate în kilograme, calculați câtă hârtie au colectat cele patru clase împreună.

	a V-a A	a V-a B	a V-a C	a V-a D
Sem. I	294	1 067	762	1 149
Sem. II	384	678	1 134	1 083
Total	?	?	?	?

3 Efectuați sumele:

a) $36 + 21 + 10$;

b) $608 + 234$;

c) $1\ 089\ \text{kg} + 34\ \text{kg} + 290\ \text{kg}$;

d) $35\ 879 + 20\ 067$;

e) $123\ 980\ \text{km} + 45\ 897\ \text{km}$;

f) $1\ 209\ 675 + 497\ 009$;

g) $1\ 457\ \text{dag} + 27\ 809\ \text{dag}$;

h) $1\ 234 + 507 + 3\ 234\ 709$;

i) $\text{MCMLXXXIX} + \text{CDXLIV}$.

4 Calculați cât mai simplu folosind comutativitatea și asociativitatea adunării:

- a) $17 + 16 + 83$; b) $125 + 47 + 175$; c) $350 + 123 + 150$;
 d) $1\ 432 + 799 + 68$; e) $2\ 351 + 2\ 500 + 1\ 249 + 7\ 500$; f) $1\ 243 + 1\ 736 + 857 + 264$;
 g) $1\ 111 + 3\ 333 + 999 + 777$; h) $34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39$; i) $23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28$.

5 Care dintre afirmații sunt adevărate (A) și care sunt false (F)?

- a) $29 + 312 = 312 + 29$; b) $2\ 003 + 607 < 2\ 003 + 602$;
 c) $0 + 71 = 71 + 0$; d) $(834 + 129) + 556 = 834 + (129 + 556)$;
 e) $0 + 679 < 680$; f) $2\ 017 + 2\ 037 = 2\ 035 + 2019$;
 g) $(145 + 55) + 75 > 145 + (55 + 75)$; h) $1 + 3 + 5 + \dots + 19 = 2 + 4 + 6 + \dots + 20$.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

6 Se dau numerele din tabelul alăturat:

Găsiți perechile de numere a căror sumă este 100. Există 3 numere nenule a căror sumă este 100?

74	42	27	144	26	99	48	49
0	31	25	41	81	59	37	121
1	13	7	64	4	16	52	100

7 Potriveți termenii pentru ca suma lor să fie 167.

67	59	99	113	95	88
54	72	79	108	100	68

8 Comparați sumele și puneți în casete semnul potrivit: „=”, „>” sau „<”.

- a) $14 + 23$ $23 + 14$; b) $45 + 67$ $45 + 76$;
 c) $234 + (456 + 378)$ $(234 + 456) + 378$; d) $206 + (400 + 778)$ $(204 + 773) + 405$;
 e) $0 + 209$ $209 + 0$; f) $243 + 342 + 432$ $432 + 243 + 342$.

9 Reconstituiți adunările:

- a) $\begin{array}{r} 2 * 7 + \\ * 8 * \\ \hline 7 * 9 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 2\ 387 + \\ * * * * \\ \hline 6\ 734 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} * 7 * 9 + \\ 4 * 3 * \\ \hline * 3 * 4 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} * 35 * + \\ * * 56 \\ \hline 7 8 ** \end{array}$

10 Calculați sumele:

- a) $1 + 2 + 3 + \dots + 29 + 30$; b) $1 + 3 + 5 + \dots + 23$;
 c) $7 + 8 + 9 + \dots + 28 + 29$; d) $7 + 9 + 11 + \dots + 43$.

SUNT CAMPION

11 Calculați:

- a) suma a 5 numere naturale consecutive știind că unul dintre ele este $\overline{7a}$ iar succesorul său are ultima cifră nulă.
 b) suma numerelor de 5 cifre care conțin în scrierea lor numărul 2 017.

2.3 Diferența a două numere naturale

ÎMI AMINTESC!

Hârtia colectată de clasele a V-a A, B și C este transportată de o camionetă la punctul de reciclare a deșeurilor. Dacă la un transport camioneta poate căra maximum 925 kg, iar cantitatea de hârtie strânsă de cele trei clase este de 2 308 kg, aflați câtă hârtie rămâne după primul transport.



Rezolvare: Pentru a afla cantitatea de hârtie rămasă după primul transport, efectuăm scăderea:

$$2\ 308 - 925 = 1\ 383$$

Calcululele se efectuează ca în tabel.

Răspuns: după primul transport rămân 1 383 kg hârtie.

$$\begin{array}{r} 2\ 308 - \\ \underline{925} \\ 1\ 383 \end{array}$$

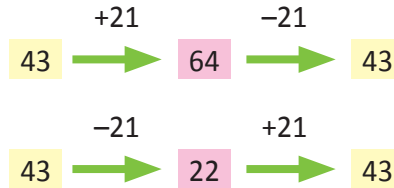
M	S	Z	U
2 ⁻¹	3 ⁻¹	0	8
	9	2	5
1	3	8	3

$$\begin{array}{ccccccc} 2\ 308 & - & 925 & = & 1\ 383 \\ \text{descăzut (D)} & & \text{scăzător (S)} & & \text{rest (R) sau diferență} \end{array}$$

Diferența a două numere naturale este un număr natural dacă descăzutul este mai mare decât scăzătorul; în caz contrar diferența nu este un număr natural.

OBSERV

Scăderea este operația inversă adunării, iar adunarea este operația inversă scăderii.



Astfel, putem efectua:

Proba scăderii $43 - 21 = 22$

1) prin adunare: $21 + 22 = 43$

2) prin scădere: $43 - 22 = 21$

Să reținem

$$\mathbf{D = R + S} \text{ sau } \mathbf{S = D - R},$$

unde D, S și R sunt numere naturale, $D \geq S$

Proba adunării $43 + 21 = 64$

1) prin scădere: $64 - 21 = 43$ sau $64 - 43 = 21$

2) prin adunare: $21 + 43 = 64$

De asemenea:

- $24 - 8 = 16$ iar $8 - 24 = ?$

Așadar, $24 - 8 \neq 8 - 24$ ne arată că **scăderea nu este comutativă**.

În general $a - b \neq b - a$, oricare ar fi numerele naturale diferite a și b .

- $(29 - 12) - 8 = 9$ iar $29 - (12 - 8) = 25$.

Rezultă că $(29 - 12) - 8 \neq 29 - (12 - 8)$ adică **scăderea nu este asociativă**.

În schimb: $29 - (12 + 8) = 9$ și $29 - 12 - 8 = 9$

ne arată că $29 - (12 + 8) = 29 - 12 - 8$

iar $29 - (12 - 8) = 25$ și $29 - 12 + 8 = 25$

ne arată că $29 - (12 - 8) = 29 - 12 + 8$.

- $23 - 0 = 23$ iar $0 - 23 = ?$

Deci, $23 - 0 \neq 0 - 23$ ne arată că **scăderea nu are pe zero ca element neutru**.

POT MAI MULT

1) Exprimați cu ajutorul literelor proprietățile scăderii observate mai sus.

Exemplu: $a - (b - c) = a - b + c$, oricare ar fi numerele naturale diferite a , b și c ; $b \geq c$.

2) Puneți paranteze astfel încât egalitățile să fie adevărate:

$67 - 16 - 9 = 60;$

$78 - 14 - 27 - 14 = 51;$

$83 - 14 + 47 = 22;$

$76 - 25 - 12 - 63 = 0;$

$49 - 23 - 37 - 12 = 1;$

$85 - 75 + 36 - 26 = 0.$

EXERSEZ

1) Alegeți restul corect:

a)	$230 - 167 =$	63	73	53
b)	$2\ 045 - 389 =$	1 554	1 657	1 656
c)	$478 - 324 =$	164	154	155
d)	$1\ 457 - 809 =$	758	647	648
e)	$2\ 000\ 836 - 1\ 004\ 609 =$	994 567	996 227	995 227
f)	$1\ 234 - 57 - 709 =$	468	486	846

2) Efectuați diferențele:

a) $97 - 32;$ b) $918 - 593;$

c) $10\ 234 - 7\ 896;$ d) $400 - 189.$

astfel:

I) estimați rezultatul;

II) calculați exact;

III) comparați rezultatul exact cu estimarea.

3) Completați cantitățile de maculatură colectate de clasele a V-a A, B, C și D. Câtă hârtie au colectat cele patru clase împreună? Etalonul este kg.

	a V-a A	a V-a B	a V-a C	a V-a D
Sem. I	294	?	762	?
Sem. II	?	678	?	1 083
Total	1 459	1 067	1 134	2 349

4 Efectuați scăderile, apoi probați corectitudinea lor:

- a) $123 - 97$; b) $123\ 000 - 26\ 000$; c) $345\ 034 - 123\ 987$;
 d) $798\ 007 - 199\ 999$; e) $345\ \text{g} - 39\ \text{g}$; f) $23\ 098\ \text{t} - 20\ 000\ \text{t}$;
 g) $34\ 098\ 500\ \text{q} - 2\ 000\ 697\ \text{q}$; h) $123\ 489\ \text{h} - 56\ 898\ \text{h}$; i) $\text{MMCMXLIX} - \text{MLXXVIII}$.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

5 Se dau numerele din tabelul alăturat:

Găsiți perechile de numere a căror diferență să fie 100. Există trei astfel de numere nenule a căror diferență succesivă să fie 100?

100	584	127	4	684	107	13	7
121	68	509	181	49	125	21	0
149	48	99	26	199	27	42	609

6 Asociați scăzătorul cu descăzutul pentru ca diferența să fie 34.

125 34 247 2 346 100

281 2 380 134 283 68 159

JOC

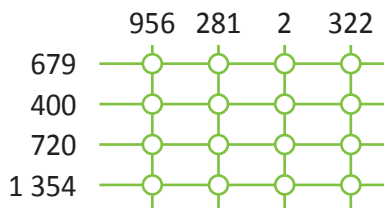
7 Mutați un singur chibrit în așa fel încât egalitatea să fie corectă.

$$\begin{aligned} VI - IV &= XI \\ XIII + IV &= X \\ LXIX - XI &= C + XX \end{aligned}$$

8 Comparați diferențele și puneți în casete semnul potrivit: „=”, „>” sau „<”.

- a) $140 - 31$ $139 - 31$; b) $45 - 37$ $45 - 26$;
 c) $1\ 234 - (456 + 378)$ $(1\ 234 - 456) - 378$; d) $2\ 106 - (800 - 778)$ $2\ 106 - 800 + 778$;
 e) $0 + 209$ $209 - 0$; f) $2\ 443 - 342 - 432$ $2\ 443 - 432 - 342$.

9 Alegeți termenii diferenței $a - b = 398$.



10 Reconstituiți scăderile:

- a)
$$\begin{array}{r} 236 - \\ *3 \\ \hline *6* \end{array}$$
 b)
$$\begin{array}{r} *5* - \\ 372 \\ \hline 4*6 \end{array}$$
 c)
$$\begin{array}{r} *7*9 - \\ 4*3* \\ \hline *3*4 \end{array}$$

 d)
$$\begin{array}{r} 8\ 387 - \\ * * * * \\ \hline 6\ 734 \end{array}$$
 e)
$$\begin{array}{r} *35* - \\ * * 56 \\ \hline 78*1 \end{array}$$
 f)
$$\begin{array}{r} 39* - \\ 1*5 \\ \hline 1*7 \end{array}$$

11 Completați tabelele probând de fiecare dată rezultatul obținut:

	Anul nașterii	Vârsta în			
		2006	2010	2017	2040
Ionuț				11	
Tata			35		
Mama		27			
Bunica				64	
Bunicul		58			

A	B	A + B	A - B
	35	456	
2 789			1 234
		246	124
90 045		98 678	
	450 789		23 567
		234 567	125 569

3. Înmulțirea

3.1 Produsul a două numere naturale

ÎMI AMINTESC!

Pe terenul de sport, Bianca a observat că parcurge 75 de metri într-un minut. Câți metri parcurge Bianca în 3 minute?

Rezolvare: Bianca parcurge de trei ori câte 75 m și rezultă

$$3 \times 75 = 3 \cdot 75 = 75 + 75 + 75 = 225 \text{ m}$$

Răspuns: Bianca parcurge 225 m în 3 minute.

$$3 \cdot 75 = 225 \text{ m}$$

factor 1 · **factor 2** = **produs**



Înmulțirea este o adunare repetată a unui număr.

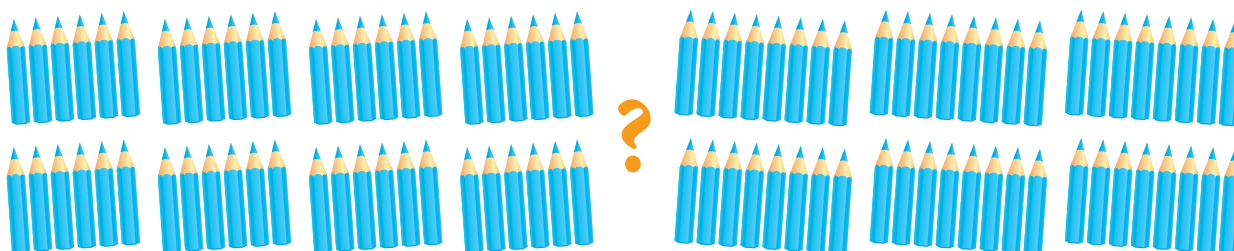
Produsul a două numere naturale este un număr natural.

Pentru înmulțire, în loc de „x” vom folosi punctul „·”, iar $a \cdot b$ sau $7 \cdot a$ vor fi scrise ca ab sau $7a$, unde a și b sunt numere naturale necunoscute.

3.2 Proprietăți ale înmulțirii

ÎNȚELEG

• Bianca își aranjează creioanele colorate câte 6 în 8 cutii, apoi observă că le poate pune câte 8 în 6 cutii. A procedat corect?



Într-adevăr:

De 6 ori câte 8:

$$6 \cdot 8 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 48.$$

De 8 ori câte 6:

$$8 \cdot 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 48.$$

Deci $6 \cdot 8 = 8 \cdot 6$, Bianca a procedat corect.

Dacă schimbăm locul factorilor într-o înmulțire, produsul nu se schimbă. Spunem că înmulțirea este **comutativă**:

$$a \cdot b = b \cdot a,$$

oricare ar fi numerele naturale a și b .

- Un robot montează 24 de tablete pe oră. Câte tablete montează în 5 zile, dacă robotul lucrează 8 ore zilnic?

Metoda I: calculăm câte tablete montează robotul în 8 ore, apoi în 5 zile.

$$(24 \cdot 8) \cdot 5 = 192 \cdot 5 = 960.$$

Metoda II: calculăm câte ore lucrează robotul în 5 zile, apoi câte tablete montează în aceste ore.

$$24 \cdot (8 \cdot 5) = 24 \cdot 40 = 960.$$

Așadar

$$(24 \cdot 8) \cdot 5 = 24 \cdot (8 \cdot 5)$$

și oricum am proceda obținem tot 960 de tablete.

Dacă asociem sau grupăm câte doi factori ai unei înmulțiri de mai mulți factori, produsul nu se schimbă. Spunem că înmulțirea este **asociativă**.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$

oricare ar fi numerele naturale a, b și c .

OBSERV

- De 3 ori câte 1:

$$3 \cdot 1 = 1 + 1 + 1 = 3 \quad \text{iar} \quad 1 \cdot 3 = 3$$

Deci,

$$3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = 3.$$

Dacă înmulțim un număr natural cu unu, produsul nu se schimbă. Spunem că unu este **element neutru** pentru înmulțire.

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a,$$

oricare ar fi numărul natural a .

- Un robot montează 3 tablete pe oră și lucrează 7 ore într-o zi, iar în altă zi lucrează 12 ore. Câte tablete montează robotul în cele 2 zile?

Metoda I: calculăm câte ore lucrează robotul în cele două zile și apoi aflăm numărul de tablete.

$$3 \cdot (7 + 12) = 3 \cdot 19 = 57$$

Metoda II: Calculăm câte tablete montează robotul în 7 ore, apoi în 12 ore și adunăm rezultatele.

$$3 \cdot 7 + 3 \cdot 12 = 21 + 36 = 57$$

De fiecare dată obținem 57 tablete. Așadar,

$$3 \cdot (7 + 12) = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 12.$$

Cu câte tablete mai puțin montează robotul în prima zi față de a doua zi?

Metoda I: Calculăm câte ore lucrează mai puțin robotul în prima zi față de a doua zi și apoi aflăm numărul de tablete.

$$3 \cdot (12 - 7) = 3 \cdot 5 = 15$$

Metoda II: calculăm câte tablete montează robotul în 12 ore, apoi în 7 ore și scădem rezultatele.

$$3 \cdot 12 - 3 \cdot 7 = 36 - 21 = 15$$

De fiecare dată obținem 15 tablete.

Deci,

$$3 \cdot (12 - 7) = 3 \cdot 12 - 3 \cdot 7$$

Spunem că înmulțirea este **distributivă** față de adunare și scădere, factorul fiind **distribuit** sau repartizat fiecărui termen.

În general:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{sau} \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a,$$

oricare ar fi numerele naturale a, b și c .

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \quad \text{sau} \quad (b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a,$$

oricare ar fi numerele naturale a, b și $c, b \geq c$.

APLIC

Efectuați înmulțirile folosind procedeul de calcul din figură:

$$1\ 432 \cdot 165; \quad 5\ 987 \cdot 648.$$

Aranjați într-o schemă asemănătoare înmulțirea:

$$\begin{aligned} 367 \cdot 54 &= (300 + 60 + 7) \cdot 54 = 300 \cdot 54 + 60 \cdot 54 \\ &+ 7 \cdot 54 = 300 \cdot (50 + 4) + 60 \cdot (50 + 4) + 7 \cdot (50 + 4) = \\ &300 \cdot 50 + 300 \cdot 4 + 60 \cdot 50 + 60 \cdot 4 + 7 \cdot 50 + 7 \cdot 4 = \\ &15\ 000 + 1\ 200 + 3\ 000 + 240 + 350 + 28 = 19\ 818. \end{aligned}$$

$$2\ 598 \cdot 736 = ?$$

$$2\ 598 \cdot 736 = 2\ 598 \cdot (700 + 30 + 6)$$

$$= 2\ 598 \cdot 700 + 2\ 598 \cdot 30 + 2\ 598 \cdot 6$$

$$= 1\ 818\ 600 + 77\ 940 + 15\ 588$$

$$= 1\ 912\ 128$$

$$\begin{array}{r} 2\ 598 \times \\ 736 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15\ 588 + \\ 77\ 940 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 818\ 600 \\ 191\ 2128 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 818\ 600 \\ 191\ 2128 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 818\ 600 \\ 191\ 2128 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 818\ 600 \\ 191\ 2128 \\ \hline \end{array}$$

Zero fiind element neutru față de adunare, zerourile nu se mai scriu.

POT MAI MULT

Cu câte zerouri se termină numărul $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 24 \cdot 25$?

Rezolvare: Zerourile de la sfârșitul numărului sunt obținute din înmulțirile $2 \cdot 5$. Așadar, vom afla câte produse parțiale $2 \cdot 5$ conține produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 24 \cdot 25$. Întrucât numărul factorilor 5 este mai mic decât numărul factorilor 2, vom afla câți factori 5 sunt. Aceștia apar la numerele: 5, $10 = 2 \cdot 5$, $15 = 3 \cdot 5$, $20 = 4 \cdot 5$ și $25 = 5 \cdot 5$, în total 6 factori, deci numărul n se termină cu 6 zerouri.

EXERSEZ

1 Alegeți produsul corect:

a) $34 \cdot 25 =$ 620 850 200

b) $60 \cdot 30 =$ 524 180 1\ 800

c) $78 \cdot 24 =$ 1\ 872 1\ 782 1\ 812

d) $167 \cdot 89 =$ 14\ 863 5\ 963 993

e) $269 \cdot 7 =$ 1\ 203 693 1\ 883

f) $1\ 260 \cdot 1\ 000 =$ 260\ 000 1\ 260\ 000 2\ 600

2 Efectuați produsele:

a) $27 \cdot 6$; b) $348 \cdot 93$; c) $5\ 234 \cdot 896$

astfel:

I) estimați rezultatul;

II) calculați exact;

III) comparați rezultatul exact cu estimarea.

4 Efectuați produsele:

a) $36 \cdot 21 \cdot 10$; b) $1\ 089 \cdot 34 \cdot 200$;

c) $35\ 879 \cdot 67$; d) $1\ 200 \cdot 45\ 000$;

e) $XLI \cdot XIV$; f) $38\ m \cdot 79$.

3 Completați tabelul cu distanțele (în metri) parcurse și desenați un grafic pentru fiecare copil.

	Alex	Bianca	Dana	Cristi
1 minut	90	75	64	83
4 minute				
9 minute				
15 minute				

5 Aflați un număr de:

a) 30 de ori mai mare decât 80;

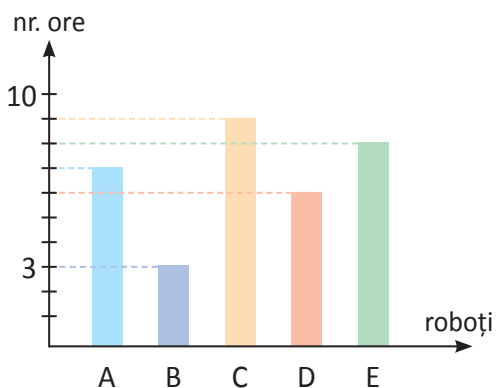
b) 305 de ori mai mare decât 700;

c) 560 de ori mai mare decât cel mai mic număr de 3 cifre.

6 Efectuați cât mai simplu folosind comutativitatea și asociativitatea înmulțirii:

- a) $4 \cdot 16 \cdot 5$; b) $20 \cdot 47 \cdot 5$; c) $250 \cdot 150 \cdot 4$; d) $12 \cdot 32 \cdot 5$;
 e) $70 \cdot 235 \cdot 1 \cdot 250$; f) $1\,200 \cdot 17 \cdot 30$; g) $7\,500 \cdot 156 \cdot 40$; h) $39\,000 \cdot 11 \cdot 110 \cdot 3\,750 \cdot 0 \cdot 39$.

7 Un robot montează 18 telefoane pe oră. Câte telefoane montează în 6 zile roboții A, B, C, D și E, dacă lucrează zilnic numărul de ore reprezentat în diagramă?



8 Se dau numerele din tabelul de mai jos.

49	121	100
48	37	3
27	4	19
12	81	59
144	36	64
8	25	7
2	18	13
12	0	1

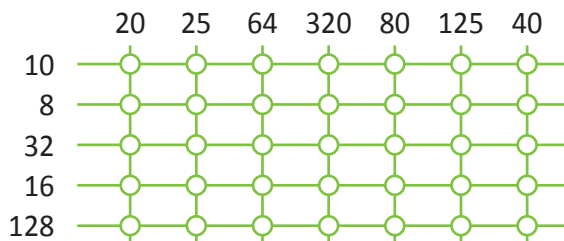
Găsiți perechile de numere al căror produs este 144. Există 3 numere al căror produs este 144?

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

9 Papetăriile A, B, C, D și E au achiziționat creioane colorate conform datelor din tabel. Reprezentați într-o diagramă cu bare numărul de creioane achiziționate de fiecare papetărie.

	A	B	C	D	E
Număr de pachete	2	5	7	8	9
Număr de cutii dintr-un pachet	12	3	5	4	7
Număr de creioane dintr-o cutie	5	12	10	15	7

10 Alegeți factorii produsului $a \cdot b = 640$.



11 Comparați produsele și completați casetele cu: „=”, „>” sau „<”.

- a) $234 \cdot (456 \cdot 378)$ $(234 \cdot 456) \cdot 378$;
 b) $206 \cdot (400 \cdot 778)$ $(204 \cdot 773) \cdot 405$;
 c) $1 \cdot 209$ $209 \cdot 1$;
 d) $243 \cdot 342 \cdot 432$ $432 \cdot 243 \cdot 342$.

12 Potrivii factorii pentru ca produsul lor să fie 1 116.

558	279	93	36	62	124
31	18	9	4	2	12

3.3 Factor comun

ÎMI AMINTESC!

Alex parcurge 79 metri într-un minut. Dacă aleargă la început 8 minute și apoi, după o pauză, mai aleargă 15 minute, câți metri a parcurs Alex?

Metoda I: Calculăm câți metri parcurge Alex în 8 minute, apoi în 15 minute și adunăm rezultatele:

$$79 \cdot 8 + 79 \cdot 15 = 632 + 1\,185 = 1\,817$$

Metoda a II-a: Calculăm câte minute aleargă Alex, apoi înmulțim cu 79:

$$79 \cdot (8 + 15) = 79 \cdot 23 = 1\,817$$

Obținem de fiecare dată 1 817.

Răspuns: Alex parcurge 1 817 m.

Așadar,

$$79 \cdot 8 + 79 \cdot 15 = 79 \cdot (8 + 15)$$



Spunem că **am scos factor comun** pe 79, operație care permite să calculăm mai rapid suma celor două produse.



ÎNȚELEG

Știm că: $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$ sau $a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$
oricare ar fi numerele naturale a, b și c oricare ar fi numerele naturale a, b și $c, b \geq c$.

Deoarece în cele două produse $a \cdot b$ și $a \cdot c$ factorul a se repetă, numărul a se numește *factor comun*, iar egalitățile exprimă *scoaterea factorului comun*. Aplicând comutativitatea înmulțirii, scoaterea factorului comun poate fi scrisă și astfel:

$b \cdot a + c \cdot a = (b + c) \cdot a$ sau $b \cdot a - c \cdot a = (b - c) \cdot a$
oricare ar fi numerele naturale a, b și c oricare ar fi numerele naturale a, b și $c, b \geq c$.

APLIC

Efectuați calculele după ce ați scos factorul comun:

- a) $2 \cdot 5 + 7 \cdot 5$; b) $8 \cdot 29 - 8 \cdot 25$; c) $200 \cdot 9 + 5 \cdot 700 - 100$;
d) $157 \cdot 23 + 543 \cdot 23$; e) $1\,200 + 5 \cdot 100 - 800$; f) $2\,017 \cdot 2\,019 - 2\,017 \cdot 2\,018$.

Exemplu: $12 \cdot 45 + 19 \cdot 45 - 11 \cdot 45 = 45 \cdot (12 + 19 - 11) = 45 \cdot 20 = 900$.

POT MAI MULT

Scrieți ca produs sumele: a) $\overline{ab} + \overline{ba}$; b) $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$.

Rezolvare: Scriem numerele $\overline{ab}, \overline{abc}$ etc. ca sume de sute, zeci și unități: $\overline{ab} = a \cdot 10 + b$, $\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$ etc.

$$a) \overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 10a + a \cdot 1 + 10b + b \cdot 1 = a \cdot (10 + 1) + b \cdot (10 + 1) = 11a + 11b = 11 \cdot (a + b).$$

$$b) \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b = (100 + 10 + 1)a + (100 + 10 + 1)b + (100 + 10 + 1)c = 111a + 111b + 111c = 111(a + b + c).$$

EXERSEZ

1 Scrieți ca produse de 2 și apoi de 3 factori numerele:

- | | | | |
|--------|------------|---------|-----------|
| a) 12; | b) 28; | c) 200; | d) 1 000; |
| e) 49; | f) 34; | g) 48; | h) 2 800; |
| i) 13; | j) 12 586; | k) 169; | l) 6 000. |

2 Calculați cât mai simplu:

- | | |
|---|---|
| a) $2 \cdot 9 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 5$; | b) $32 \cdot 17 + 32 \cdot 11 - 32 \cdot 8$; |
| c) $13 \cdot 90 + 20 \cdot 13 - 26 \cdot 5$; | d) $12 \cdot 25 + 50 \cdot 13 - 75 \cdot 9$; |
| e) $13 \cdot 1\,000 + 200 \cdot 3 - 26 \cdot 500$; | f) $19\,000 + 2\,000 - 11\,000$; |
| g) $239 \cdot 180 - 360 \cdot 103 - 90$; | h) $505 \cdot 6 - 101 \cdot 12 + 202 \cdot 5$. |

3 Scoateți mai întâi factorul comun și apoi calculați:

- | | |
|---|--|
| a) $2 \cdot a + 2 \cdot b$, dacă $a + b = 0$; | b) $7 \cdot a - 7 \cdot b$, dacă $a - b = 30$; |
| c) $3 \cdot a + 3 \cdot b - 3 \cdot c$, dacă $a + b - c = 0$; | d) $2 \cdot a + 10 \cdot b$, dacă $a + 5b = 43$; |
| e) $14 \cdot a - 2 \cdot b$, dacă $7a - b = 17$; | f) $10 \cdot x + 15 \cdot y - 5 \cdot z$, dacă $2x + 3y - z = 39$; |
| g) $ax + bx$, dacă $a + b = 57$ și $x = 134$; | h) $ax - bx$, dacă $a - b = 89$ și $x = 756$; |
| i) $ax - (bx + cx)$, dacă $a - (b + c) = 47$ și $x = 13$; | j) $167 \cdot 568 + 568 \cdot 833$; |
| k) $2\,019 \cdot 2\,018 - 18 \cdot 2\,019 - 2\,000 - 2\,000 \cdot 2\,017$; | |
| l) $20\,017 \cdot 2\,019 - 2\,018 \cdot 2\,017 + 2\,018 \cdot 2\,020 - 2\,019 \cdot 2\,018$. | |

4 Identificați cel mai mare factor comun al produselor:

Exemplu: produsele $8 \cdot 7$ și $10 \cdot 14$ au cel mai mare factor comun pe 28 pentru că $8 \cdot 7 = 2 \cdot 28$, iar $10 \cdot 14 = 5 \cdot 28$.

- | | | |
|-------------------------------------|--|-------------------------------------|
| a) $235 \cdot 7$ și $25 \cdot 7$; | b) $235 \cdot 71$ și $235 \cdot 7$; | c) $12 \cdot 11$ și $6 \cdot 7$; |
| d) $90 \cdot 23$ și $45 \cdot 13$; | e) $3 \cdot 4 \cdot 22$ și $9 \cdot 11 \cdot 23$; | f) 34 și $17 \cdot 23$; |
| g) $67 \cdot 10 \cdot 3$ și 60 ; | h) $11 \cdot 13$ și $5 \cdot 7$; | i) $49 \cdot 10$ și $25 \cdot 14$; |
| j) $12 \cdot 7$ și $8 \cdot 11$; | k) $20 \cdot 13$ și $15 \cdot 17$; | l) $45 \cdot 51$ și $34 \cdot 25$. |

5 Alegeți cel mai mare factor comun:

- | | | | |
|---|-----|-----|-----|
| a) $8 \cdot 7 + 10 \cdot 14$ | 28 | 70 | 14 |
| b) $235 \cdot 7 - 25 \cdot 7$ | 7 | 35 | 235 |
| c) $90 \cdot 23 + 45 \cdot 13$ | 5 | 45 | 90 |
| d) $125 \cdot 8 - 75 \cdot 4$ | 100 | 8 | 25 |
| e) $3 \cdot 4 \cdot 22 + 9 \cdot 11 \cdot 23$ | 88 | 33 | 66 |
| f) $35 \cdot 6 \cdot 8 - 10 \cdot 7 \cdot 3$ | 21 | 210 | 70 |

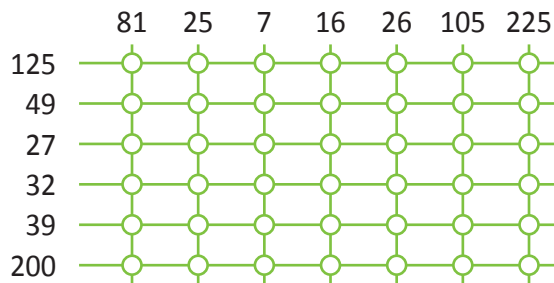
6 Calculați sumele folosind factorul comun:

- | |
|------------------------------------|
| a) $12 + 14 + 16 + 18 + 20$; |
| b) $36 + 39 + 42 + 45 + 48$; |
| c) $45 + 50 + 55 + 60 + 65$; |
| d) $66 + 77 + 88 + 99 + 110$; |
| e) $888 + 999 + 1\,110 + 1\,221$; |
| f) $34 + 51 + 68 + 85 + 102$. |

7 Găsiți unde s-a dat greșit factorul comun și rezolvați corect:

- a) $3 \cdot 25 + 3 \cdot 17 = 3 \cdot (25 + 17)$;
- b) $2 \cdot 21 + 2 \cdot 14 = 14 \cdot (3 + 2)$;
- c) $ax + bx - cx = x \cdot (a + b - c)$, a, b, c și x sunt numere naturale;
- d) $500 \cdot 2 + 300 \cdot 3 - 100 = 100 \cdot (10 + 9)$;
- e) $9y - 7y + y = y \cdot (9 - 7 + 1)$, y este număr natural;
- f) $12a + 20a - 4a = 4a \cdot (3 + 5)$, a este număr natural.

8 Alegeți perechile de numere care pot fi scrise ca produse cu cel puțin un factor în comun:



ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

9 Din depozitul de cărți se trimit pachete cu manuale, ca în tabel. Dacă manualele de matematică, limba română și istorie sunt câte 30 într-un pachet, iar celelalte sunt câte 20 într-un pachet, realizați un grafic cu numărul de cărți expediate în fiecare oraș:



	Matematică	Limba română	Biologie	Fizică	Muzică	Istorie
Brașov	87	46	10	56	94	37
Iași	41	79	87	33	60	90
Satu Mare	25	32	12	61	37	23
Bacău	17	23	34	52	34	30
Craiova	12	16	20	47	23	22

10 Calculați sumele:

- a) $2 + 4 + 6 + \dots + 18 + 20$;
- b) $11 + 22 + 33 + \dots + 110 + 121$;
- c) $111 + 222 + 333 + \dots + 999$;
- d) $5 + 10 + 15 + \dots + 845 + 850$.

11 Aflați numerele naturale a, b, c , $a < b < c$ dacă:

- a) $7a + 7b + 7c = 21$; b) $5a + 5b + 5c = 20$;
- c) $8a + 8b + 8c = 48$; d) $3a + 6b + 9c = 42$.

12 Arătați că $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = \overline{ac} + \overline{cb} + \overline{ba}$.

SUNT CAMPION

13 Aflați:

- a) numerele \overline{abc} pentru care $a \cdot b + a \cdot c = 12$ și $b + c = 4$;
- b) pentru câte numere \overline{abc} are loc relația $8a + 8b + 8c = 72$;
- c) numărul \overline{abc} dacă $5\overline{abc} = 3 \cdot \overline{abc}4$;
- d) diferența $d = (3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + 89 \cdot 90) - (2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + \dots + 88 \cdot 89)$.



4. Împărțirea

4.1 Împărțirea cu rest 0 a numerelor naturale

ÎMI AMINTESC!

La o competiție sportivă, cei 84 de elevi ai claselor a V-a formează echipe de 12 elevi.



Câte echipe se pot forma?

- 1) $84 - 12 = 72$
- 2) $72 - 12 = 60$
- 3) $60 - 12 = 48$
- 4) $48 - 12 = 36$
- 5) $36 - 12 = 24$
- 6) $24 - 12 = 12$
- 7) $12 - 12 = 0$

Scădem în mod repetat câte 12 elevi și reținem numărul de scăderi.



$$\text{Deci: } 84 - 12 - 12 - 12 - 12 - 12 - 12 - 12 = 0$$

de 7 ori

Se pot forma 7 echipe.

Cele 7 scăderi repetate cu 12 le scriem ca împărțire astfel: $84 : 12 = 7$ sau $\frac{84}{12} = 7$

Ultimul rest fiind 0, *împărțirea este exactă*.

84 împărțit la 12 este egal cu 7
sau
84 supra 12 este egal cu 7

ÎNȚELEG

Împărțirea se efectuează prin scăderea repetată a împărțitorului din deîmpărțit. Câtul este egal cu numărul de scăderi efectuate până când ultimul rest este zero sau mai mic decât împărțitorul.

Să reținem:

Deîmpărțit (D) : Împărțitor (Î) = Cât (C)

sau

$$\frac{D}{\hat{I}} = C, \hat{I} \neq 0$$

OBSERV

$$\begin{array}{ccccc} 84 & \xrightarrow{: 12} & 7 & \xrightarrow{\cdot 12} & 84 \\ 12 & \xrightarrow{\cdot 7} & 84 & \xrightarrow{: 7} & 12 \end{array}$$

Împărțirea este operația inversă înmulțirii, iar înmulțirea este operația inversă împărțirii.



Astfel, putem efectua:

Proba împărțirii $84 : 12 = 7$

1) prin înmulțire: $12 \cdot 7 = 84$ sau $7 \cdot 12 = 84$

2) prin împărțire: $84 : 7 = 12$

Proba înmulțirii $7 \cdot 12 = 84$

1) prin împărțire: $84 : 12 = 7$ sau $84 : 7 = 12$

2) prin înmulțire: $12 \cdot 7 = 84$

Așadar, $\hat{I} \cdot C = D, C \cdot \hat{I} = D$ sau $D : C = \hat{I}, \hat{I} \neq 0, C \neq 0$.

De asemenea,

- $84 : 6 = 14$, iar $6 : 84 = ?$

Așadar, $84 : 6 \neq 6 : 84$ ne arată că **împărțirea nu este comutativă**.

- $(84 : 6) : 2 = 7$, iar $84 : (6 : 2) = 28$.

Rezultă că: $(84 : 6) : 2 \neq 84 : (6 : 2)$ adică **împărțirea nu este asociativă**.

- $8 : 1 = 8$, iar $1 : 8 = ?$

Deci $8 : 1 \neq 1 : 8$ ne arată că **împărțirea nu are pe unu ca element neutru**.



N-am înțeles de ce s-a scris $\hat{1} \neq 0, C \neq 0$.

Dacă, de exemplu, $5 : 0 = n$, proba $0 \cdot n = 0$ ne arată că împărțirea $5 : 0$ este imposibilă, n fiind orice număr natural. La fel și împărțirea $0 : 0$ este imposibilă.



Așadar, spunem că **împărțirea cu zero nu are sens sau nu este definită**.

În schimb, $0 : n = 0$ pentru că $0 \cdot n = 0$, unde n este orice număr natural nenul.

APLIC

Efectuați, folosind algoritmi de calcul de mai jos: $5\,022 : 27$; $4\,950 : 18$; $21\,634 : 29$.

Exemplu: $25\,241 : 43 = ?$

Algoritm I:

$$\begin{aligned} 25\,241 &= 252 \cdot 100 + 41 = (215 + 37) \cdot 100 + 41 = (5 \cdot 43 + 37) \cdot 100 + 41 = 500 \cdot 43 + 3\,741 = \\ &= 500 \cdot 43 + 374 \cdot 10 + 1 = 500 \cdot 43 + (344 + 30) \cdot 10 + 1 = 500 \cdot 43 + (8 \cdot 43 + 30) \cdot 10 + 1 = \\ &= 500 \cdot 43 + 80 \cdot 43 + 301 = 580 \cdot 43 + 301 = 580 \cdot 43 + 7 \cdot 43 = 587 \cdot 43 \end{aligned}$$

Algoritm II:

P_1 :
$$\begin{array}{r} 25241 \mid 43 \\ \underline{215} \\ 3741 \end{array}$$
 Aproximăm câtul $252 : 43 \approx 5$ prin lipsă

P_2 :
$$\begin{array}{r} 25241 \mid 43 \\ \underline{215} \\ 3700 \end{array}$$
 Calculăm $5 \cdot 43 = 215$ și scădem din 252

P_3 :
$$\begin{array}{r} 25241 \mid 43 \\ \underline{215} \\ 3740 \end{array}$$
 Coborâm cifra 4 lângă restul obținut la pasul anterior

P_4 :
$$\begin{array}{r} 25241 \mid 43 \\ \underline{215} \\ 3740 \end{array}$$
 Aproximăm câtul $374 : 43 \approx 8$ prin lipsă

P_5 :
$$\begin{array}{r} 25241 \mid 43 \\ \underline{215} \\ 374 \\ \underline{344} \\ 30 \end{array}$$
 Calculăm $8 \cdot 43 = 344$ și scădem din 374

P_6 :
$$\begin{array}{r} 25241 \mid 43 \\ \underline{215} \\ 374 \\ \underline{344} \\ 301 \end{array}$$
 Coborâm cifra 1 lângă restul obținut la pasul anterior

P_7 :
$$\begin{array}{r} 25241 \mid 43 \\ \underline{215} \\ 374 \\ \underline{344} \\ 301 \end{array}$$
 Calculăm $301 : 43 = 7$, $7 \cdot 43 = 301$ și scădem

$$\begin{array}{r} 25241 \mid 43 \\ \underline{215} \\ 374 \\ \underline{344} \\ 301 \\ \underline{301} \\ 0 \end{array}$$
 Semnul „=” de la final este pentru zero.

POT MAI MULT

1) Exprimați cu ajutorul literelor proprietățile împărțirii observate mai înainte.

Exemplu: $(a : b) : c \neq a : (b : c)$, oricare ar fi numerele naturale diferite a , b și c ; b și c nenule.

2) Puneți paranteze astfel încât egalitățile să fie adevărate:

$$64 : 16 : 8 = 32;$$

$$81 : 9 \cdot 27 : 3 = 1;$$

$$625 : 125 : 5 \cdot 5 = 5;$$

$$490 \cdot 24 : 14 \cdot 21 = 40;$$

$$150 : 25 \cdot 3 = 2;$$

$$300 \cdot 75 : 25 = 300 : 25 \cdot 75.$$

EXERSEZ

1 Alegeți câtul corect:

a) $230 : 10 =$

d) $576 : 48 =$

b) $120 : 5 =$

e) $900 : 15 =$

c) $288 : 4 =$

f) $1\ 440 : 120 =$

2 Aflați câturile împărțirilor următoare: a) $144 : 6$; b) $875 : 25$; c) $1\ 170 : 26$;

astfel: I) estimați rezultatul; II) calculați exact; III) comparați rezultatul exact cu estimarea.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

3 Completați tabelul cu timpul (în minute) necesar pentru parcurgerea distanțelor (în metri). Care dintre copii realizează cel mai mic timp? De ce oare?

Viteză \ Distanță	Alex 45 m/min.	Bianca 60 m/min.	Dana 30 m/min.	Cristi 90 m/min.
180	4	?	?	?
360				
900				
2 700				

4 Efectuați împărțirile și apoi faceți proba lor:

a) $676 : 8$;

b) $123\ 000 : 1\ 000$;

c) $345 : 5$;

d) $448 : 8$;

e) $945\text{ g} : 15$;

f) $11\ 948\text{ km} : 58$;

g) $6\ 837 : 43$;

h) $27\ 782 : 58$;

i) $83\ 172 : 87$;

j) $\text{MMDXLIV} : \text{LIII}$;

k) $3\ 864 : 6 : 23 : 7$;

l) $36\ 324 : 18$.

5 Aflați un număr de:

a) 30 de ori mai mic decât 90;

b) 35 de ori mai mic decât 7 000;

c) 6 ori mai mic decât cel mai mic număr de 3 cifre diferite;

d) 12 ori mai mic decât cel mai mare număr de patru cifre diferite.

6 Completați tabelul cu numărul de echipe de copii care se pot forma:

Nr. copii \ Echipa de	12	10	24	16
240	20	?		
720				
3 120				
46 080				

7 Care dintre afirmații sunt adevărate (A) și care sunt false (F)?

- a) $312 : 4 = 106 : 2$; b) $2\,000 : 100 < 2\,000 : 1\,000$;
 c) $0 : 78 = 71 : 1$; d) $400 : 50 \cdot 2 = 400 : (50 \cdot 2)$;
 e) $0 : 679 > 680 : 680$; f) $80 \cdot 16 : 2 = 80 \cdot (16 : 2)$;
 g) $(175 : 35) : 5 > 175 : (35 : 5)$; h) $(1 + 3 + 5 + \dots + 19) : 10 = 10$.

8 Se dau numerele din tabelul de mai jos. Găsiți numerele care se împart exact la 9.

289	82	81
199	456	909
33	39	522
100	108	123
495	216	0
244	729	625
27	24	702
7 704	990	919

9 Potrivii numerele pentru ca restul împărțirii lor să fie 0.

54	13
144	10
132	17
280	36
51	11
65	19

10 Comparați câturile și completați cu „=”, „>” sau „<”:

- a) $140 : 14$ $140 : 10$; b) $4\,005 : 5$ $405 : 5$; c) $320 : (32 : 2)$ $(320 : 32) : 2$;
 d) $0 : 20$ $20 : 1$; e) $24 : 12$ $12 : 24$; f) $625 : (25 : 5)$ $625 : 25 : 5$.

11 Alegeți perechile de numere care prin împărțire dau câtul 24.

	30	16	28	322
672	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
384	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
720	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7 728	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

12 Completați tabelul alăturat. Ce observați?

a	b	a : b	a : (a : b)	b · (a : b)
75 192	78			
12 000	400			
	35	10		
16 353		69		

13 Reconstituiți împărțirile:

- a)
$$\begin{array}{r} *** \\ *8 \overline{) 8*} \\ =*5 \\ ** \\ == \end{array}$$
 b)
$$\begin{array}{r} ***** \\ 4** \overline{) *6} \\ =4*0 \\ *9* \\ =28* \\ *** \\ === \end{array}$$
 c)
$$\begin{array}{r} ***4* \\ 1*28 \overline{) 2**} \\ =1**6 \\ **** \\ ==== \end{array}$$

SUNT CAMPION

14 a) Un număr este format din grupul de cifre 2 018 care se repetă de 2 039 de ori. Ce cifră se află pe locul 1 024? Dar pe locul 2 020?

b) Numărul $\overline{7abcde}$ împărțit la numărul $\overline{abcde7}$ dă câtul 4 și restul 0. Aflați numărul \overline{abcde} .

c) Aflați câtul împărțirii numărului $5 + 55 + 505 + 5\,005 + 50\,005 + \dots + \underbrace{500\dots05}_{\text{de 9 ori}}$ la 55.

4.2 Împărțirea cu rest a numerelor naturale

ÎMI AMINTESC!

Într-un depozit de cărți, cele 8 597 de manuale de matematică sunt ambalate în pachete de câte 24 de cărți. Câte pachete complete se obțin?

Efectuăm împărțirea $8\,597 : 24$ cu algoritmul împărțirii învățat la împărțirea cu rest 0. Obținem câtul 358 și restul 5, diferit de zero și $5 < 24$. Este o împărțire cu rest nenul.

Cărțile sunt ambalate în 358 de pachete complete.

Scriem $8\,597 : 24 = 358$ (rest 5), care înseamnă:

$$\begin{array}{r} 8597 \mid 24 \\ \underline{72} \\ 139 \\ \underline{120} \\ =197 \\ \underline{192} \\ ==5 \end{array}$$

$$8\,597 = 24 \cdot 358 + 5, \quad 5 < 24$$

Deîmpărțit (D)
 Împărțitor (Î)
 Cât (C)
 Rest (R)
 $R < Î$

Proba împărțirii



De ce n-am rezolvat problema prin scăderea repetată a lui 24?

Deîmpărțitul $8\,597 \approx 9\,000$, iar $24 \approx 20$, atunci numărul de scăderi este de ordinul sutelor.



Am fi avut nevoie de mai mult timp pentru numărul de scăderi foarte mare...

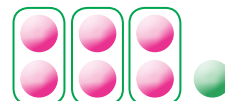


ÎNȚELEG

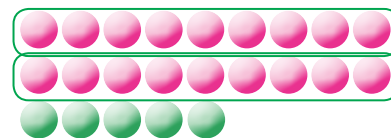
Fiind date două numere naturale D și \hat{I} , $\hat{I} \neq 0$, prin împărțirea lor obținem alte două numere naturale C și R , astfel încât $D = \hat{I} \cdot C + R$ și $0 \leq R < \hat{I}$. Numerele C și R sunt unice.

Exemple:

1) Pentru $D = 7$, $\hat{I} = 2$ obținem $C = 3$, $R = 1$, iar $7 = 2 \cdot 3 + 1$, $1 < 2$.



2) Pentru $D = 23$, $\hat{I} = 9$ obținem $C = 2$, $R = 5$, iar $23 = 9 \cdot 2 + 5$, $5 < 9$.



3) Pentru $D = 5$, $\hat{I} = 11$ obținem $C = 0$, $R = 5$ iar $5 = 11 \cdot 0 + 5$, $5 < 11$.



APLIC

Aflați cel mai mare număr natural care:

a) împărțit la 5, ne dă câtul 3; b) împărțit la 15, ne dă câtul 8; c) împărțit la 79, ne dă câtul 86.

Exemplu: împărțit la 18, ne dă câtul 9.

Rezolvare: Dacă notăm cu n numărul căutat, atunci $n : 18 = 9$ (rest r), $r < 18$. Scriem proba împărțirii $n = 18 \cdot 9 + r$, $r < 18$. Numărul cel mai mare este obținut pentru $r = 17$ și deci $n = 162 + 17 = 179$. Observăm că cel mai mic număr cu proprietatea cerută se obține pentru $r = 0$ și este 162.

POT MAI MULT

- Prin împărțirea unui număr natural oarecare n la 2 obținem câtul k și restul 0 sau 1.

$$n = \underbrace{\begin{matrix} ***** & \dots & * \\ ***** & \dots & * \\ ***** & \dots & * \end{matrix}}_{k \text{ stelute pe fiecare rând}} = 2 \cdot k \quad \text{sau} \quad n = \underbrace{\begin{matrix} ***** & \dots & * \\ ***** & \dots & * \\ ***** & \dots & * \end{matrix}}_{k \text{ stelute pe fiecare rând}} * = 2 \cdot k + 1$$

Am găsit astfel cum se scrie un număr par sau impar oarecare. Așadar:

Formula numărului par este $n = 2k$, iar a numărului impar este $n = 2k + 1$.

- Asemănător, prin împărțirea unui număr natural n la 3 obținem câtul k și restul 0, 1 sau 2. *E

$$n = \underbrace{\begin{matrix} ***** & \dots & * \\ ***** & \dots & * \\ ***** & \dots & * \end{matrix}}_{k \text{ stelute pe fiecare rând}} = 3 \cdot k \quad n = \underbrace{\begin{matrix} ***** & \dots & * \\ ***** & \dots & * \\ ***** & \dots & * \end{matrix}}_{k \text{ stelute pe fiecare rând}} * = 3 \cdot k + 1 \quad n = \underbrace{\begin{matrix} ***** & \dots & * \\ ***** & \dots & * \\ ***** & \dots & * \end{matrix}}_{k \text{ stelute pe fiecare rând}} ** = 3 \cdot k + 2$$

Am arătat astfel cum se scrie un număr natural oarecare:

$$n = 3k \quad \text{sau} \quad n = 3k + 1 \quad \text{sau} \quad n = 3k + 2$$

În tabel sunt scrise câteva numere obținute cu aceste formule:

k	0	1	2	3	4	5	...	1 000	1 001	...
$2k$	0	2	4	6	8	10	...	2 000	2 002	...
$2k + 1$	1	3	5	7	9	11	...	2 001	2 003	...
$3k$	0	3	6	9	12	15	...	3 000	3 003	...
$3k + 1$	1	4	7	10	13	16	...	3 001	3 004	...
$3k + 2$	2	5	8	11	14	17	...	3 002	3 005	...

EXERSEZ

1 Efectuați împărțirile și apoi faceți proba lor:

- | | | | |
|------------------|----------------------|-----------------|-----------------|
| a) 67 : 5; | b) 123 : 7; | c) 348 : 15; | d) 448 : 28; |
| e) 945 g : 12; | f) 7 948 km : 18; | g) 10 930 : 27; | h) 27 782 : 43; |
| i) 83 172 : 506; | j) MMMDLXXV : DLXII; | k) 99 867 : 16. | |

2 Alegeți restul corect al împărțirilor:

a) $239 : 10 =$ 9 23 0

b) $127 : 5 =$ 24 25 2

c) $289 : 4 =$ 1 2 72

d) $580 : 48 =$ 12 4 0

e) $900 : 15 =$ 1 60 0

f) $1\ 540 : 120 =$ 120 0 100

3 Efectuați împărțirile: a) $178 : 6$; b) $679 : 25$; c) $7170 : 56$;

astfel: I) estimați rezultatul; II) calculați exact; III) comparați rezultatul exact cu estimarea.

4 Asociați împărțitorul cu deîmpărțitul pentru a obține câtul 8 și restul 12.

14 20 33 251 100

2\ 020 276 812 283 172 124

5 Aflați cel mai mare număr natural care:

a) împărțit la 2 ne dă câtul 56;

b) împărțit la 4 ne dă câtul 18;

c) împărțit la 7 ne dă câtul 89;

d) împărțit la 19 ne dă câtul 9.

6 Notați în tabel numărul pachetelor de cărți (complete) care se pot forma:

Nr. cărți \ Pachet de	6	10	12	24
248	41	?		
495				
1\ 748				
57\ 142				
409\ 395				

7 Care dintre relații poate reprezenta proba unei împărțiri? Justificați!

a) $3 \cdot 5 + 2 = 17$;

b) $3 \cdot 7 + 5 = 26$;

c) $7 = 0 \cdot 8 + 7$;

d) $89 - 1 = 4 \cdot 22$;

e) $234 = 10 \cdot 22 + 14$;

f) $17 = 0 \cdot 8 + 17$;

g) $n = 5k + 3$;

h) $n = 7k + 9$,

n și k sunt numere naturale nenule.

8 Se dau numerele din tabelul de mai jos. Găsiți numerele care împărțite la 15 dau același rest.

49	123	102
50	36	65
31	140	17
20	82	11
144	125	74
95	25	8
170	35	13
80	90	181

9 Care dintre afirmații sunt adevărate (A) și care sunt false (F)?

a) $4 : 2 = 2 : 4$;

b) $8 : 1 = 8$;

c) $120 : 6 > 120 : 4$;

d) $0 : 9 = 0$;

e) $9 : 0 = 9$;

f) $5 : 5 = 1$;

g) $1 : 7 = 7$;

h) $1 : 1 = 0$;

i) $(8 : 4) : 2 = 8 : (4 : 2)$;

j) $170 : 5 > 180 : 5$;

k) $200 \cdot 10 : 5 = 200 \cdot (10 : 5)$;

l) $300 \cdot 10 : 5 = (300 \cdot 10) : 5$.

10 Alegeți perechile de numere care dau același rest la împărțirea cu 10.

	625	24	64	102	28	125	86	397	105
615	○	○	○	○	○	○	○	○	○
656	○	○	○	○	○	○	○	○	○
58	○	○	○	○	○	○	○	○	○
602	○	○	○	○	○	○	○	○	○
285	○	○	○	○	○	○	○	○	○
577	○	○	○	○	○	○	○	○	○
584	○	○	○	○	○	○	○	○	○

11 Potriveți numerele pentru ca restul împărțirii lor să fie 7.

67	53
59	8
99	9
113	26
95	10
88	92

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

12 Completați tabelul probând de fiecare dată rezultatul obținut:

a)				b)					
D	î	C	R	D + î	D - î	D	î	C	R
450	35			58				16	7
	9	20	4		102			32	9
6 150		46	124			89		17	4
246 897	328			149	57				
90 045	682			565			19		14
	248	59	167	125	71				

13 Aflați resturile împărțirii unui număr natural n la 5 și găsiți formulele posibile ale lui n . Completați tabelul cu câteva numere obținute cu aceste formule.

k	0	1	2	3	4	5	...	1 000	1 001	...
$5k$						
?										

SUNT CAMPION

- 14** a) Aflați numerele \overline{abc} care împărțite la \overline{bc} dau câtul 3 și restul 28.
 b) Un număr natural împărțit la 13 dă restul 7. Numărul se mărește cu 9. Aflați restul împărțirii numărului obținut la 13. Aceeași întrebare pentru numărul mărit cu 32.
 c) Un număr natural împărțit la 8 dă restul 5. Aflați restul împărțirii dublului său la 8. Aceeași întrebare pentru triplul numărului.
 d) Se dau numerele $a = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2\,021 + 2\,023$ și $b = 2 + 4 + 6 + \dots + 2\,020 + 2\,022$. Aflați câtul și restul împărțirii lui a la b .

5. Recapitulare

5.1 Numere naturale și operații cu numere naturale

Citesc, scriu și descompun numere naturale

Clasa miliardelor			Clasa milioaneilor			Clasa miilor			Clasa unităților		
s	z	u	s	z	u	s	z	u	s	z	u
				8	5	7	1	9	3	6	2
		8	7	0	0	2	7	3	1	7	3
							2	7	8	0	6
6	2	1	9	1	3	8	7	9	2	6	5

- 1 Citiți numerele din tabel.
- 2 Numiți clasa și ordinul pentru fiecare cifră a numerelor date.
- 3 Ce reprezintă poziția cifrei 8?
- 4 Ce numere sunt *pare*? Dar *impare*?
- 5 Scrieți și apoi citiți *predecesorul* și *succesorul* fiecărui număr.
- 6 Descompuneți două numere din tabel ca în figură.

$$\begin{array}{c}
 5 \ 287 \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 5\ 000 + 200 + 80 + 7
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 27\ 806 \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \quad \searrow \\
 20\ 000 + 7\ 000 + 800 + 0 + 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 9\ 276 \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 9\ 000 + 200 + 70 + 6
 \end{array}$$

Reprezint pe axă, compar, ordonez, aproximez și rotunjesc.

Se dau numerele: $a = 234\ 618$; $b = 342\ 678$; $c = 423\ 172$; $d = 324\ 486$; $e = 243\ 287$; $f = 432\ 867$.

- 1 În ce ordine sunt reprezentate punctele A(a), C(c), E(e) și F(f) pe o axă a numerelor naturale?
- 2 Comparați numerele a și e .
- 3 Ordonați descrescător numerele b , d , c și f .
- 4 Aproximați numerele a și d la mii, prin lipsă și prin adaos.
- 5 Rotunjiți numerele b și c la zeci, apoi la zeci de mii.

Adun, scad, înmulțesc și împart numere naturale.

Se dau numerele: $a = 84$; $b = 978$; $c = 2\ 472$; $d = 500$; $e = 293\ 287$; $f = 432\ 000$.

- 1 Efectuați: $b + c$; $a + d + b$; $f - e$; $f - c - a$; $b \cdot a$; $f \cdot a + d \cdot a$.
- 2 Aflați câtul și restul împărțirilor: $b : a$; $f : d$.

5.2 Exerciții și probleme cu numere naturale

1 Alegeți ordinul potrivit fiecărei cifre a numărului 790 165 348:

	7	9	0	1	6	5	3	4	8
mii	○	○	○	○	○	○	○	○	○
sute	○	○	○	○	○	○	○	○	○
zeci de mii	○	○	○	○	○	○	○	○	○
sute de mii	○	○	○	○	○	○	○	○	○
unități	○	○	○	○	○	○	○	○	○
zeci	○	○	○	○	○	○	○	○	○
milioane	○	○	○	○	○	○	○	○	○

2 Câte zeci conține numărul 32 406? Aceeași întrebare pentru numărul de sute și de mii. Completați apoi tabelul:

Numărul	Număr de zeci	Număr de sute	Număr de mii
2 017			
32 406			
420 041			
6 231 899			
83 134 955			

4 Efectuați sumele:

a) $27 + 62$; b) $348 + 593$; c) $1\,234 + 7\,896$

astfel:

I) estimați totalul;

II) calculați exact;

III) comparați rezultatul exact cu estimarea.

6 Aflați cel mai mare număr de trei cifre care împărțit la:

a) 23 dă restul 7; b) 67 dă restul 54;
c) la 678 dă restul 245; d) la 734 dă restul 429.

8 Determinați numerele naturale \overline{abc} pentru care $a \cdot b = 6$ și $b + c = 6$.

10 a) Scrieți toate numerele naturale care se pot forma cu trei cifre identice;

b) Scrieți toate numerele naturale de două cifre care se pot forma cu cifre pare distincte, apoi cu cifre impare distincte; ce observați?

3 Cristi, Alex, Bianca și Dana observă numărul 65 098 275 și fac afirmațiile:

Cristi: conține cifra 98;

Alex: cifra unităților de milioane și cifra unităților sunt diferite;

Bianca: numărul are 65 098 de mii;

Dana: nu are clasa milioanei.

Cine are dreptate? De ce? Formulați încă două afirmații adevărate și două false despre numărul dat.

5 Aflați un număr:

a) cu 3 000 mai mare decât 680;

b) cu 2 305 mai mic decât 6 700;

c) de 560 ori mai mare decât cel mai mic număr de 3 cifre consecutive;

d) de 12 ori mai mic decât cel mai mare număr de patru cifre diferite.

7 Scrieți toate numerele de forma $\overline{a3b}$ cu:

a) suma cifrelor 6;

b) produsul cifrelor 12.

9 Determinați numerele de forma $\overline{a2b5}$, știind că produsul cifrelor sale este 180.

11 Câte numere naturale de trei cifre sunt egale cu răsturnatul lor? Prezentați modul de numărare. Un astfel de număr se numește palindrom.

12 Câte numere cuprinse între 200 și 300 conțin:

a) cifra 5; b) cifra 9; c) 27 de zeci; d) toate cifrele egale; e) cel puțin două cifre egale.

Formulați și rezolvați o problemă asemănătoare.

13 Mergând pe autostradă cu automobilul, Alex observă marcajul A cu numărul 29 km, iar peste puțin timp observă marcajul B cu numărul 76 km. Ce distanță a parcurs Alex între cele două marcaje? Completați tabelul cu distanțele corespunzătoare.

Marcajul A (km)	29		8	0	58		43	69	845
Marcajul B (km)	76	294			256	74	109	452	
Distanța parcursă între marcaje (km)		92	0	19		48			468

14 Suma cifrelor unui număr natural n este 20. Aflați:

a) cel mai mic număr n ; b) cel mai mic număr n de patru cifre; c) cel mai mic număr n de cinci cifre.

15 Câte numere de patru cifre au:

a) cel mult 14 sute; b) cel puțin 14 sute; c) mai mult de 14 sute; d) mai puțin de 14 sute?

16 a) Aflați trei numere pare consecutive dacă suma lor este: 18; 72; 708; 2 018.

b) Aflați trei numere impare consecutive dacă suma lor este: 19; 103; 2 017; 2 135.

17 Dimineața termometrul indica 6°C , iar la prânz 14°C . Ce creștere de temperatură s-a înregistrat? Completați tabelul cu temperaturile corespunzătoare.

Temperatura dimineața ($^{\circ}\text{C}$)	6		5	0	19		25	2	
Temperatura la prânz ($^{\circ}\text{C}$)	14	20			34	6	40		39
Creșterea de temperatură ($^{\circ}\text{C}$)		6	14	1		3		0	26

18 Pentru a placi cu gresie pardoseala unei camere se cumpără cutii de câte 10 plăci. Dacă lucrarea necesită 135 plăci, aflați câte cutii sunt necesare.

19 Aproximarea prin lipsă la zeci a unui număr este 470 și se află pe axa numerelor naturale la 6 unități de număr. Aflați numărul.

20 Rotunjirea la sute a unui număr este 3 400, iar distanța pe o axă față de număr este de 34 unități. Aflați numărul. Câte soluții sunt?

21 Reconstituiți adunările și scăderile:

a) $\begin{array}{r} 20^* + \\ 4^*1 \\ \hline *70 \end{array}$	b) $\begin{array}{r} *1^* + \\ 1^*2 \\ \hline 348 \end{array}$	c) $\begin{array}{r} 236 + \\ *3 \\ \hline *6^* \end{array}$	d) $\begin{array}{r} 9^* + \\ *72 \\ \hline 4^*6 \end{array}$	e) $\begin{array}{r} 261^*3 + \\ **475 \\ \hline 98^*5^* \end{array}$	f) $\begin{array}{r} *47^*4 + \\ *9^* \\ \hline 2^*355 \end{array}$
g) $\begin{array}{r} 39^* - \\ 1^*5 \\ \hline *17 \end{array}$	h) $\begin{array}{r} *237 - \\ *8^* \\ \hline 7^*9 \end{array}$	i) $\begin{array}{r} 2^*3^*7^* - \\ *6^*203 \\ \hline *275^*8 \end{array}$	j) $\begin{array}{r} 961^{**} - \\ **475 \\ \hline 28^*51 \end{array}$	k) $\begin{array}{r} *47^*8 - \\ *9^* \\ \hline 2^*365 \end{array}$	l) $\begin{array}{r} 39^*73^* - \\ **62^*3 \\ \hline 146^*86 \end{array}$

Partea I

La exercițiile 1 și 2 scrieți numai rezultatele, la exercițiul 3 scrieți (A) dacă propoziția este adevărată și (F) dacă propoziția este falsă.

1 Efectuați:

a) $234\,509 + 379\,12$; b) $20\,207 - 1\,559$; c) $3476 \cdot 98$; d) $26\,144 : 43$.

2 Ce sumă au coordonatele punctelor Q, R, T și U din figura alăturată?



3 Precizați pentru fiecare din propozițiile de mai jos dacă este adevărată sau falsă:

- a) Cel mai mic număr par de patru cifre este 1 000.
- b) Numărul 50 012 este mai mare decât 50 201.
- c) Numărul 190 780 este cu 77 348 mai mic decât numărul 268 128.
- d) Numărul care împărțit la 54 dă câtul 683 și restul 19 este numărul 36 945.

Partea a II-a

La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

1 a) Dacă $a - b = 967$, iar $c = 84$, calculați $a \cdot c - b \cdot c$.

b) Alex alergă duminică 2 162 m, iar luni 1 786 m. Dacă Alex parcurge 94 m într-un minut, cu câte minute a alergat Alex mai mult duminică decât luni? Rezolvați în două moduri.

2 Determinați:

- a) un număr natural a știind că $a \approx 2\,780$, rotunjit la zeci; câte astfel de numere sunt?
- b) suma $5 + 6 + 7 + \dots + 56$.

3 Un număr este cu 19 mai mic decât un altul. Dacă împărțim suma lor la diferența lor obținem câtul 17 și restul 7, aflați numerele.

4 a) Determinați numerele de forma $\overline{a2b5}$ știind că produsul cifrelor este 240.

b) Scrieți în ordine crescătoare numerele: \overline{aaa} ; \overline{baa} ; \overline{aab} ; \overline{bbb} dacă $a > b$.



Punctaj acordat:					
	1	2	3	4	Total
Partea I (45 p.)	20 p. (4 × 5 p.)	5 p.	20 p. (4 × 5 p.)	–	
Partea a II-a (45 p.)	15 p. a) 5 p.; b) 10 p.	13 p. a) 7 p.; b) 6 p.	7 p.	10 p. (2 × 5 p.)	

Se acordă 10 puncte din oficiu. Pentru a afla nota finală, rezultatul obținut se împarte la 10.

6. Ridicarea la putere

6.1 Puterea cu exponent natural a unui număr natural

Legenda jocului de șah

Se spune că regele Persiei a vrut să-l răsplătească pe creatorul jocului de șah pentru frumusețea acestui joc și l-a întrebat ce bogății dorește să-i dea. Acesta a răspuns: „Nu-ți cer decât atât: pe primul pătrat al tablei de șah – un bob de grâu, pe al doilea pătrat – două boabe, pe următorul – patru boabe și așa mai departe, pe fiecare pătrat – dublul numărului de boabe de pe pătratul precedent”. Mare a fost mirarea regelui când, dorind să satisfacă modesta dorință a inventatorului, a constatat că tot grâul din țară nu era de ajuns...



OBSERV

Pe tabla de șah 3×3 din figură am pus boabe de grâu: ca în legenda jocului de șah. Calculați numărul de boabe de grâu puse pe pătratele A, B, C și D.

Rezolvare: Întrucât numărul de boabe de grâu puse pe un pătrat se obține prin dublarea numărului de boabe de pe pătratul precedent, avem de efectuat înmulțirile:

$$(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32 \rightarrow A$$

$$(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64 \rightarrow B$$

$$(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 = 128 \rightarrow C$$

$$(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256 \rightarrow D$$

		B
		C
	A	D

ÎNȚELEG

Pentru a prescurta scrierea $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{8 \text{ factori}}$ am folosit notația 2^8 și citim „2 la a 8-a”.

$$2^8 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{8 \text{ factori}}$$

↑ exponent
↓ bază

2 se numește **bază**, iar **8** se numește **exponent**.

Așadar, $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$; $a^1 = a$; $a^0 = 1$, pentru orice $a \neq 0$. Scrierea 0^0 nu are sens.

Puterea cu exponent natural a unui număr natural se obține prin înmulțirea repetată a numărului cu el însuși de câte ori indică exponentul. Am obținut astfel o nouă operație, ridicarea la putere, care este o operație de ordinul III.



Înmulțirea este o adunare repetată cu un același termen.

Iar puterea este o înmulțire repetată cu un același factor.



APLIC

1) Calculăm puterile:

$2^1 = 2; 2^2 = 4; 2^3 = 8; 2^4 = 16$
cu baza 2 și exponenții: 1, 2, 3 și respectiv 4.

$3^3 = 27; 3^4 = 81; 3^5 = 243; 3^0 = 1$
cu baza 3 și exponenții: 3, 4, 5 și respectiv 0.

ACTIVITATE PRACTICĂ

După ce urmăriți filmul, împăăturiți succesiv o coală de hârtie format A4, prin îndoire, și aflați câte părți obțineți dacă repetați operația de: a) 2 ori; b) 4 ori; c) 7 ori. Stabiliți o formulă (regulă).

2) Scriem ca putere produsele:

$$a = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^{11};$$

$$b = 2 \cdot 4 \cdot 8 = 2 \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^6;$$

$$c = 16 \cdot 32 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^9;$$

$$d = 3 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 3 = 3 \cdot 3 \cdot (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \cdot 3 = 3^7;$$

$$e = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6 \text{ (un milion);}$$

$$f = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^9 \text{ (un miliard);}$$

$$g = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10}_{12 \text{ factori}} = 10^{12} \text{ (un bilion);}$$

$$h = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10}_{100 \text{ factori}} = 10^{100} \text{ (un google).}$$

POT MAI MULT

1) Calculăm ultima cifră a unei puteri.

Vom nota ultima cifră a numărului n cu $u(n)$. De exemplu $u(58) = 8$, $u(3^4) = 1$. Vom calcula $u(5^{2027})$, $u(4^{676})$ și $u(2^{2019})$. Organizăm calculele într-un tabel menționând numai ultima cifră a numărului. Semnul * ține locul celorlalte cifre. Ultima cifră se obține prin înmulțirea bazei puterii cu ultima cifră a puterii precedente, mai exact, avem formula $u(a^n) = u[u(a^{n-1}) \cdot a]$.

$a^n \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5^n	5	25	125	625	*5	*5	*5	*5	*5
4^n	4	16	64	256	*4	*6	*4	*6	*4
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Observăm că:

$u(5^{2027}) = 5$, $u(4^{676}) = 4$
iar pentru 2^{2019} se constată că se repetă grupa de cifre 2, 4, 8, 6 pe care o vom numi *periodă*. Aflăm de câte ori se repetă perioada în șirul $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots, 2^{2018}, 2^{2019}$. Efectuăm împărțirea $2019 : 4$ și obținem câtul 504 și restul 3 deci:

$$2019 = 4 \cdot 504 + 3$$

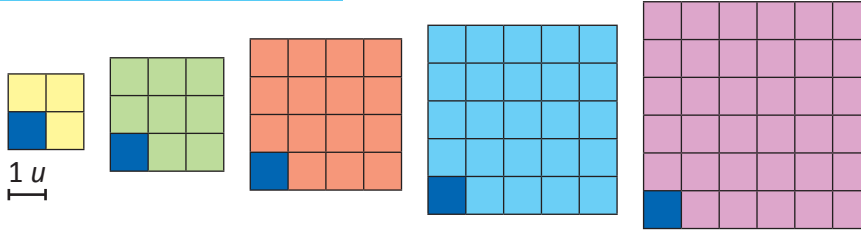
iar: $u(2^{2019}) = u(2^3) = 8$.

2) Alegeți ultima cifră a puterilor:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10^{29}	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
5^{18}	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
9^{625}	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
2^{954}	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
16^{57}	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
23^{2020}	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
17^{2021}	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
4^{48}	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
2018^{2018}	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
901^{987}	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

6.2 Pătratul unui număr natural

OBSERV



De câte pătrățele albastre avem nevoie pentru a acoperi fiecare figură?



Observăm că este nevoie de $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, $25 = 5^2$, respectiv $36 = 6^2$.

ÎNȚELEG

Numerele 4, 9, 16, 25 și 36 se pot scrie ca puteri cu exponentul 2. Astfel de numere se numesc **pătrate perfecte**.

În general, un număr natural oarecare n este **pătrat perfect** dacă se poate scrie ca o putere cu baza a și exponentul 2, $n = a^2$, unde a este număr natural.

Se folosește expresia „**pătrat perfect**” pentru că n se poate reprezenta ca un pătrat cu latura de a unități.

Un număr care nu se poate scrie ca a^2 nu este pătrat perfect, de exemplu 7. Iar expresia a^2 se citește și „ **a pătrat**” în loc de „ a la a doua”.



APLIC

1) Scrieți pătratele perfecte de forma \overline{ab} observând că $3^2 = 9$ și $4^2 = 16$ iar $10^2 = 100$. Aflați apoi câte pătrate perfecte de forma \overline{abc} există.

2) Arătați că numerele 8, 56, 93 și 246 nu sunt pătrate perfecte.

Model: Arătăm că 6 și 45 nu sunt pătrate perfecte. Căutăm două pătrate perfecte consecutive (bazele lor sunt numere consecutive) între care să fie situat numărul dat. Astfel, $4 = 2^2 < 6 < 3^2 = 9$, iar $36 = 6^2 < 45 < 7^2 = 49$. Deci, pentru 6 nu mai putem găsi un număr natural a astfel încât $6 = a^2$. La fel pentru 45. Deci, 6 și 45 nu sunt pătrate perfecte.

POT MAI MULT

Stabilim dacă un număr este pătrat perfect folosind ultima cifră a numărului. Urmărim datele din tabel, unde n este un număr natural oarecare.

$u(n)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u(n^2)$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Observăm că ultima cifră a unui pătrat perfect nu poate fi 2, 3, 7 sau 8. Așadar, *numerele naturale care se termină cu 2, 3, 7 sau 8 nu sunt pătrate perfecte*. Exemple: 12, 23, 17, 18.

Iar dacă ultima cifră a unui număr natural este 0, 1, 4, 5, 6 sau 9, nu rezultă întotdeauna că numărul este pătrat perfect. De exemplu, 14 se termină cu 4 și 14 nu este pătrat perfect.

EXERSEZ

1 Asociați puterile date cu bazele lor:

8 9 0 1 56 13

8^3 56^0 1^8 13^1 0^9

2 Potrivii exponenții cu puterile de la care provin:

3 9 0 7 5 1

7^5 5^7 3 0^3 10^9 11^0

4 Calculați puterile:

- a) 4^2 ; b) 4^3 ; c) 4^4 ; d) 5^3 ; e) 5^4 ; f) 5^5 ; g) 4^0 ; h) 2^{10} ;
 i) 0^9 ; j) 1^{80} ; k) 0^0 ; l) 2^{32} ; m) 5^{6^1} ; n) 12^2 ; o) 2017^{2018^0} .

3 Alegeți rezultatul corect:

- a) $5^3 =$ 53 15 125
 b) $3^4 =$ 12 81 27
 c) $2^6 =$ 12 32 64
 d) $4^5 =$ 1 024 256 20
 e) $6^3 =$ 36 216 18
 f) $10^4 =$ 10 000 1 000 40

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

5 Completați tabelul:

puterea	baza	exp	puterea	baza	exp	puterea	baza	exp
8	2		27	3		1 000	10	
32	2		144	12		256		2
125	5			17	2	64		3
	2	9	81	3		128		7
9	3			13	2	169		2
625	5			9	2	1	2019	
	10	4	121	11		0		

6 Scrieți produsele ca putere:

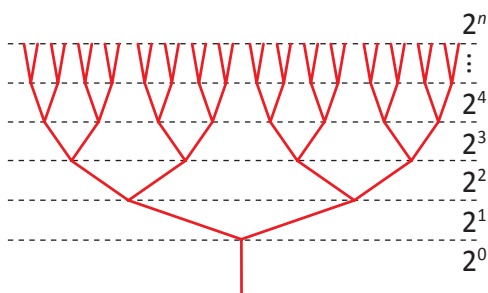
- a) $19 \cdot 19 \cdot 19 \cdot 19 \cdot 19 \cdot 19 \cdot 19 \cdot 19 \cdot 19$;
 b) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 27 \cdot 3$;
 c) $3 \cdot 27 \cdot 3 \cdot 81$;
 d) $5 \cdot 25 \cdot 125 \cdot 625 \cdot 5$;
 e) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 1000 \cdot 1000$.
 f) $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64 \cdot 128$;
 g) $7 \cdot 7 \cdot 49 \cdot 343 \cdot 7 \cdot 49 \cdot 7$.

JOC

7 Cine găsește toate pătratele perfecte din tabel câștigă.

49	59	100	200	225
68	36	289	1 000	125
9	121	16	36	64
12	81	4	1	0
144	189	10 000	25	88

8 Ramurile arborelui din figură se dublează în fiecare zi. Câte ramuri va avea în a 8-a zi? Dar în a 14-a zi?



10 Estimați ordinul de mărime al numărului de părți obținute prin îndoirea unei coli de hârtie de 40 de ori. (Indicație: $2^{10} \approx 1\,000$)

9 Completați exponenții pentru a obține propoziții adevărate:

- a) $8 = 2^{\square}$; b) $121 = 11^{\square}$; c) $100 = 10^{\square}$;
 d) $9 = 3^{\square}$; e) $81 = 9^{\square}$; f) $4 = 2^{\square}$;
 g) $144 = 12^{\square}$; h) $36 = 6^{\square}$; i) $1\,000 = 10^{\square}$;
 j) $625 = 5^{\square}$; k) $1 = 8^{\square}$; l) $5 = 5^{\square}$;
 m) $225 = 15^{\square}$; n) $27 = 3^{\square}$; o) $10\,000 = 10^{\square}$;
 p) $125 = 5^{\square}$; q) $128 = 2^{\square}$; r) $64 = 2^{\square}$;
 s) $10 = 10^{\square}$; t) $32 = 2^{\square}$; u) $2 = 2^{\square}$;
 v) $16 = 2^{\square}$; w) $25 = 5^{\square}$; x) $243 = 3^{\square}$.

11 Alegeți baza necesară scrierii numărului dat ca o putere.

	625	25	64	100	27	125	81	32	8
baza 2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
baza 3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
baza 5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
baza 9	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
baza 4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
baza 8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
baza 10	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

12 Scrieți numerele 5; 8; 10; 13; 18; 20; 25; 32; 29; 34 și 100 ca sumă de două pătrate perfecte nenule. Model: $29 = 25 + 4 = 5^2 + 2^2$.

13 Zmeul zmeilor are 7 capete și dacă i se taie un cap îi cresc două în locul celui tăiat. Făt-Frumos are un paloș care taie 7 capete dintr-o lovitură. Câte capete are zmeul după 3 lovituri? Dar după 5 lovituri?

SUNT CAMPION

14 Arătați că 2 019 nu este pătrat perfect.

15 Observând că $15^2 = 225$; $25^2 = 625$; $35^2 = 1\,225$; $45^2 = 2\,025$ găsiți o regulă pentru a calcula pătratele numerelor care se termină cu 5. Folosiți apoi regula pentru a calcula 95^2 și 135^2 .

16 Aflați ultima cifră a numărului $2017^{2018} + 2018^{2019} + 2019^{2017}$.

17 Aflați \overline{ab} dacă $\overline{ab} = b^2$. Justificați!



6.3 Reguli de calcul cu puteri

A. Înmulțirea puterilor care au aceeași bază

OBSERV



Cum scriem $7^3 \cdot 7^2$ ca o singură putere?

$$7^3 \cdot 7^2 = (\underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7}_{3 \text{ factori}}) \cdot (\underbrace{7 \cdot 7}_{2 \text{ factori}}) = \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}_{3+2 \text{ factori}} = 7^{3+2} = 7^5$$

Deci $7^3 \cdot 7^2 = 7^{3+2} = 7^5$.

ÎNȚELEG

Așadar

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

unde a, m și n sunt numere naturale oarecare nenule.

Pentru a înmulți două puteri care au aceeași bază, scriem baza neschimbată și adunăm exponenții.

APLIC

- 1) Scrieți ca o singură putere: $7^8 \cdot 7^2$; $2^7 \cdot 2^5$; $5 \cdot 5^4 \cdot 5^2$; $58^0 \cdot 58^{14} \cdot 58^{22}$; $14^{32} \cdot 14^5$.
- 2) Scrieți ca produs de două sau mai multe puteri: 17^7 ; 21^5 ; 9^{17} ; 2^{n+1} ; 5^{a+7} , n și a sunt numere naturale oarecare. Model: $7^{10} = 7^{4+6} = 7^4 \cdot 7^6 = 7^4 \cdot 7^{5+1} = 7^4 \cdot 7^5 \cdot 7$; $9^{x+2} = 9^x \cdot 9^2$, x – număr natural.

B. Împărțirea puterilor care au aceeași bază

OBSERV



Cum scriem $7^5 : 7^3$ ca o singură putere?

$$7^5 : 7^3 = (\underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}_{5 \text{ factori}}) : (\underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7}_{3 \text{ factori}}) = \underbrace{[(7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7)]}_{5 \text{ factori}} : (\underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7}_{3 \text{ factori}}) = 7 \cdot 7 \cdot 1 = 7^2 = 7^{5-3}$$

Deci $7^5 : 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$.

ÎNȚELEG

Așadar

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

unde a, m și n sunt numere naturale oarecare nenule, $m \geq n$.

Pentru a împărți două puteri care au aceeași bază, scriem baza neschimbată și scădem exponenții.

APLIC

- 1) Scrieți ca o singură putere: $7^8 : 7^2$; $2^7 : 2^5$; $5^4 : 5^2$; $58^{24} : 58^{24}$; $14^{32} : 14^5$.
- 2) Scrieți ca un cât de două puteri: 7^2 ; 3^8 ; 2^0 ; 17 ; 15^4 ; 123^2 ; 508^{24} ; 8^{2018} ; 9^{2^3} .

C. Puterea unei puteri

OBSERV



Cum scriem $(8^2)^3$ ca o singură putere? Dar $(2^4)^5$?

$$(8^2)^3 = \underbrace{8^2 \cdot 8^2 \cdot 8^2}_{3 \text{ factori}} = 8^{2+2+2} = 8^{3 \cdot 2} = 8^6$$

Deci $(8^2)^3 = 8^{3 \cdot 2} = 8^6$.

Asemănător, calculăm:

$$(2^4)^5 = 2^{4 \cdot 5} = 2^{20}; (5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6; (92^{14})^5 = 92^{14 \cdot 5} = 92^{70}; (792^4)^0 = 792^{0 \cdot 4} = 792^0 = 1.$$

ÎNȚELEG

Așadar

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

unde a , m și n sunt numere naturale oarecare nenule.

Pentru a calcula puterea unei puteri, scriem baza neschimbată și înmulțim exponenții.

APLIC

1) Scrieți ca o singură putere: $(7^8)^3$; $(2^7)^5$, $(5^{27})^0$; $(83^7)^3$; $(7^8)^{3^2} \cdot 7^2$; $(2^7)^5 \cdot 2^5$; $58 \cdot (58^4)^3 \cdot 58^{22}$.

2) Scrieți ca puterea unei puteri: 3^{14} ; 9^5 ; 25^3 ; 81^7 ; $7^8 \cdot 7^2$; $(2^7)^5 \cdot 2^5$; 5^{2n} ; 49^n .

Model: $7^{12} = (7^2)^6$; $36^n = (6^2)^n = (6^n)^2$, n – număr natural.

D. Puterea unui produs

OBSERV



Cum scriem $(5 \cdot 8)^3$ ca produs de puteri?

$$(5 \cdot 8)^3 = (5 \cdot 8) \cdot (5 \cdot 8) \cdot (5 \cdot 8) = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3 \text{ factori}} \cdot \underbrace{8 \cdot 8 \cdot 8}_{3 \text{ factori}} = 5^3 \cdot 8^3.$$

Deci $(5 \cdot 8)^3 = 5^3 \cdot 8^3$.

ÎNȚELEG

Așadar

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

unde a , b și n sunt numere naturale oarecare nenule.

Pentru a ridica la o putere un produs, ridicăm fiecare factor la acea putere și înmulțim puterile.

APLIC

1) Scrieți ca produs de puteri: $(7 \cdot 8)^3$; $(5 \cdot 11 \cdot 7)^5$; 12^6 ; $(13^7 \cdot 9)^3$; $(7^8 \cdot 12^4)^2$; $[(3^7)^5 \cdot 2^5]^{14}$; $[a \cdot (b^4)^2 \cdot c^8]^2$; $(a^n \cdot b^m)^p$, unde a , b , c , m , n și p – numere naturale nenule.

2) Scrieți ca puterea unui produs: $3^4 \cdot 5^4$; $9^3 \cdot 15^2$; $7^8 \cdot 9^4$; $(27)^5 \cdot 9^5$; $5^n \cdot 9^n$; $49^n \cdot 5^{3n}$, n – număr natural.

Model: $49^3 \cdot 5^2 = [(7^2)^3 \cdot 5^2] = (7^3 \cdot 5)^2$; $36^n \cdot 8^{3n} = (6^2)^n \cdot 8^{3n} = (6^2 \cdot 8^3)^n$, n – număr natural.

POT MAI MULT

1) Arătați că numerele următoare sunt pătrate perfecte: $a = 7^2 \cdot 11^2$; $b = 4^{13} \cdot 9$; $c = 4^9 \cdot 9^7$; $d = 2^6 \cdot 3^6$; $e = 5^{24} \cdot 7^6$; $f = 6^5 \cdot 24^3$.

2) Arătați că numerele următoare nu sunt pătrate perfecte: $a = 7^{21} \cdot 11^{21}$; $b = 2^{101} + 10$; $c = 2^{50} + 3^{41}$; $d = 1^9 + 2^9 + 3^9 + 4^9 + 5^9 + 6^9 + 7^9$; $e = 3^{n+2} \cdot 2^n + 3^n \cdot 2^{n+2}$.

6.4 Compararea puterilor

A. Puteri cu aceeași bază

OBSERV



Calculăm puterile lui 2 ca în tabel.

Care număr este mai mare: 2^4 sau 2^6 ?

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256

Constatăm că: $2^4 = 16 < 64 = 2^6$ și rezultă $2^4 < 2^6$ unde $4 < 6$. Deci $2^4 < 2^6$ pentru că $4 < 6$.

ÎNȚELEG

Dacă

$$m < n \text{ atunci } a^m < a^n$$

unde a, m și n sunt numere naturale, $a \neq 0, a \neq 1$.

Dintre două puteri cu aceeași bază este mai mare puterea cu exponentul mai mare.

B. Puteri cu același exponent

OBSERV



Calculăm puterile lui 2 și 3 ca în tabel.

Care număr este mai mare: 2^4 sau 3^4 ?

n	0	1	2	3	4	5
2^n	1	2	4	8	16	32
3^n	1	3	9	27	81	243

Constatăm că: $2^4 = 16 < 81 = 3^4$ și rezultă $2^4 < 3^4$ unde $2 < 3$. Deci $2^4 < 3^4$ pentru că $2 < 3$.

ÎNȚELEG

Dacă

$$a < b \text{ atunci } a^n < b^n$$

unde a, b și n sunt numere naturale nenule.

Dintre două puteri cu același exponent este mai mare puterea cu baza mai mare.

C. Puteri cu baze și exponenți diferiți

OBSERV



Care număr este mai mare: 2^3 sau 3^2 ?

$2^3 = 8 < 9 = 3^2$,
deci $2^3 < 3^2$.



Dar dintre 2^{30} și 3^{20} , care este mai mare?

Aducem puterile la același exponent.

$$2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10} \quad \text{și} \quad 3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}$$

Iar din $8^{10} < 9^{10}$ obținem că $2^{30} < 3^{20}$.



ÎNȚELEG

Așadar

Pentru a compara două puteri care au bazele diferite și exponenții diferiți, vom aduce puterile, atunci când este posibil, fie la aceeași bază, fie la aceiași exponenți.

APLIC

Comparați puterile:

- a) 2^5 și 2^6 ; b) 7^3 și 7^6 ; c) 12^9 și 12^{10} ;
 d) 2^{15} și 2^{26} ; e) 2^5 și 34^6 ; f) 12^6 și 2^6 ;
 g) 34^{16} și 34^{60} ; h) 2^{60} și 3^{40} ; i) 8^5 și 4^6 ;
 j) 9^3 și 3^6 ; k) 16^7 și 32^5 ; l) 25^5 și 5^{10} .

PROIECT

Realizați o planșă cu toate regulile de calcul cu puteri și cu regulile de comparare a două puteri. Fiecare regulă să fie urmată de o formulă și de 3 exemple de aplicare. Folosiți cel puțin 3 culori și colajul pentru a pune în evidență formulele și aplicațiile.

POT MAI MULT

1) Scrieți numerele 25^{2023} și 25^{2024} ca sumă de două pătrate.

Rezolvare: $25^{2023} = 25 \cdot 25^{2022} = (16 + 9) \cdot 25^{2022} = (4^2 + 3^2) \cdot (25^{1011})^2 = (4^2 \cdot (25^{1011})^2 + 3^2 \cdot (25^{1011})^2) = (4 \cdot 25^{1011})^2 + (3 \cdot 25^{1011})^2$.

Iar $25^{2024} = 25^2 \cdot 25^{2022}$ și $25^2 = 625 = 225 + 400 = 15^2 + 20^2$.

2) Ordonăți crescător numerele: 222 ; 22^2 ; 2^{22} ; 2^{2^2} .

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

Completați tabelul aplicând regulile de calcul cu puteri:

n	m	a	b	$a^n \cdot a^m$	$b^n : b^m$	$(a^n)^m$	$(a \cdot b)^n$	$(a \cdot b)^m$	$(b^m)^n$
3	2	7	5						
3	1	15	10						
1	0	4	2						
				2^6	5^2				
					13^3		143^9		

EXERSEZ

1 Scrieți ca o singură putere și alegeți exponentul corect:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$10^9 : 10^3$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$5^3 \cdot 5^6$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$(3^2)^4$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$2^5 \cdot 3^5$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$(16^0)^7$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$7^{2020} : 7^{2019}$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
13^{2^3}	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$3^4 - 2 \cdot 3^3$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$2^3 + 2^3$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

2 Potrivii puterile:

$5^3 \cdot 5^4$	→	5^8
$5^9 : 5^6$	→	5^9
$(5^4)^2$	→	10^3
$(5^2 \cdot 5)^3$	→	5^0
$5^8 : 5^8$	→	5^3
$5^3 \cdot 2^3$	→	5^7

3 Alegeți rezultatul corect:

- a) $4^7 \cdot (4^9 : 4^6)^1 : (4^2)^3 =$ 4⁶ 4⁴ 4⁵
- b) $(5^{10} \cdot 25)^2 : 5^{15} =$ 25⁵ 5²⁵ 5⁹
- c) $(9^{10} \cdot 27)^2 : 3^5 =$ 9²⁵ 3⁶⁵ 3⁵¹
- d) $(3^4 \cdot 4^4)^1 : 12^3 =$ 12⁸ 12⁷ 12
- e) $(5^{11} \cdot 3^{11}) : 15^{10} =$ 15 15²¹ 1
- f) $2^{15} \cdot 4^{20} \cdot 8^3 =$ 2⁶⁴ 2⁶¹ 8³⁸
- g) $1024 \cdot 512 : 2^{15} =$ 4 2³ 16

4 Completați casetele pentru a obține rezolvarea corectă:

$$(2^2 \cdot 3)^{17} : 2^{34} + 3^9 : 9^3 - 9^8 \cdot 3^5 : 3^4 =$$

$$= (\boxed{?} \cdot 3^{17}) : 3^{34} + 3^9 : (\boxed{?})^3 - (3^2)^8 \cdot 3^5 : 3^4 =$$

$$= 3^{17} + 3^9 : 3^6 - (\boxed{?}) \cdot 3^5 : 3^4 = 3^{17} + 3^3 - (\boxed{?}) = 3^3 = 27.$$

5 Comparați puterile:

- a) 5^{14} și 5^{13} ; b) 10^{40} și 10^{50} ; c) 8^{40} și 8^{50} ;
 d) 13^{15} și 17^{10} ; e) 3^{100} și 2^{150} ; f) 7^4 și 7^3 ;
 g) 5^4 și 25^3 ; h) 5^8 și 125^3 ; i) 9^4 și 3^8 .

6 Comparați puterile:

- a) 4^{45} și 6^{30} ; b) 3^{18} și 27^6 ; c) 2^{21} și $2 \cdot 3^{20}$; d) 3^0 și 0^3 ;
 e) 3^{32} și $(2 \cdot 5)^{16}$; f) 10^5 și 5^8 ; g) 5^4 și 25^2 ; h) 3^8 și 2^{12} ;
 i) 4^{30} și 3^{40} ; j) $2^{48} \cdot 3^{30}$ și $2^{60} \cdot 3^{22}$; k) 3^{600} și 2^{1000} ; l) 5^8 și 625^2 ;
 m) 2^{60} și $2^9 \cdot 3^{34}$; n) 2^7 și 5^3 ; o) 10^{20} și 99^{10} ; p) $3^{16} \cdot 6$ și $2^{16} \cdot 9$.

7 Ordonăți crescător puterile:

- a) $10^4, 10^7, 10^5, 10^2, 10^3$; b) $18^4, 10^4, 20^4, 51^4, 11^4$; a) $2^2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$; b) $5 \cdot (3^2 \cdot 3^4)^2 : 9^6$;
 c) $8^5, 4^7, 32^4, 3^{16}, 2^{21}$; d) $3^{33}, 33^3, 3^{33}, 333$. c) $81^4 : 27^5 : 3^1 : 3^0$; d) $(7^5 \cdot 8^3)^2 : (2^9 \cdot 7^{10})$.

SUNT CAMPION

9 Se dau numerele: $x = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+1}$ și $y = 5^{2n+3} \cdot 9^{n+2} + 25^{n+1} \cdot 3^{2n+1}$, unde n este un număr natural oarecare. Calculați câturile $x : 13$ și $y : 17$.

10 Scrieți numerele 13^{2021} și 13^{2022} ca sumă de două pătrate perfecte.

6.5 Scrierea numerelor naturale în baza 10

OBSERV



Cum numărăm steluțele din desenul alăturat? Cum scriem numărul obținut?

Alcătuiți 3 grupe de 10 și reținem restul 4



$$\begin{array}{l} \text{*****} \\ \text{*****} \text{ ****} \\ \text{*****} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{*****} \\ \text{*****} \text{ ****} \\ \text{*****} \end{array}} \right\} = 3 \cdot 10 + 4 = 34 \text{ steluțe}$$

10 steluțe pe fiecare rând

Scrierea $3 \cdot 10 + 4$ este numită descompunerea în baza 10 a lui 34.

ÎNȚELEG



Dar cum procedăm dacă sunt desenate 463 de steluțe?

Alcătuiți 46 de zeci, reținem restul 3. Din cele 46 de zeci alcătuiți 4 grupe de zece zeci (o sută) și reținem restul de 6 zeci: **463**. Calculele se pot organiza ca în figura alăturată.

Algoritmul descompunerii zecimale

$$\begin{array}{r|l} 463 & 10 \\ 40 & 46 \quad | \quad 10 \\ \hline =63 & 40 \quad | \quad 4 \\ 60 & =6 \\ \hline =3 & \end{array}$$

$$463 = 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

Așadar, $4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 463$ este **descompunerea zecimală** sau **descompunerea în baza zece** a lui 463.

Dacă un număr natural are n cifre, atunci baza 10 are exponentul maxim $n - 1$ și corespunde celui mai mare ordin de mărime al numărului.

În general, un număr de patru cifre se scrie astfel:

$$\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0, \text{ cu } a \neq 0.$$

În acest sistem de numărare și scriere folosim 10 cifre arabe și baza 10, adică 10 *unități* formează o grupă numită *zece*, 10 *zeci* formează o grupă numită *sută*, 10 *sute* formează o grupă numită *mie* ș.a.m.d. Numărul este scris cu ajutorul resturilor de unități, zeci, sute, mii etc. care rămân după alcătuirea zecilor, sutelor, miilor etc. Acest sistem este numit **sistem de numerație zecimal pozițional**. Cele 10 cifre arabe folosite se numesc și **cifre zecimale**.

APLIC

- 1) Descompuneți în baza zece numerele: 102; 4 006; 34 067; 801 200 456; 7 390 400 628.
- 2) Efectuați:
 - a) $8 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$;
 - b) $5 \cdot 10^7 + 9 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^0$;
 - c) $5 \cdot 10^n + 8 \cdot 10$, n este număr natural nenul.
- 3) Arătați că numărul $2 \cdot 10^n + 7 \cdot 10^0$ nu este pătrat perfect, unde n este număr natural nenul.
- 4) Descompuneți în mai multe moduri ca sumă de puteri ale bazei 10, numerele: 123; 4 089; 1 930 482; $\overline{2a3}$; $\overline{7a4b}$; \overline{abcabc} .

Model: $8\ 527 = 8 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 = 85 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 = 8 \cdot 10^3 + 527 \cdot 10^0$

6.6 Scrierea numerelor naturale în baza 2

OBSERV



Cum numărăm stelulele desenate mai jos și cum scriem numărul obținut dacă folosim baza 2?

Pasul 1 Alcătuim 4 grupe de 2 unități și reținem restul 1.

*** ** ** ** *

Pasul 2 Din cele 4 „duble” alcătuim 2 grupe de „duble” și reținem restul 0.

*** ** ** ** *

Pasul 3 Cele două „duble de duble” alcătuiesc o grupă de ordin superior și reținem restul 0, ea însăși fiind ultimul rest, anume 1.

*** ** ** ** *



Deci am desenat
 $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 1001_{(2)}$ stelule.

Algoritmul descompunerii binare

$$\begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ 8 & 4 \quad 2 \\ 1 & 4 \quad 2 \quad 2 \\ & 0 \quad 2 \quad 1 \\ & 0 \end{array}$$

$$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1001_{(2)}$$

ÎNȚELEG

Scrierea $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$ este numită **descompunerea în baza 2 a lui 9** sau **descompunerea binară** a lui 9 iar $9_{(10)} = 1001_{(2)}$. Indicii (10) și (2) arată baza de numerație în care este scris numărul. În acest fel, orice număr scris în baza 10 poate fi trecut (scris) în baza 2.

Invers, $1001_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 8 + 1 = 9_{(10)}$, deci un număr scris în baza 2 poate fi trecut în baza 10.



Cum vom proceda dacă vom desena 29 de stelule?

Efectuăm împărțirile succesive ca în figură și avem: $29_{(10)} = 11101_{(2)}$.

În general, un număr în baza 2 de patru cifre se scrie astfel:

$$\overline{abcd}_{(2)} = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2^1 + d \cdot 2^0, \text{ cu } a \neq 0.$$

În acest sistem de numărare și scriere numărul este scris cu ajutorul resturilor de unități, „duble”, „duble de duble” etc. care rămân după alcătuirea acestor grupe.

Acest sistem este numit **sistem de numerație binar pozițional**. Cifrele folosite 0 și 1 se numesc și **cifre binare**.

Algoritmul trecerii lui 29 din baza 10 în baza 2

$$\begin{array}{r|l} 29 & 2 \\ 28 & 14 \quad 2 \\ =1 & 14 \quad 7 \quad 2 \\ & =0 \quad 6 \quad 3 \quad 2 \\ & & 1 \quad 2 \quad 1 \\ & & & 1 \end{array}$$

$$29_{(10)} = 11101_{(2)}$$

APLIC

- 1) Descompuneți în baza 2 numerele: 8; 13; 14; 19; 20; 59; 128; 135; 512; 1 024; 2 023.
- 2) Scrieți în baza 2 numerele: 7; 15; 16; 22; 32; 44; 49; 51; 64; 75; 128; 256; 512; 1 024.
- 3) Treceți în baza 10 numerele scrise în baza 2: 10; 11; 101; 110; 1 001; 1 110 101; 11 000.

ACTIVITATE PRACTICĂ

Există și alte sisteme de numeratie: octal (baza 8) și hexazecimal (baza 16). „Cifrele” hexazecimale sunt cifrele arabe cunoscute și literele A, B, C, D, E, F.

Aplicând cunoștințele de la **Tehnologia informației și a comunicațiilor (T.I.C.)**, explorați aplicațiile „Calculator” și „Paint” sub Windows pentru a pune în evidență utilizarea sistemelor de numeratie binar, octal, zecimal și hexazecimal la codificarea datelor. Pentru „Calculator” folosiți setarea *programmer* din meniul „View”, iar pentru „Paint” folosiți editarea culorilor cu butonul „Edit colors”.

EXERSEZ

- 1 Scrieți descompunerea în baza 10 a numerelor: 128; 2 198; 34 098; 180 974; 2 384 591; 1 000 101.
- 2 Potrivii numerele scrise în baza 10 cu echivalentele lor scrise în baza 2:

1101	1001	1000	101	1111	1010
5	15	10	9	13	8

- 3 Alegeți valoarea în baza 10 a numerelor:

- a) $10\ 010_{(2)} = 14_{(10)} \quad 18_{(10)} \quad 19_{(10)}$
 b) $10\ 000_{(2)} = 16 \quad 32 \quad 28$
 c) $10\ 010\ 111_{(2)} = 144 \quad 128 \quad 151$
 d) $1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^3 = 288 \quad 328 \quad 300$
 e) $111\ 000\ 110\ 010_{(2)} = 3634 \quad 634 \quad 34$
 f) $123_{(16)} = 291 \quad 301 \quad 244$

- 5 Alegeți valorile corecte în baza 10 ale numerelor scrise pe coloană în baza 2.

	68	125	94	64	112	103	84
1 100 111	○	○	○	○	○	○	○
1 110 000	○	○	○	○	○	○	○
1 010 100	○	○	○	○	○	○	○
1 000 000	○	○	○	○	○	○	○
1 000 100	○	○	○	○	○	○	○

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

- 4 Găsiți egalitățile adevărate din tabel, numerele fiind scrise în baza 2, respectiv 10.

$101 = 7$	$100 = 8$	$1\ 000 = 16$
$101 = 5$	$10 = 4$	$1\ 000 = 8$
$1\ 010 = 18$	$10 = 2$	$111 = 13$
$111 = 7$	$1\ 111 = 30$	$1\ 011 = 22$
$10 = 5$	$1\ 111 = 15$	$1\ 001 = 18$

- 6 Descompuneți în mai multe moduri ca sumă de puteri ale bazei 10, numerele: 4 580; 701 809; 55 040 291; $\overline{94a}$; $\overline{72ab}$; $\overline{ab1ab6}$.

SUNT CAMPION

- 7 Aflați baza de numeratie x dacă:
 a) $120_{(x)} = 15_{(10)}$; b) $105_{(x)} = 110\ 110_{(2)}$.
- 8 Aflați $\overline{ab}_{(10)}$ dacă $\overline{ab}_{(10)} + \overline{ba}_{(10)} = 66_{(10)}$.

7. Ordinea efectuării operațiilor și utilizarea parantezelor

7.1 Ordinea efectuării operațiilor

ÎMI AMINTESC!

Într-un exercițiu în care apar adunări și scăderi alături de înmulțiri și împărțiri, rezolvăm mai întâi înmulțirile și împărțirile, apoi adunările și scăderile, în ordinea în care sunt scrise.

Ridicarea la putere, care este o operație de ordinul III, o efectuăm înainte sau după operațiile de ordinul II?



OBSERV

În tabel, la rezolvările corecte am folosit ridicarea la putere ca înmulțire repetată a bazei cu ea însăși și ordinea efectuării operațiilor de ordinul I și II.

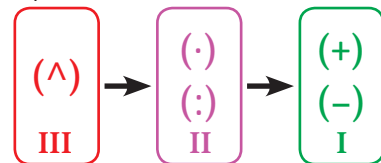


Nr.	Exercițiul	Rezolvare corectă	Rezolvare greșită
1	$2 + 3^2 = ?$	$2 + 3 \cdot 3 = 2 + 9 = 11.$	$2 + 3 = 5$ și $5^2 = 5 \cdot 5 = 25.$
2	$17 - 2^3 = ?$	$17 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 17 - 8 = 9.$	$17 - 2 = 15$ și $15^2 = 15 \cdot 15 = 225.$
3	$5 \cdot 4^2 = ?$	$5 \cdot 4^2 = 5 \cdot 16 = 80.$	$5 \cdot 4^2 = 20^2 = 400.$

ÎNȚELEG

Într-un exercițiu în care apar operații de ordinele I, II și III rezolvăm mai întâi operațiile de ordinul III, apoi operațiile de ordinul II și la sfârșit, operațiile de ordinul I, în ordinea în care sunt scrise.

Așadar:



APLIC

- 1) Calculați: a) $2^1 + 2^2 + 2^3$; b) $4 \cdot 2^1 + 7 \cdot 2^2 - 64 : 2^3$;
 c) $8 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$;
 d) $8^{14} : 2^{12} : 4^{12} - 2^5 - 2^0$; e) $5 \cdot 3^{2021} - 6 \cdot 3^{2020} - 3^{2022}$.

- 2) Potrivii rezultatele:

$3 + 8 \cdot 2$	$3 + 6 : 2$	$4 \cdot 6 - 6$	$6 + 9 : 3$	$1 + 2 \cdot 3$	$2 + 5 : 5$	$3^2 + 1 \cdot 13$
22	7	19	5	3	9	18

7.2 Folosirea parantezelor rotunde, pătrate și acolade

OBSERV

Pe Valea Cerbului am parcurs distanța dintre Poiana Mare și Gura Diham astfel: după ce am mers jumătate din drum, am făcut o pauză pentru poze, apoi am mai mers un sfert din drum și încă 100 de metri. Dacă întregul traseu are 960 m, cât mai aveam de mers până la Gura Diham?



Rezolvare: Până la prima oprire am mers $960 : 2$ metri, apoi am mers $960 : 4 + 100$ metri. Ca să aflăm restul scădem și folosim parantezele rotunde, astfel:

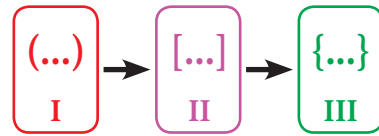
$$(960 - 960 : 2) - (960 : 4 + 100).$$

Deci, mai aveam de mers $(960 - 960 : 2) - (960 : 4 + 100) = (960 - 480) - (240 + 100) = 480 - 340 = 140$ m până la Gura Diham.

ÎMI AMINTESC!

Într-un exercițiu se pot folosi paranteze rotunde (...), pătrate [...] și acolade {...}. Efectuăm operațiile astfel:

- I. Începem cu operațiile din parantezele rotunde.
- II. Continuăm cu operațiile din parantezele pătrate.
- III. La sfârșit facem operațiile din parantezele acolade.



După ce rezolvăm operațiile din parantezele rotunde (mici), parantezele pătrate (drepte) se transformă în paranteze rotunde, iar acoladele în paranteze pătrate.

Exemplu:

$$\begin{aligned}
 & 10 \cdot \{18^2 : 324 + 2 \cdot [(2^2 \cdot 3)^{15} : (2^{29} \cdot 3^{15}) + 1^{26}]\} = \\
 & 10 \cdot \{324 : 324 + 2 \cdot [(2^{30} \cdot 3^{15}) : (2^{29} \cdot 3^{15}) + 1]\} = \\
 & 10 \cdot [1 + 2 \cdot (2 + 1)] = \\
 & 10 \cdot (1 + 2 \cdot 3) = \\
 & 10 \cdot 7 = 70
 \end{aligned}$$

APLIC

Să urmărim tabelul.

Nr.	Folosirea parantezelor	Efectuarea calculelor
1	$5 \cdot 8 + 8^2 - 36 : 4$	$40 + 64 - 9 = 95$
2	$5 \cdot (8 + 8^2) - 36 : 4$	$5 \cdot 72 - 9 = 360 - 9 = 351$
3	$5 \cdot [8 + (8^2 - 36)] : 4$	$5 \cdot (8 + 28) : 4 = 5 \cdot 36 : 4 = 45$
4	$5 \cdot \{8 + [(8^2 - 36) : 4]\}$	$5 \cdot [8 + (28 : 4)] = 5 \cdot (8 + 7) = 5 \cdot 15 = 75$
5	$\{5 \cdot [8 + (8^2 - 36)]\} : 4$	$[5 \cdot (8 + 28)] : 4 = (5 \cdot 36) : 4 = 180 : 4 = 45$

La exercițiul din ultima linie putem renunța la acolade și rezultatul nu se schimbă: $\{5 \cdot [8 + (8^2 - 36)]\} : 4 = 5 \cdot [8 + (8^2 - 36)] : 4 = 45$.

POT MAI MULT

Vom calcula numărul boabelor de grâu cerute de inventatorul jocului de șah din legendă. Numărul boabelor de grâu de pe tabla de șah va fi:

Primul pătrat	$\Rightarrow 1 = 2^0$
Al doilea pătrat	$\Rightarrow 2 = 2^1$
Al treilea pătrat	$\Rightarrow 4 = 2^2$ etc.
\vdots	\vdots
Pătratul al 63-lea	$\Rightarrow 2^{62}$
Pătratul al 64-lea	$\Rightarrow 2^{63}$

Efectuăm apoi suma $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62} + 2^{63}$.
Pentru aceasta calculăm dublul sumei S , anume $2 \cdot S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} + 2^{64}$.

Dar $S = 2 \cdot S - S = (2 - 2) + (2^2 - 2^2) + (2^3 - 2^3) + \dots + (2^{62} - 2^{62}) + (2^{63} - 2^{63}) + 2^{64} - 1 = 2^{64} - 1$.

Estimați cu câte cifre zecimale se scrie numărul 2^{64} .

EXERSEZ

1 Alegeți operația cu care trebuie începută rezolvarea exercițiului. (Am notat cu (^) operația de ridicare la putere.)

	(\cdot)	($:$)	($-$)	($+$)	(\wedge)
$8 - 3 + 5$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$9 + 8 : 4 \cdot 2 - 1$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$4 + 9 \cdot 8 : 2 - 1$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$12 + 2 - 2$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$12^2 : 3 \cdot 2$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

2 Calculați respectând ordinea efectuării operațiilor:

- | | |
|--|----------------------------------|
| a) $2^3 \cdot 8 : 32 + 4$; | b) $(3^4 \cdot 9 - 81) : 2^2$; |
| c) $5 \cdot 2^4 : 20 + 10$; | d) $(2^3 + 100 : 25)^2 - 10$; |
| e) $(10^2 + 5) \cdot (18 - 2^4)$; | f) $(288 - 288 : 2) : 144$; |
| g) $1 \cdot 0 : 1 + 1$; | h) $1 \cdot 12 - 13 : 13 - 11$. |
| i) $0 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot 1 : 1$; | j) $1^0 : 1 - 0^1 + 0$. |

3 I. Alegeți operația care încheie rezolvarea exercițiului:

- | | | | |
|----------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|
| a) $7 + 2 \cdot 3 - 10$ | <input type="radio"/> (\cdot) | <input type="radio"/> ($-$) | <input type="radio"/> ($+$) |
| b) $(3 + 8 : 2)^2$ | <input type="radio"/> (\wedge) | <input type="radio"/> ($+$) | <input type="radio"/> ($:$) |
| c) $(9 \cdot 8 - 2) : 10$ | <input type="radio"/> ($-$) | <input type="radio"/> (\cdot) | <input type="radio"/> ($:$) |
| d) $(10^3 + 1) \cdot (18 - 2^3)$ | <input type="radio"/> (\wedge) | <input type="radio"/> (\cdot) | <input type="radio"/> ($+$) |

II. Alegeți a treia operație în ordinea rezolvării exercițiului:

- | | | | |
|-----------------------------|------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------|
| a) $2^3 \cdot 8 : 32 + 4$ | <input type="radio"/> ($:$) | <input type="radio"/> ($+$) | <input type="radio"/> (\cdot) |
| b) $(3^4 \cdot 9 - 81) : 4$ | <input type="radio"/> (\wedge) | <input type="radio"/> ($-$) | <input type="radio"/> (\cdot) |
| c) $5 \cdot 2^4 : 20 + 10$ | <input type="radio"/> ($:$) | <input type="radio"/> ($+$) | <input type="radio"/> (\cdot) |
| d) $(5 + 100 : 25)^2 - 10$ | <input type="radio"/> (\wedge) | <input type="radio"/> ($:$) | <input type="radio"/> (\cdot) |
- Am notat cu (^) operația de ridicare la putere.

4 Efectuați:

- | | | | |
|--------------------------------|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| a) $16 - 8 : 2^3$; | b) $2 + 2^2 - 6$; | c) $9 - 2^2 \cdot 4^2 : 8$; | d) $2 + 10 : 2 - 6$; |
| e) $2 \cdot 5^6 : 25^2 : 10$; | f) $50 + 50 : 5 \cdot 10$; | g) $12 - 10 + 4^3 : 2^3$; | h) $(2^9 + 2^9) : 2^{10}$. |

5 Stabiliți care dintre afirmații sunt adevărate (A) sau false (F):

- | | | | |
|---|---|--|---|
| a) <input type="checkbox"/> $9 + 6 : 3 = 5$; | b) <input type="checkbox"/> $8 : 1 + 3 = 11$; | c) <input type="checkbox"/> $60 : 5 \cdot 2 = 6$; | d) <input type="checkbox"/> $100 : 10 \cdot 10 = 1$; |
| e) <input type="checkbox"/> $128 : 64 + 64 \cdot 2 - 128 = 2$; | f) <input type="checkbox"/> $20 \cdot 50 + 25^2 - 100 : 5 = 1\ 605$; | | |
| g) <input type="checkbox"/> $12 - 4 : 2^2 + 3^8 : 9^3 - 20 = 0$; | h) <input type="checkbox"/> $(18 - 32 : 2)^4 : (30 - 78 : 3)^2 = 1$. | | |

6 Se dă exercițiul $20 \cdot 50 + 25^2 - 100 : 5$. Puneți convenabil paranteze pentru a obține: a) 13 480; b) 2 300; c) 13 100. Compuneți o problemă asemănătoare.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

7 Corectați exercițiile rezolvate greșit din tabel. Precizați dacă s-a greșit ordinea efectuării operațiilor sau operația însăși.

$40 + 20 : 10 = 6$	$2^3 + 3^3 : 3^3 = 7$	$90 - 75 : 3 = 65$	$2^4 + 3^2 + 0 = 5^6$	$80 - 60 : 10 = 2$
$7^4 : 7^2 \cdot 7^2 = 1$	$81 + 27 : 9 = 84$	$2 + 3 \cdot 5^2 = 5^3$	$3^2 + 3^2 + 3^2 = 3^6$	$25 - 24 : 12 = 23$
$64 : 32 \cdot 16 = 32$	$56 + 63 : 9 = 63$	$48 : 16 \cdot 32 = 96$	$51 : 17 + 17 = 20$	$36 + 72 : 36 = 38$
$2 \cdot 4 \cdot 8^2 = 64^3$	$12 + 16 \cdot 3 = 60$	$2 + 2^2 + 2^3 = 6^5$	$91 : 7 + 26 = 39$	$5^3 - 5^2 - 5 = 5^0$

8 Efectuați:

- a) $15 + 2 \cdot 5 - 5^2$; b) $10 : 2 \cdot 5 - 5^2$; c) $250 : 5 \cdot 2 + 10 : 5 \cdot 2 - 100$;
 d) $2^2 \cdot 4^2 \cdot 8^2 : 16^3$; e) $3^6 \cdot 9^3 \cdot 27^2 : 81^4$; f) $1 \cdot 4 : 2 \cdot 6 : 3 \cdot 5 : 5 : 4$;
 g) $12^2 + (2^2 \cdot 3)^2 - 24^2 : 2$; h) $10^3 : \{123 + 34 : [(2 \cdot 3^2)^2 : 18 - 1]\}$;
 i) $\{[(80 \cdot 3 - 96) + 7 \cdot 68] : 4 + 195\} \cdot 100 - [(4^3 + 3^4) \cdot 5 - 60]$;
 j) $(2^{68} : 2^{28} + 27^{10} + 10^{78} : 10^{28}) : [2^{50} \cdot 5^{50} + 2^{26} \cdot 2^{14} + (3^2)^{15}]$.

9 Efectuați:

- a) $2^3 \cdot 4^2 \cdot 8^2 : 16^3 - 3^3 \cdot 9^2 \cdot 27^2 : 81^3$; b) $9 + 7 \cdot [12 : 4 + 3 \cdot (28 : 4 - 60 : 10)]$;
 c) $10^2 \cdot [3^2 + 2^3 \cdot (152 \ 412 : 78 - 121 \ 280 : 64)]$; d) $(3^2 : 3 + 9^2 : 3^2) \cdot (196 : 28 - 7^6 : 7^5) + 2^4$;
 e) $\{[(3^5 : 81 + 576 : 2^6) : 3 + 529 : 23] : 3^3\}^{2022} - 1$; f) $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{10} \cdot 2^{11}$.

10 Înlocuiți * cu unele operații aritmetice pentru a obține propoziții adevărate:

- a) $8 * 2 * 2 = 8$; b) $8 * 2^3 * 1 = 2$; c) $4^2 * 2^4 = 1$; d) $3^2 * 8 * 2 = 13$.

11 Înlocuiți * cu una dintre operațiile aritmetice pentru a obține egalitate adevărată:

$$2^1 * 2^2 * 2^3 * 2^4 * 2^5 * 2^6 * 2^7 * 2^8 * 2^9 * 2^{10} * 2^{11} = 2^{66}$$

12 Calculați:

- a) $(10^4 - 1^2) \cdot (10^4 - 2^2) \cdot (10^4 - 3^2) \cdot \dots \cdot (10^4 - 199^2)$; b) $2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10} + 2^{11}$.

13 Calculați: a) $(7^2 - 4^2) : (7 + 4)$; b) $\{9^2 - [(3^2 - 2^2) : (3 - 2)]^2\} : [9 + (3^2 - 2^2) : (3 - 2)]$;

- c) $[(17^2 - 14^2) : (17 + 14)]^3$; d) $11 \cdot [(9^2 - 5^2) : (7 + 4)] - \{[(11 \cdot 9)^2 - (11 \cdot 5)^2] - \{(11 \cdot 9) + (11 \cdot 5)\}\}$.

SUNT CAMPION

*E

14 Dacă tabla de șah din legenda jocului de șah ar fi de 5^2 pătrate, arătați că numărul boabelor de grâu așezate pe tablă este $2^{25} - 1$.


15 Scrieți numărul 2 022 folosind numai 22 de 2 și unele operații aritmetice.

16 Este posibil să înlocuim stelutele cu operațiile (+) sau (-) în relația $1 * 2 * 3 * 4 * \dots * 61 = 62$ și să obținem o propoziție adevărată? Justificați!



8. Metode aritmetice de rezolvare a problemelor


8.1 Metoda reducerii la unitate

OBSERV



Dacă s-au cheltuit 24 lei pe 8 cornulețe cu ciocolată, cât costă 5 cornulețe de același fel?

 = 24 lei
 = ? lei



Aflăm ce preț are un singur cornuleț împărțind costul cornulețelor la numărul lor.

Scriem *rezolvarea* problemei, astfel:

8 cornulețe	24 lei
5 cornulețe	? lei

Facem *reducerea la unitate*:

1 cornuleț	24 : 8 = 3 lei
5 cornulețe	5 · 3 = 15 lei

ÎNȚELEG

În tabel puteți urmări cum trebuie gândită rezolvarea problemei.

	Întrebare	Răspuns
1	Cât costă un singur cornuleț?	24 : 8 = 3 lei
2	Cât costă 5 cornulețe?	5 · 3 = 15 lei

Așadar, metoda reducerii la unitate constă în aflarea valorii unei unități.

APLIC

1) Din 45 kg de prune se obțin 15 kg de gem. Din câte kilograme de prune se obțin 7 kg de gem?







2) 10 muncitori termină o lucrare în 6 zile. În câte zile vor termina lucrarea 12 muncitori?


8.2 Metoda comparației

A. Eliminarea unei mărimi prin înlocuire

OBSERV

Dacă 4 stilouri și 6 creioane costă 72 lei și pentru 5 creioane s-au plătit cu 20 lei mai puțin decât pentru 2 stilouri, aflați prețul unui stilou și prețul unui creion.

 +  = 72 lei
 + 20 lei = 
 = ? lei  = ? lei



Urmărim figura și comparăm cele două relații. Dacă înlocuim 2 stilouri cu 5 creioane + 20 lei eliminăm stilourile din prima relație.

Scriem *rezolvarea* problemei, astfel:

- 1) Scriem datele și cerințele problemei:

4 stilouri și 6 creioane	72 lei
2 stilouri	5 creioane + 20 lei
1 stilou	? lei
1 creion	? lei

- 2) Înlocuim costul a 4 stilouri cu costul a 10 creioane plus 40 lei și obținem:

$$16 \text{ creioane} + 40 \text{ lei} = 72 \text{ lei}$$
- 3) Aflăm prețul unui creion:

$$(72 - 40) : 16 = 32 : 16 = 2 \text{ lei}$$
- 4) Aflăm prețul unui stilou: $(5 \cdot 2 + 20) : 2 = 15 \text{ lei}$.
- 5) Verificare: $4 \cdot 15 + 6 \cdot 2 = 60 + 12 = 72 \text{ lei}$.

ÎNȚELEG

	Întrebare	Răspuns
1	Care din mărimi poate fi înlocuită?	Înlocuim 4 stilouri cu $2 \cdot 5$ creioane plus $2 \cdot 20$ lei
2	Cum se schimbă prima relație?	16 creioane + 40 lei costă 72 lei
3	Cât costă un creion?	Un creion costă $(72 - 40) : 16 = 32 : 16 = 2$ lei
4	Cât costă un stilou?	Un stilou costă $(5 \cdot 2 + 20) : 2 = 15$ lei
5	Cum verificăm?	$4 \cdot 15 + 6 \cdot 2 = 60 + 12 = 72$ lei.

APLIC

1) Alex poate cumpăra cu banii pe care îi are 5 trandafiri sau 15 lalele de ziua mamei sale. Știind că un trandafir este mai scump cu 2 lei decât o lălea, aflați câți lei are Alex.



2) Pentru 3 seturi de creioane și 2 seturi de geometrie s-au plătit 72 lei. Cât costă fiecare set dacă un set de geometrie costă cu 6 lei mai mult decât un set de creioane?

3) 3 trandafiri costă cât 5 frezii sau cât 15 lalele. Știind că 2 trandafiri și 8 lalele costă 18 lei, cât costă fiecare floare?

POT MAI MULT

În laboratorul de chimie s-au adus 20 mese, 30 scaune și 50 eprubete pentru care s-au cheltuit 9 750 lei. Cât costă fiecare obiect, dacă o masă costă cât 10 eprubete și două scaune la un loc, iar un scaun costă cu 15 lei mai mult decât 30 de eprubete?

B. Eliminarea unei mărimi prin reducere

OBSERV

2 covrigi și 3 briose costă 16 lei, iar 5 covrigi și 3 briose costă 22 lei. Cât costă un covrig și cât costă o brioșă?

$$\begin{array}{l}
 \text{2 covrigi} + \text{3 briose} = 16 \text{ lei} \\
 \text{5 covrigi} + \text{3 briose} = 22 \text{ lei} \\
 \text{1 covrig} = ? \text{ lei} \quad \text{1 brioșă} = ? \text{ lei}
 \end{array}$$

Observăm figura și comparăm. Avem doi termeni egali. Facem reducerea termenilor egali prin scădere.



Scriem rezolvarea problemei, astfel:

1) Scriem datele și cerințele problemei:

2 covrigi și 3 briose.....16 lei

5 covrigi și 3 briose.....22 lei

un covrig ? lei

o brioșă.....? lei

2) Eliminăm termenii egali prin scădere:

$$3 \text{ covrigi costă } 22 - 16 = 6 \text{ lei.}$$

3) Aflăm prețul unui covrig: $6 : 3 = 2$ lei.

4) Aflăm prețul unei briose:

$$(16 - 4) : 3 = 12 : 3 = 4 \text{ lei}$$

5) Verificare:

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 4 + 12 = 16 \text{ lei}$$

$$5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 10 + 12 = 22 \text{ lei}$$

ÎNȚELEG

	Întrebare	Răspuns
1	Care din termeni sunt egali?	Brioșele sunt în cantități egale.
2	Prin ce operație eliminăm numărul de brioșe?	Scădem și obținem: 3 covrigi costă $22 - 16 = 6$ lei.
3	Cât costă un covrig?	Un covrig costă: $6 : 3 = 2$ lei.
4	Cât costă o brioșă?	O brioșă costă $(16 - 4) : 3 = 12 : 3 = 4$ lei.
5	Cum verificăm?	$2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 4 + 12 = 16$ lei $5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 10 + 12 = 22$ lei.

APLIC

1) 3 covrigi și 2 brioșe costă 14 lei, iar 7 covrigi și 2 brioșe costă 22 lei. Cât costă un covrig și cât costă o brioșă?

2) 2 gume și 3 creioane costă 14 lei, iar 2 gume și 5 creioane costă 18 lei. Cât costă o gumă și cât costă un creion?

3) Pentru realizarea unei coronițe, Alex cumpără 5 lalele, 3 frezii și 6 iriși cu 44 lei, Bianca dă 38 lei pe 3 lalele, 5 frezii și 4 iriși, iar Cristi cheltuiește 57 lei pe 8 lalele, 8 frezii și 5 iriși.



Așadar, metoda comparației constă în scrierea datelor problemei unele sub altele, respectiv, egalarea a doi termeni prin multiplicare pentru eliminarea lor prin înlocuire sau scădere.

POT MAI MULT

Un bax de suc de roșii costă cu 10 lei mai puțin decât un bax de suc de pere și au același număr de sticle. Dacă 4 sticle de suc de roșii costă cu un leu mai puțin decât 3 sticle de suc de pere, iar 3 sticle de suc de roșii și 4 sticle de suc de pere costă împreună 32 lei, aflați:

a) prețul unei sticle din fiecare bax; b) câte sticle are un bax.

8.3 Metoda figurativă

ÎMI AMINTESC!

Compuneți probleme folosind datele și reprezentările grafice alăturate.

$$\begin{array}{l} a \text{ —————} \\ b \text{ —————} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \end{array}} \right\} 158$$

12

$$\begin{array}{l} a + b = 158 \\ a - b = 12 \end{array}$$

Suma și diferența

$$\begin{array}{l} a \text{ —————} \\ b \text{ —————} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \end{array}} \right\} 196$$

$$\begin{array}{l} a + b = 196 \\ b : a = 3 \end{array}$$

Suma și câtul

$$\begin{array}{l} a \text{ —————} \\ b \text{ —————} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \end{array}} \right\} 411$$

$$\begin{array}{l} b - a = 411 \\ b : a = 4 \end{array}$$

Diferența și câtul

OBSERV

Ioana a cumpărat 2 cărți și 3 pixuri cheltuind 120 lei. Dacă o carte este mai scumpă cu 15 lei decât un pix, cât costă o carte? Dar un pix?



Avem o diferență de 15 lei între prețul cărții c și prețul pixului p .

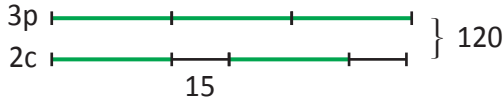
$$\begin{array}{l} p \text{ —————} \\ c \text{ —————} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} p \\ c \end{array}} \right\} ?$$

15

$$c - p = 15$$



Reprezentăm suma a 2 cărți și 3 pixuri și avem 5 segmente egale!



Scriem rezolvarea problemei, astfel:

1) Aflăm suma celor 5 segmente egale:
 $120 - 30 = 90$

2) Aflăm prețul unui pix: $90 : 5 = 18$ lei.

3) Aflăm prețul unei cărți: $18 + 15 = 33$ lei.

4) Verificare:

$2 \cdot 33 + 3 \cdot 18 = 66 + 54 = 120$ iar $33 - 18 = 15$

APLIC

1) Când eu aveam 12 ani, fratele meu avea 2 ani. Acum avem împreună 56 de ani. Câți ani avem fiecare?

2) Un caiet costă cu 4 lei mai mult decât un pix. Dacă 15 caiete și 4 pixuri costă 288 lei, cât costă un pix? Dar un caiet?

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

Compuneți și rezolvați o problemă cu datele din figură.

$$3t + 2c + 5b = 611$$



POT MAI MULT

Bianca și Laura au împreună 128 lei. Dacă Bianca i-ar da Laurei 34 lei, Laura ar avea cu 18 lei mai mult decât Bianca. Câți lei are fiecare?

Așadar, metoda figurativă constă în ilustrarea relațiilor dintre mărimi cu ajutorul segmentelor pentru justificarea operațiilor aritmetice care conduc la rezolvarea problemei.

8.4 Metoda mersului invers

OBSERV

Mama a pus mere în fructieră. A venit Alex și a luat jumătate din mere. Bianca a venit și a luat jumătate din merele rămase. După Bianca a venit Cristi și a luat jumătate din merele rămase. Dacă în fructieră nu mai este decât un singur măr, câte mere a pus mama în fructieră?



Refacem drumul în sens invers. Eu am găsit în fructieră $2 \cdot 1 =$ mere.

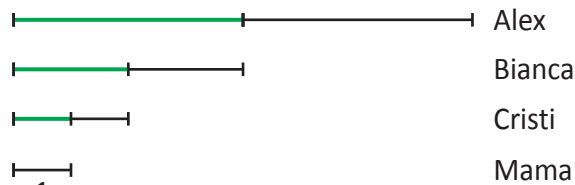


Iar eu am găsit $2 \cdot 4 = 8$ mere. Mama a pus 8 mere. Verificare: $8 : 2 = 4$; $4 : 2 = 2$; $2 : 2 = 1$ iar $1 + 1 + 2 + 4 = 8$.

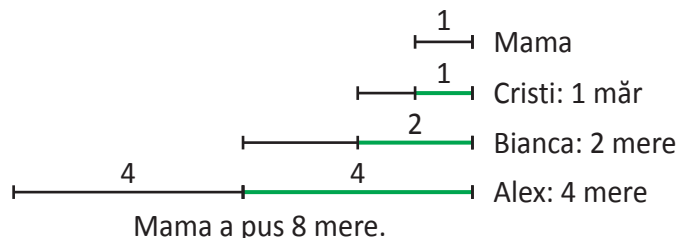


Eu am găsit în fructieră $2 \cdot 2 = 4$ mere.

1) Reprezentăm în desen datele problemei:



2) Facem drumul invers:



APLIC

1) Un călător salută un cârd de găște: „Bună ziua, 100 de găște!”. O găscă răspunde: „Nu suntem 100! Dacă am fi încă pe atâtea câte suntem, încă pe jumătate, încă pe sfert și încă o găscă, atunci am fi 100. Câte găște sunt în cârd?”

2) Alex vinde pepeni. Lui Cristi îi vinde jumătate din cantitate, Laura cumpără o treime din ce îi rămâne, iar Dana ia o cincime din noul rest. Câți pepeni a avut la început Alex, dacă i-au mai rămas 24 pepeni?

POT MAI MULT

Mama a pus mere în fructieră. A venit Alex și a luat jumătate din mere și încă un măr. Bianca a venit și a luat jumătate din merele rămase și încă un măr. După Bianca a venit Cristi și a luat jumătate din merele rămase și încă un măr. Dacă mama constată că în fructieră nu mai este decât un singur măr, câte mere a pus mama în fructieră?

Așadar, metoda mersului invers constă în refacerea traseului logic al problemei de la sfârșit spre început.

8.5 Metoda falsei ipoteze

OBSERV

La o fermă, Cristi a numărat 5 capete și 14 picioare de păsări și iepuri. Câte păsări și câți iepuri sunt la fermă?



Care metodă din cele învățate mă ajută să rezolv problema?

Eu aș rezolva prin încercări, ca în tabel.



nr.	păsări	iepuri	capete	picioare
1	1	4	$1 + 4 = 5$	$1 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 19$
2	2	3	$2 + 3 = 5$	$2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 16$
3	3	2	$3 + 2 = 5$	$3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 14$
4	4	1	$4 + 1 = 5$	$4 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 12$
5	5	0	$5 + 0 = 5$	$5 \cdot 2 + 0 \cdot 4 = 10$
6	0	5	$0 + 5 = 5$	$0 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 20$

Cu puțină imaginație, se poate rezolva fără încercări.

Rezolvarea 1

1) Presupunem că sunt numai păsări:

Numărul picioarelor este $5 \cdot 2 = 10$.



2) Calculăm diferența de picioare.

$14 - 10 = 4$ picioare în plus.

3) Distribuim cele 4 picioare.

Câte 2 la două capete:

$4 : 2 = 2$ iepuri.



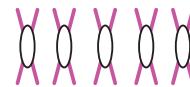
4) Calculăm numărul de păsări:

$5 - 2 = 3$ păsări.

Rezolvarea 2

1) Presupunem că sunt numai iepuri:

Numărul picioarelor este $5 \cdot 4 = 20$.



2) Calculăm diferența de picioare:

$20 - 14 = 6$ picioare în minus.

3) Tăiem în desen cele 6 picioare câte 2 la 3 capete:

$6 : 2 = 3$ păsări.



4) Calculăm numărul de iepuri:

$5 - 3 = 2$ iepuri.

Rezolvarea 3

- 1) Presupunem că păsările ar avea un singur picior și iepurii numai două picioare.
pasăre \Rightarrow 1 picior
iepure \Rightarrow 2 picioare
Numărul picioarelor este $14 : 2 = 7$.
- 2) Calculăm diferența: $7 - 5 = 2$ iepuri.
- 3) Calculăm numărul de păsări: $5 - 2 = 3$ păsări.
- 4) Verificare: $3 + 2 = 5$ capete,
 $3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14$ picioare.

APLIC

- 1) La o fermă sunt păsări și iepuri. Câte păsări și câți iepuri sunt la fermă dacă am numărat 65 capete și 148 picioare?
- 2) Cristi are suma de 435 lei în bancnote de 5 lei și de 10 lei. Dacă sunt în total 50 de bancnote, să se afle câte bancnote de fiecare fel are Cristi.

POT MAI MULT

La o școală s-au adus 48 de computere: PC-uri *tower* de 2 500 lei/buc, PC-uri *case* de 2 700 lei/buc și *Mac*-uri de 3 150 lei/buc. Câte computere sunt de fiecare tip știind că numărul PC-urilor *tower* este cu 8 mai mic decât triplul PC-urilor *case* și în total au costat 127 600 lei.

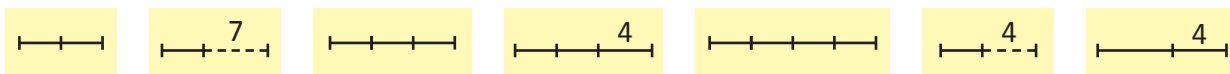
Așadar, metoda falsei ipoteze constă în a presupune că una din mărimi este sau nulă sau multiplicată/împărțită cu un anumit număr.

EXERSEZ

- 1 Alex aleargă 640 metri în 8 minute. Câți metri parcurge Alex în 15 minute?
- 2 Alege răspunsul corect:
 - a) Dublul cărui număr mărit cu 3 este egal cu 67?
 - b) Triplul cărui număr micșorat cu 7 este egal cu 44?
 - c) Triplul cărui număr micșorat cu 5 este egal cu dublul său?
 - d) Dublul cărui număr mărit cu 8 este egal cu triplul său?
 - e) Care număr mărit de trei ori este egal cu numărul mărit cu 4?
 - f) Care număr micșorat de patru ori este egal cu numărul micșorat cu 6?
 - g) Care număr micșorat de două ori este egal cu numărul mărit cu 2?
 - h) Care număr mărit de două ori este egal cu numărul micșorat cu 2?
- 3 Aflați numerele necunoscute dacă:
 - a) $a : b = 5$ (rest 3) și $a + b = 2025$;
 - b) $a : b = 18$ (rest 5) și $a - b = 6\ 856$.
- 4 Alergând cu viteza de 80 m/min., Bianca parcurge o distanță în 6 minute. Cu ce viteză trebuie să alerge Alex pentru a parcurge aceeași distanță în 4 minute?
- 5 Un biciclist parcurge un traseu în patru zile, astfel: în prima zi jumătate din traseu, a doua zi jumătate din rest, a treia zi jumătate din noul rest, iar restul de 12 km în a patra zi. Ce lungime are traseul?

6 Potriveți textul cu reprezentarea grafică:

- | | | | | | | |
|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|----------------------------|--------------------------------|----------------------------|
| a egal cu triplul lui b | a mai mare cu 4 decât $2b$ | a cu 4 mai mare decât b | a de două ori mai mic decât b | a cu 4 mai mic decât b | a mai mic de 4 ori decât b | a cu 7 mai mic decât b |
|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|----------------------------|--------------------------------|----------------------------|



- 7 Am cheltuit 32 lei pe 8 caiete de aritmetică și mă întreb de câți bani are nevoie fratele meu pentru 5 caiete de același tip.
- 8 2 albume și 3 stilouri costă 238 lei, iar 3 albume și 2 stilouri costă 252 lei. Cât costă un album și cât costă un stilou?
- 9 Când am cumpărat 7 măștișoare și 5 brelocuri am plătit 76 lei. Cât costă un măștișor și cât costă un breloc dacă 2 măștișoare costă cât 4 brelocuri?
- 10 3 cărți și 5 pixuri costă 240 lei, iar 5 cărți și 3 pixuri costă 288 lei. Cât costă o carte și cât costă un pix?
- 11 Geo și Teo au împreună 350 lei. Dacă Geo și-ar dubla suma atunci cei doi ar avea 475 lei. Câți lei are fiecare?
- 12 Dana a cumpărat pentru tata un fular, iar pentru mama un parfum, cheltuind 568 lei. Dacă fularul este mai ieftin cu 156 lei decât parfumul, cât costă fularul?
- 13 Făt-Frumos se luptă cu balaurul. Paloșul lui taie șapte capete dintr-o lovitură, iar după fiecare lovitură capetele rămase se triplează. După trei lovituri, balaurul are 24 capete. Câte capete a avut balaurul la începutul luptei?
- 14 Într-un bloc sunt în total 108 apartamente de câte 2 camere și de câte 3 camere. Știind că blocul are în total 261 camere, câte apartamente au 2 camere și câte au 3 camere?
- 15 Alex a scris în caietul de teme:

Problemă: Dacă 6 insigne și 5 brelocuri costă 90 lei, și 8 insigne și 5 brelocuri costă 80 lei, cât costă o insignă? Dar un breloc?

Rezolvare: Observ că avem același număr de brelocuri și scad pentru a afla cât costă 2 insigne: $90 - 80 = 10$ lei. Deci o insignă costă $10 : 2 = 5$ lei. Calculez cât costă 5 brelocuri: $90 - 6 \cdot 5 = 90 - 30 = 60$ și deci un breloc costă $60 : 5 = 12$ lei. Verificare: $6 \cdot 5 + 5 \cdot 12 = 30 + 60 = 90$.

A procedat corect Alex? De ce? Voi cum rezolvați aceeași problemă?

SUNT CAMPION

- 16 Dacă se așază câte 2 elevi într-o bancă, rămân 9 elevi în picioare, iar dacă se așază câte 3 într-o bancă, rămân 7 bănci neocupate și una ocupată cu un singur elev. Câte bănci și câți elevi sunt?

PORTOFOLIU

Alegeți una dintre temele: *La cumpărături* sau *Pe urmele jocului meu preferat*, apoi compuneți și rezolvați cinci probleme pe tema aleasă și corespunzător cu metodele studiate. Puteți ilustra una dintre probleme pe o planșă folosind cel puțin trei culori și un colaj.

9. Divizibilitatea numerelor naturale

9.1 Divizor, multiplu

OBSERV

La o competiție sportivă, cei 84 de elevi ai claselor a V-a formează echipe de 12 elevi.

- a) Câte echipe se pot forma?
- b) Aceeași întrebare dacă se formează echipe de 15 elevi.



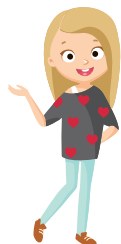
Rezolvare:

a) $84 = 12 \cdot ?$; $84 : 12 = 7$. Avem 7 echipe și $84 = 12 \cdot 7$		b) $84 = 15 \cdot ?$; $84 : 15 = 5$ (rest 9). Avem 5 echipe și $84 = 15 \cdot 5 + 9$.	
<i>Scriem</i>	<i>Citim</i>	<i>Scriem</i>	<i>Citim</i>
$84 : 12$	84 se divide cu 12 sau 84 este divizibil cu 12 sau 84 este multiplu al lui 12.	$84 \not\div 15$	84 nu se divide cu 15 sau 84 nu este divizibil cu 15 sau 84 nu este multiplu al lui 15.
$12 \mid 84$	12 divide pe 84 sau 12 este divizor al lui 84.	$15 \nmid 84$	15 nu divide pe 84 sau 15 nu este divizor al lui 84.

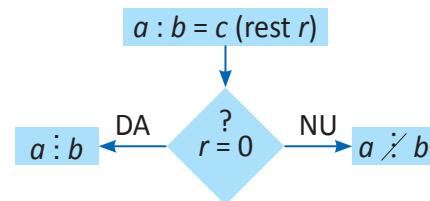
ÎNȚELEG

Numărul natural a se divide cu numărul natural b , dacă există numărul natural c astfel încât: $a = b \cdot c$		Numărul natural a nu se divide cu numărul natural b , dacă pentru orice număr natural c avem: $a \neq b \cdot c$	
<i>Scriem</i>	<i>Citim</i>	<i>Scriem</i>	<i>Citim</i>
$a : b$	a se divide cu b sau a este divizibil cu b sau a este multiplu al lui b .	$a \not\div b$	a nu se divide cu b sau a nu este divizibil cu b sau a nu este multiplu al lui b .
$b \mid a$	b divide pe a sau b este divizor al lui a	$b \nmid a$	b nu divide pe a sau b nu este divizor al lui a

Am definit astfel o nouă relație între două numere naturale, **se divide cu (:) sau divide pe (|)**, numită **relația de divizibilitate**.



Pentru a stabili dacă numărul natural a este divizibil cu numărul natural b (b nenul), împărțim a la b .



Dacă restul împărțirii este zero, atunci **a este divizibil cu b** .
Dacă restul împărțirii este diferit de zero, atunci **a nu este divizibil cu b** .



Mulțimea tuturor divizorilor unui număr natural n o notăm cu D_n și scriem $D_n = \{\text{divizorii numărului } n\}$.

Exemplu: $D_{14} = \{1, 2, 7, 14\}$.

Numerele 1 și n sunt **divizori improprii** ai numărului n . Divizorii lui n diferiți de 1 și n se numesc **divizori proprii** ai lui n .

Deci, divizorii proprii ai lui 12 sunt 2, 3, 4 și 6 și divizorii lui improprii sunt 1 și 12.

Observăm că un divizor propriu al unui număr este cel mult egal cu jumătatea numărului.

Mulțimea tuturor multiplilor unui număr natural n o notăm cu M_n și scriem $M_n = \{\text{multiplii numărului } n\}$.

Exemplu: $M_2 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots, 2k, \dots\}$.

APLIC

1) În cabinetul de biologie, elevii clasei a V-a A sunt repartizați în mod egal la 8 microscopae.

a) Câți elevi vor lucra la un microscop dacă sunt prezenți 24 de elevi?

b) Dar dacă sunt prezenți 26 de elevi? Stabiliți relația de divizibilitate între numerele din problemă.

2) Citiți propozițiile cu voce tare și justificați valorile lor logice, adevărat (A) sau fals (F).

a) $81 \div 3$; b) $2 \mid 18$; c) $6 \nmid 12$;

d) $15 \nmid 5$; e) $102 \div 6$; f) $15 \mid 405$;

g) $13 \nmid 170$; h) $2\,017 \nmid 201$; i) $24 \mid 24$.

3) Stabiliți dacă:

a) 12 este divizorul lui 153;

b) 285 este multiplul lui 15;

c) 237 este divizorul lui 1208 226;

d) 83802 este multiplul lui 97.

4) Scrieți:

a) divizorii numerelor: 8; 12; 20; 75; 120. Precizați apoi divizorii lor proprii și improprii;

b) multiplii numerelor: 5, 6, 25, 100, 753, 2 017.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

Alegeți multiplii și divizorii:



	225	25	64	100	27	125	96	324	180
2	○	○	○	○	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○	○	○	○	○
25	○	○	○	○	○	○	○	○	○

POT MAI MULT

1) Arătați că numărul $a = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+1}$ este divizibil cu 13, unde n este un număr natural oarecare.

2) Pentru ce numere naturale n , $8 \div n + 3$? Dar $35 \div n - 7$?

3) Care este cel mai mic număr care se termină cu 2023 și este divizibil cu 17? Dar cu 13?

9.2 Divizori comuni

OBSERV

Alex și Bianca împachetează 18 covrigi și 24 banane. Câte pachete pot face copiii pentru a distribui toate alimentele dacă pun cantități egale de covrigi și respectiv banane în fiecare pachet?

Aflăm un număr care să împartă exact pe 18 și 24. Deci scriem divizorii numerelor 18 și 24.



D_{18}	1	2	3		6		9		18	
D_{24}	1	2	3	4	6	8		12		24

Rezolvare: Divizorii comuni ai numerelor 18 și 24 sunt: 1, 2, 3 și 6. Copiii pot face 6, 3 sau 2 pachete. A pune toate alimentele într-un singur pachet este o soluție improprie.

ÎNȚELEG

Un număr natural este divizor comun al mai multor numere dacă divide numerele date.

Mai exact:

Numărul natural d se numește **divizor comun** al numerele naturale a și b dacă $d \mid a$ și $d \mid b$.

APLIC

1) Laura și Dana împachetează 18 napolitane, 36 covrigi, 12 tablete de ciocolată și 24 de banane. Câte bucăți din fiecare sortiment trebuie să pună copiii într-un pachet pentru a distribui toate alimentele în mod egal în cât mai multe pachete?

Folosiți tabelul pentru rezolvarea problemei.

D_{18}	1	2	3		6		9		18	
D_{36}	1	2	3	4	6		9	12	18	36
D_{12}	1	2	3	4	6		12			
D_{24}	1	2	3	4	6	8		12	24	

2) Scrieți numărul natural 120 ca o sumă de 5 numere diferite divizibile cu 3. Găsiți trei soluții.

POT MAI MULT

1) Pentru ce numere naturale n , $18 \mid n + 4$ și $30 \mid 3n$?

2) Aflați divizorii comuni ai numerelor: a) 10 și 1010; b) 15 și 1515; c) 21 și 2121; d) 13 și 1313. Ce observați? Formulați o regulă pentru numerele de forma \overline{ab} și \overline{abab} .

9.3 Multipli comuni

OBSERV

Cristi are pasul de 4 dm, iar Alex de 5 dm. Ei participă la un concurs de alergări pe distanța de 75 m. De câte ori se suprapun pașii lor în timpul cursei? Are loc o suprapunere și pe linia de sosire?

Aflăm un număr care să se împartă exact la 4 și 5. Așadar, scriem multiplii numerelor 4 și 5.



M_4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	...	$4 \cdot k$...
M_5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	...	$5 \cdot k$...

Rezolvare: Prima suprapunere, diferită de cea de la 0 dm de pe linia de start, are loc după 20 dm. Efectuăm împărțirea $75 \text{ m} : 20 \text{ dm} = 750 \text{ dm} : 20 \text{ dm} = 37$ (rest 10). Deci pașii copiilor se suprapun de 37 de ori în timpul cursei. Pe linia de sosire, pașii lor nu se suprapun, deoarece 750 nu este un multiplu comun al numerelor 4 și 5, $20 \nmid 750$.

ÎNȚELEG

Un număr natural este multiplu comun al mai multor numere dacă se divide cu numerele date.

Mai exact:

Numărul natural m se numește **multiplu comun** al numerelor naturale a și b dacă $m : a$ și $m : b$.

APLIC

În timp ce roata din spate a unui velociped face 5 rotații complete, roata din față face o singură rotație completă. Dacă janta roții din spate are lungimea de 80 cm, aflați:

- ce lungime are janta roții din față;
- câte rotații complete face roata din față pe distanța de 1200 m? Dar pe distanța de 2750 m?

POT MAI MULT

1) Un automobil parcurge distanța dintre orașele A și B în 3 ore, iar altul o parcurge în 2 ore. Ambele automobile pleacă la aceeași oră din A către B, ajung în B și se întorc în A; continuă aceste curse până când se întâlnesc din nou în A. După câte ore se întâlnesc prima dată amândouă în A?

2) Elevii claselor a V-a nu pot fi așezați câte 3, câte 5 și nici câte 7 deoarece rămâne în afară același număr de copii. Câți elevi de clasa a V-a sunt dacă numărul este un număr natural de trei cifre mai mic ca 107?

EXERSEZ

- Scrieți divizorii comuni ai numerelor: a) 12 și 15; b) 18 și 24; c) 4, 6 și 8; d) 20; 40 și 60.
- Scrieți multiplii comuni ai numerelor: a) 2 și 5; b) 8 și 4; c) 2, 3 și 6; d) 20; 40 și 60.

3 a) Asociați numărul cu divizorul lui:

125 34 121 2 643 49

3 11 7 10 2 5

b) Asociați numărul cu multiplul lui:

2 5 17 203 37

1 421 333 95 391 251 208

4 Precizați propozițiile adevărate sau false:

- a) $12 : 2$; b) $18 : 9$; c) $2 \mid 28$; d) $12 : 6$; e) $18 : 3$; f) $7 \mid 28$;
 g) $102 : 5$; h) $188 : 7$; i) $21 \mid 218$; j) 7 este divizorul lui 84;
 k) 105 nu este multiplul lui 15; l) $38 \nmid 19$.

5 Aflați cifra necunoscută dacă: $\overline{a6} : 23$; $\overline{8a} : 5$; $7 \mid \overline{a2}$; $12 \nmid \overline{2a}$.

6 Alex pune în mod egal 12 pixuri și 18 creioane în cutii. De câte cutii are nevoie Alex dacă fiecare cutie conține cel puțin un pix și cel puțin un creion? Câte posibilități sunt?

7 Elevii cercului de matematică pot fi așezați câte 3 și câte 5 fără să rămână în afară niciunul dintre copii. Câți elevi sunt la cerc dacă numărul lor este un număr natural de 2 cifre mai mic ca 30? Justificați răspunsul folosind multiplii numerelor 3 și 5.

8 Elevii clasei a V-a A pot fi așezați câte 2, câte 3 și câte 5 fără să rămână în afară niciunul dintre copii. Câți elevi sunt în clasa a V-a A dacă numărul lor este un număr natural de 2 cifre mai mic ca 50? Justificați răspunsul dat.

9 Bianca are 12 globulețe, 18 stelute și 6 lumânări. Ea le aranjează în mod egal pe câte o ramură a bradului de Crăciun. Pentru câte ramuri îi ajung podoabele? Dacă bradul are 9 ramuri, care este numărul minim de globulețe, stelute și lumânări necesare împodobirii bradului?

10 Un vapor parcurge distanța dintre porturile A și B în 6 zile, iar altul o parcurge în 4 zile. Ambele vapoare pleacă în aceeași zi din A către B, ajung în B și se întorc în A; continuă aceste curse până când se întâlnesc în B. După câte zile se întâlnesc prima dată în B?



11 Cristi aranjează creioanele colorate în cutii de 3, 5 și 7 creioane și de fiecare dată îi rămân 2, 4 și respectiv 6 creioane. Câte creioane are Cristi dacă este un număr de trei cifre mai mic decât 110?

SUNT CAMPION

12 Se dau numerele $a = 5^{2n+3} \cdot 9^{n+2} + 25^{n+1} \cdot 3^{2n+1}$ și $b = 2^{2n+1} \cdot 5^{2n+2} - 25^n \cdot 4^{n+1}$ unde n este un număr natural oarecare. Arătați că $a : 17$ și $b : 18$.

13 Zece pirați împart în mod egal o comoară din monede de aur și le rămân 2 monede rest. Are loc o luptă pentru aceste monede și unul dintre ei este ucis. Comoara se împarte din nou între cei rămași în viață și rămâne rest o monedă pentru care se bat și un pirat este ucis. La următoarea împărțire a comorii nu mai rămâne nicio monedă rest. Aflați câte monede are comoara, dacă numărul monedelor este un număr de trei cifre. Câte soluții sunt?

10. Criterii de divizibilitate

ÎMI AMINTESC!



Cum stabilim dacă numărul **4 307** este divizibil cu numărul **59**?

Efectuăm împărțirea numerelor.



$$4\ 307 : 59 = 73 \text{ și rest } 0 \Rightarrow 4\ 307 : 59$$

multiplul lui 59 divizorul lui 4 307

$$4\ 307 = 59 \cdot 73$$

multiplul lui 73 divizorul lui 4 307

$$4\ 394 : 59 = 74 \text{ și rest } 28 \Rightarrow 4\ 394 \not\div 59$$

Pentru numerele 2, 3, 5, 9, 10 ș.a. există reguli (criterii) pentru a stabili dacă acestea sunt divizori, fără efectuarea împărțirii.

10.1 Criteriul de divizibilitate cu 2

ÎMI AMINTESC!

Un număr natural poate fi **par** sau **impar**.
Numerele **pare** se împart exact la 2, iar cele **impare**, nu.



ÎNȚELEG

Așadar, numerele pare se divid cu 2 iar cele impare, nu. Vom demonstra afirmația pentru toate numerele de patru cifre \overline{abcd} .

Numărul \overline{abcd} se descompune în baza 10 astfel: $\overline{abcd} = \overline{abc} \cdot 10 + d$, unde $a \neq 0$.

Dacă ultima cifră d este pară, $d = 2 \cdot k$, unde $k = 0, 1, 2, 3, 4$, atunci $\overline{abcd} = 10 \cdot \overline{abc} + 2 \cdot k = 2 \cdot 5 \cdot \overline{abc} + 2 \cdot k = 2 \cdot (5 \cdot \overline{abc} + k)$. Deci $\overline{abcd} \div 2$.

Dacă ultima cifră d este impară, $d = 2 \cdot k + 1$, unde $k = 0, 1, 2, 3, 4$, atunci $\overline{abcd} = 10 \cdot \overline{abc} + 2 \cdot k + 1 = 2 \cdot 5 \cdot \overline{abc} + 2 \cdot k + 1 = 2 \cdot (5 \cdot \overline{abc} + k) + 1$. Deci $2 \nmid \overline{abcd}$.

Pentru numerele cu mai multe sau mai puține cifre decât 4 se va demonstra la fel.

Am demonstrat astfel criteriul de divizibilitate cu 2.

Dacă ultima cifră a unui număr natural este pară, atunci numărul **este divizibil cu 2**.

Dacă ultima cifră a unui număr natural este impară, atunci numărul **nu este divizibil cu 2**.

APLIC

1) Completați tabelul următor cu numerele: 234; 5 666; 5 009; 11 001; 2; 0; 1; 10^2 ; 7^2 ; 8^2 ; 10^3 ; 7^3 ; 8^3 ; 5^3 ; 2 022; 2 037; 29^4 ; 56^7 ; 6^{2017} ; 5^{2018} .

Numere divizibile cu 2	Numere nedivizibile cu 2
234, ...	11 001, ...

2) Aflați câte numere pare sunt în șirul:

- 274, 275, ..., 305;
- 35, 36, 37, ..., 2 018;
- 58, 61, 64, 67, ..., 2 017.

3) Scrieți numerele de forma $\overline{5a8a}$ divizibile cu 2.

4) Câte numere de forma $\overline{ab5c}$ sunt divizibile cu 2?

POT MAI MULT

1) Arătați că următoarele numere naturale sunt divizibile cu 2: a) $5^{2018} - 5^{2017}$; b) $13^{23} - 7^{23}$; c) $3^{23} + 7^{24} + 5^{25} + 11^{26}$; d) $1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11 \dots 1}_{\text{de 2018 ori}}$.

2) Dacă notăm cu p un număr natural par și cu i un număr natural impar, stabiliți care din numerele: $p + i$; $2i + p$; $i \cdot p$; $p - i$; $3i + p$; $i + 3p$ este divizibil cu 2.

10.2 Criteriul de divizibilitate cu 5

OBSERV

Numerele
0, 5, 10, 15, 20, 25, ...
sunt multiplii lui 5.
**Multiplii lui 5
se termină cu 0 sau 5.**



ÎNȚELEG

Așadar, numerele care se termină cu 0 sau 5 sunt singurele numere divizibile cu 5.

Vom demonstra afirmația pentru toate numerele de patru cifre \overline{abcd} .

Numărul \overline{abcd} se descompune în baza 10 astfel: $\overline{abcd} = \overline{abc} \cdot 10 + d$, unde $a \neq 0$ și $d < 10$ deoarece d este cifră zecimală.

Dacă $d = 0$, atunci $\overline{abcd} = 10 \cdot \overline{abc} + 0 = 5 \cdot 2 \cdot \overline{abc} = 5 \cdot 2\overline{abc}$. Deci $\overline{abcd} : 5$.

Dacă $d = 5$ atunci $\overline{abcd} = 10 \cdot \overline{abc} + 5 = 5 \cdot 2 \cdot \overline{abc} + 5 \cdot 1 = 5 \cdot (2\overline{abc} + 1)$. Deci $\overline{abcd} : 5$.

Dacă $d \neq 0$, $d \neq 5$ atunci $d = 5k + r$, $r = 1, 2, 3, 4$, k este număr natural.

Scriem $\overline{abcd} = 10 \cdot \overline{abc} + 5k + r = 5 \cdot 2 \cdot \overline{abc} + 5 \cdot k + r = 5 \cdot (2\overline{abc} + k) + r$. Deci $5 \nmid \overline{abcd}$ pentru că $r = 1, 2, 3, 4$.

Pentru numerele cu mai multe sau mai puține cifre decât 4 se va demonstra la fel.

Am demonstrat așadar criteriul de divizibilitate cu 5:

Dacă ultima cifră a unui număr natural este 0 sau 5, atunci numărul **este divizibil cu 5**.

Dacă ultima cifră a unui număr natural nu este 0 sau 5, atunci numărul **nu este divizibil cu 5**.

APLIC

1) Alegeți numerele divizibile cu 5 din șirul: 234; 5 660; 2 005; 55 001; 5; 0; 1; 10^2 ; 7^5 ; 8^{20} ; 10^3 ; 15^3 ; 75^3 ; 5^3 ; 5 559; 2 035; 290^4 ; 56^{10} ; 6^{2020} ; 125^{2018} .

2) Scrieți numerele de forma:
a) $\overline{a43a}$; b) $\overline{57a}$ divizibile cu 5.

3) Aflați câte numere divizibile cu 5 se pot forma cu cifrele:

a) 6, 4, 0, 5; b) 7, 2, 8, 0, 5.

4) Câte numere de forma $\overline{a8bc}$ sunt divizibile cu 5?

POT MAI MULT

1) Arătați că următoarele numere naturale sunt divizibile cu 5: a) $6^{2018} - 6^{2017}$; b) $19^{23} - 7^{22}$; c) $3^{23} + 7^{24} + 5^{25} + 11^{26} + 9^{22}$; d) $1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11 \dots 1}_{\text{de 2020 ori}}$.

2) Arătați ca numărul $8^1 + 8^2 + 8^3 + 8^4 + 8^5 + \dots + 8^{2024}$ este divizibil cu 5.

10.3 Criteriul de divizibilitate cu 10^n

OBSERV

Numerele
0, 10, 20, 30, 40, 50, ...
sunt multiplii lui 10.
**Multiplii lui 10 se
termină cu 0.**



ÎNȚELEG

Așadar, numerele care se termină cu 0 sunt singurele numere divizibile cu 10.

Vom demonstra afirmația pentru toate numerele de patru cifre \overline{abcd} .

Conform scrierii zecimale \overline{abcd} se descompune astfel: $\overline{abcd} = \overline{abc} \cdot 10 + d$, unde $a \neq 0$ și $d < 10$, deoarece d este cifră zecimală.

Dacă $d = 0$, atunci $\overline{abcd} = 10 \cdot \overline{abc} + 0 = 10 \cdot \overline{abc}$. Deci $\overline{abcd} : 10$.

Dacă $d \neq 0$ atunci $d = 1, 2, 3, \dots, 9$ și $\overline{abcd} = 10 \cdot \overline{abc} + d$. Deci $10 \nmid \overline{abcd}$.

Pentru numerele cu mai multe sau mai puține cifre decât 4 se va demonstra la fel.

Am demonstrat așadar criteriul de divizibilitate cu 10:

Dacă ultima cifră a unui număr natural este 0, atunci numărul **este divizibil cu 10**.

Dacă ultima cifră a unui număr natural nu este 0, atunci numărul **nu este divizibil cu 10**.

Putem formula asemănător cu criteriul de divizibilitate cu 10 un criteriu de divizibilitate cu 10^n , unde n este un număr natural oarecare.

Dacă un număr natural se termină cu n zerouri, atunci numărul **este divizibil cu 10^n** .

Dacă ultima cifră a unui număr natural nu este 0, atunci numărul **nu este divizibil cu 10^n** .

Exemple: $2\ 300 : 100$, $2\ 095\ 000 : 1\ 000$, $100 \nmid 49\ 002$, $10\ 000 \nmid 20\ 000\ 001$.

APLIC

1) Completați tabelul alăturat cu numerele: 234; 5 660; 2 000; 50 001; 10; 0; 1; $(2 \cdot 5)^4$; 7^{10} ; 8^{20} ; 10^{31} ; 15^{300} ; 75^{50} ; 5^{20} ; $1\ 230$; $2\ 035 \cdot 100$; $29 \cdot 100^4$; 56^{10} ; $17 \cdot 10^{24}$; 120^{18} .

Numere divizibile cu 10	Numere nedivizibile cu 10
5 660	234
...	...

2) Scrieți numerele de forma:
a) $97a$; b) $57a\overline{a}$ divizibile cu 10.

3) Aflați câte numere divizibile cu 10 se pot forma cu cifrele:
a) 6, 4, 0; b) 7, 2, 8, 0.

4) Câte numere de forma $\overline{a8bc}$ sunt divizibile cu 10?

POT MAI MULT

1) Demonstrați criteriile de divizibilitate cu 2, 5 și 10 pentru numerele de 2 și 3 cifre.

2) Arătați că dacă un număr natural este divizibil cu 2 și 5 atunci numărul este divizibil și cu 10.

10.4 Criteriul de divizibilitate cu 3

OBSERV

În tabel am notat suma cifrelor numărului n cu $S(n)$.



n	30	81	92	103	114	75	176	87	738	19
$S(n)$	3	9	11	4	6	12	14	15	18	10
$S(n) : 3$	da	da	nu	nu	da	da	nu	da	da	nu
restul lui $n : 3$	0	0	2	1	0	0	2	0	0	1
$n : 3$	da	da	nu	nu	da	da	nu	da	da	nu

ÎNȚELEG

Așadar, numerele care au suma cifrelor divizibilă cu 3 sunt singurele numere divizibile cu 3.

Vom demonstra afirmația pentru toate numerele de trei cifre \overline{abc} .

Numărul \overline{abc} , $a \neq 0$, se descompune în baza 10 astfel: $\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0 = a \cdot (99 + 1) + b \cdot (9 + 1) + c = 99a + a + 9b + b + c = 3 \cdot (33a + 3b) + (a + b + c)$.

Dacă $(a + b + c) : 3$, atunci $a + b + c = 3k$, $\overline{abc} = 3 \cdot (33a + 3b) + 3k = 3 \cdot (33a + 3b + k)$, k este număr natural. Deci $\overline{abc} : 3$.

Dacă $3 \nmid (a + b + c)$, atunci $a + b + c = 3k + r$, $r = 1, 2, 3$ și $\overline{abc} = 3 \cdot (33a + 3b) + 3k + r = 3 \cdot (33a + 3b) + k + r$, k este număr natural. Deci $3 \nmid \overline{abc}$.

Pentru numerele cu mai multe sau mai puține cifre decât 3 se va demonstra la fel.

Am demonstrat așadar criteriul de divizibilitate cu 3:

Dacă suma cifrelor unui număr natural este divizibilă cu 3, atunci numărul **este divizibil cu 3**.

Dacă suma cifrelor unui număr natural nu este divizibilă cu 3, atunci numărul **nu este divizibil cu 3**.

APLIC

1) Completați tabelul alăturat cu numerele: 234; 5 640; 2 001; 50 021; 3; 0; 1; $(2 \cdot 3)^4$; 3^6 ; 9^4 ; 10^3 ; 153^2 ; 75^3 ; 5^4 ; $7 \cdot 123$; $20\ 352 \cdot 17$; $21 \cdot 10^{10}$; 56^3 ; $18 \cdot 10^{24}$; 170^3 .

Numere divizibile cu 3	Numere nedivizibile cu 3
234	50 021
...	...

2) Scrieți numerele de forma:
a) $97\overline{a}$; b) $57\overline{aa}$ divizibile cu 3.

3) Aflați câte numere divizibile cu 3 se pot forma cu cifrele:
a) 2, 3, 1; b) 8, 1, 9, 0.

4) Câte numere de forma $\overline{a8b}$ sunt divizibile cu 3?

10.5 Criteriul de divizibilitate cu 9

OBSERV



Numerele 0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, ... sunt multiplii lui 9. Suma cifrelor este divizibilă cu 9.

Avem o regulă asemănătoare cu criteriul cu 3.



ÎNȚELEG

Numerele care au suma cifrelor divizibilă cu 9 sunt singurele numere divizibile cu 9.

Vom demonstra afirmația pentru toate numerele de trei cifre \overline{abc} .

Numărul \overline{abc} , $a \neq 0$, se descompune în baza 10 astfel:

$$\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0 = a \cdot (99 + 1) + b \cdot (9 + 1) + c = 99a + a + 9b + b + c = 9(11a + b) + (a + b + c).$$

Dacă $(a + b + c) : 9$, atunci $a + b + c = 9k$, $\overline{abc} = 9(11a + b) + 9k = 9(11a + b + k)$, k este număr natural. Deci $\overline{abc} : 9$

Dacă $9 \nmid (a + b + c)$, atunci $a + b + c = 9k + r$, $r = 1, 2, \dots, 8$ și $\overline{abc} = 9(11a + b) + 9k + r = 9(11a + b + k) + r$, k este număr natural. Deci $9 \nmid \overline{abc}$.

Pentru numerele cu mai multe sau mai puține cifre decât 3 se va demonstra la fel.

Am demonstrat așadar criteriul de divizibilitate cu 9:

Dacă suma cifrelor unui număr natural este divizibilă cu 9, atunci numărul **este divizibil cu 9**.

Dacă suma cifrelor unui număr natural nu este divizibilă cu 9, atunci numărul **nu este divizibil cu 9**.

APLIC

1) Alegeți numerele divizibile cu 9 din șirul: 234; 7 560; 2 007; 50 001; 9; 0; 1; $(2 \cdot 9)^4$; 79^3 ; 81^2 ; 10^9 ; 15^3 ; 72^3 ; $9 \cdot 10^{20}$; $1 233^2$; $2 034 \cdot 1 000^{10}$; $29 \cdot 100^{400}$; 56^{10} ; $207 \cdot 10^{24}$; 12^3 .

2) Scrieți numerele de forma: a) $\overline{98a}$; b) $\overline{57aa}$ divizibile cu 9.

3) Aflați câte numere divizibile cu 9 se pot forma cu cifrele: a) 8, 1, 0; b) 7, 2, 9, 0.

4) Câte numere de forma $\overline{a8bc}$ sunt divizibile cu 9?

POT MAI MULT

1) Criteriile de divizibilitate cu 4 și 25.

Observăm că $100 = 4 \cdot 25$ și un număr de patru cifre \overline{abcd} se scrie $\overline{abcd} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd} = 4 \cdot 25 \cdot \overline{ab} + \overline{cd}$, unde $a \neq 0$.

Dacă $\overline{cd} = 4 \cdot k$, atunci $\overline{abcd} = 4 \cdot 25 \cdot \overline{ab} + 4 \cdot k = 4 \cdot (25 \cdot \overline{ab} + k)$ și $\overline{abcd} : 4$.

Dacă $\overline{cd} = 25 \cdot k$, atunci $\overline{abcd} = 4 \cdot 25 \cdot \overline{ab} + 25 \cdot k = 25 \cdot (4 \cdot \overline{ab} + k)$ și $\overline{abcd} : 25$, unde k este număr natural.

Așadar:

Dacă ultimele două cifre ale unui număr formează un număr divizibil cu 4 sau 25, atunci numărul este divizibil cu 4, respectiv 25.

2) Observând că $1\ 000 = 8 \cdot 125$, formulați un criteriu de divizibilitate cu 8 și cu 125.

PROIECT

Realizați o planșă cu toate criteriile de divizibilitate studiate. Fiecare criteriu să fie urmat de o formulă și de 3 exemple de aplicare și un contraexemplu. Folosiți cel puțin 3 culori și colajul pentru a pune în evidență formulele și aplicațiile.

10.6 Numere prime, numere compuse

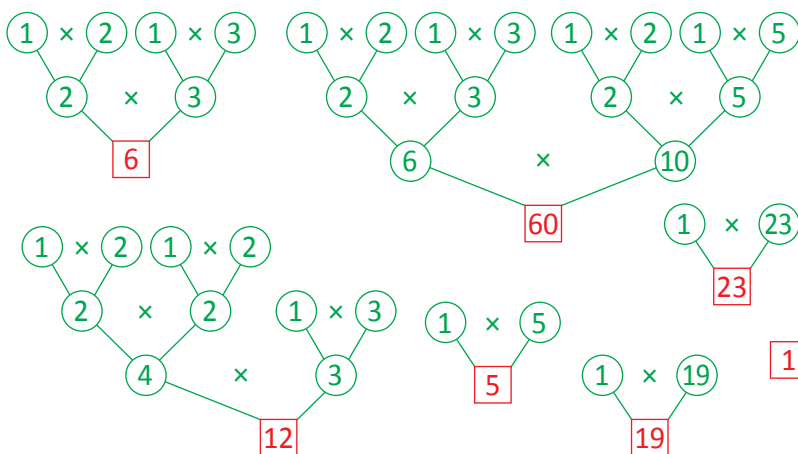
OBSERV



Numerele 6, 12, 60, 5, 19 și 23 au fost scrise ca produse de factori sub forma unor „arbori”.

„Creșterea arborelui” s-a oprit când am obținut numărul 1 ca factor.

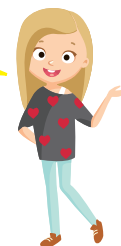
5, 19 și 23 nu au decât două ramuri, iar 6, 12 și 60 au mai mult de două ramuri. Numărul 1 nu are nicio ramură.



ÎNȚELEG

n	5	19	23	6	12	60	1
Nr. divizorilor	2	2	2	4	6	12	1

În tabel sunt trecute numere naturale n și numărul lor de divizori.



Numărul natural care are numai doi divizori, pe 1 și numărul însuși, se numește **număr prim**.

Numărul natural care are mai mult de doi divizori se numește **număr compus**.

Numărul unu are un singur divizor, nu este nici prim, nici compus.



Pentru a găsi numerele prime folosim *ciurul* sau *sita* lui **Eratostene** care selectează și elimină numerele compuse mai mici decât un număr dat.

Exemplu pentru numerele prime mai mici decât 50:

Scriem numerele până la 50, fără 0 și 1. Tăiem numerele mai mari ca 2 divizibile cu 2; mai mari ca 3, divizibile cu 3; mai mari ca 5, divizibile cu 5; mai mari ca 7, divizibile cu 7.

Deoarece $7^2 = 49 < 50 < 11^2 = 121$, procedeul de „cernere” se oprește.

Numerele rămase „necernute” sunt numere prime: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.

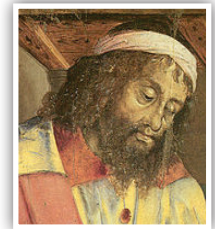
2 este singurul număr prim par, celelalte numere prime fiind impare.

Șirul numerelor prime este fără sfârșit, după cum a demonstrat Euclid.

Cel mai mare număr prim găsit în 2016 de un computer este $2^{74\,207\,281} - 1$ și are peste 22 milioane de cifre.



Eratostene
(276 î.Hr. – 194 î.Hr.)
matematician, astronom,
poet și istoric grec
din Alexandria, Egipt



Euclid
(sec. IV î.Hr. – sec. III î.Hr.)
matematician grec
din Alexandria, Egipt

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

Completați tabelul cu numerele: 51, 52, 53, 54, 55, 56, ..., 199, 200, folosind ciurul lui Eratostene.

Numere prime

53, 59, ...

Numere compuse

51, 52, ...

POT MAI MULT

Dacă numărul este de trei cifre, 253 sau 251 de exemplu, pentru reducerea numărului de împărțiri folosim următorul algoritm de calcul:

Pasul 1: Împărțim succesiv numărul natural n cu numerele prime p , obținute cu sita lui Eratostene.

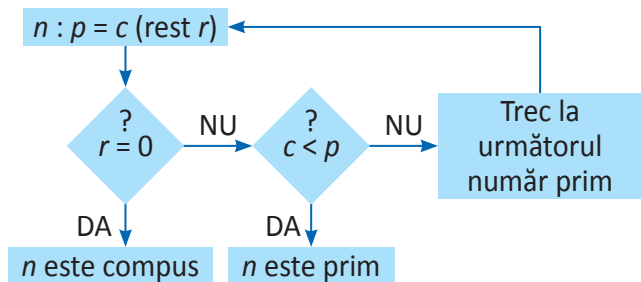
Pasul 2: Când obținem primul rest nul deducem că numărul n este număr compus.

253 este număr compus pentru că $253 = 11 \cdot 23$, restul împărțirii cu 11 este 0.

Pasul 3: Dacă niciun rest nu este nul, procedeul continuă până când obținem primul cât mai mic decât împărțitorul și deducem că numărul n este număr prim.

$251 : 17 = 14$ (rest 13);

Am obținut $14 < 17$ și toate resturile nenule la împărțirile anterioare, deci 251 este număr prim.



APLIC

- 1) Scrieți numerele: 14, 15, 18, 20, 22, 24, 72 sub forma unor produse de numere prime, apoi reprezentați-le sub formă de „arbori”.
- 2) Stabiliți dacă numerele: 143, 187, 209 și 211 sunt compuse.
- 3) Produsul dintre un număr prim și un număr impar este 2 022. Aflați numerele. Justificați!

EXERSEZ

1 Folosind asocierile: verde \Leftrightarrow 2, albastru \Leftrightarrow 5, portocaliu \Leftrightarrow 3, roșu \Leftrightarrow 9, subliniați numerele divizibile cu 2, 5, 3, respectiv 9 din șirul:

320; 525; 450; 108; 912; 3 012; 4 005; 2 022; 2 025; 2 017; 140 811; 1 131 804; 731 808; 900 720.

2 Completați * cu o cifră pentru a obține propoziții adevărate:

- a) $2 \mid 23^*$; b) $379^* \div 4$; c) $5 \mid 71\ 64^*$;
d) $126\ 89^* \div 5$; e) $1\ 20^* \div 9$; f) $5 \nmid 10^*$.

4 Arătați că:

- a) $(3^4 + 3^5) \div 2$; b) $(2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7) \div 5$;
c) $(3^4 + 3^5 + 3^6) \div 13$; d) $(7^4 + 7^5 + 7^6 + 7^7) \div 100$.

5 Scrieți numerele: 14, 20, 35, 36, 50, 19, 65, 77, 51, 81 și 100 ca produs de factori primi.

6 Stabiliți dacă numerele: 1 003, 713, 2 021, 571 și 2 017 sunt prime.

7 Câte numere de 3 cifre sunt divizibile cu: a) 2; b) 3; c) 4; d) 5; e) 9; f) 10; g) 25; h) 7; i) 19?

8 Trei pași de-ai lui Păsări-Lăți-Lungilă fac cât 102 pași de-ai lui Statu-Palmă-Barbă-Cot. Cei doi urcă o scară cu 1 000 de trepte pe care Barbă-Cot pășește din trei în trei trepte. Care dintre afirmații sunt adevărate? a) există cel puțin 9 trepte pe care calcă amândoi; b) există cel mult 991 trepte pe care nu calcă amândoi.

9 Arătați că $2 \cdot 10^n + 22 \div 3$ și $10^n + 17 \div 9$, oricare ar fi numărul natural n .

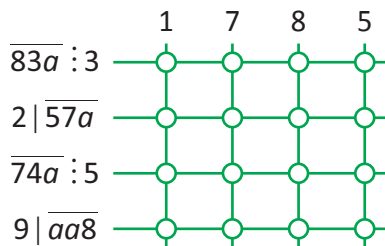
10 Găsiți numerele de forma $\overline{a\underbrace{11\dots1}_\text{de 2020 ori}a}$ divizibile cu 3.

11 Determinați numerele prime a și b , știind că:

- a) $a + b = 10$; b) $a + b = 19$;
c) $2a + 5b = 24$; d) $3a + 7b = 29$.

SUNT CAMPION

12 Demonstrați criteriile de divizibilitate cu 3 și 9 pentru numerele de 2 și 4 cifre.



PORTOFOLIU

Folosiți Wikipedia sau altă enciclopedie pentru a selecta câteva aspecte importante din viața matematicienilor Euclid, Eratostene și C. F. Gauss menționând pentru fiecare lucrarea lui principală. Alegeți un titlu potrivit cu tema dată.



11. Recapitulare

11.1 Ridicarea la putere



1 Calculați:

a) $1^{22} + 41^2 + 0^{42} - 2\ 035^0$; b) $5^4 - 5^3 + 500^0$; c) $2^{10} + 0^{1024} + 1^{1024}$; d) $(0 + 1)^0 + 2^{3^2}$.

2 Efectuați:

a) $3^{17} + 3^9 : 3^6 - 3^{16} \cdot 3^5 : 3^4$; b) $(5^{14} \cdot 3^{17}) : 25^7 + 3^9 : 3^6 - (3^2)^8 \cdot 3^5 : 3^4$;
c) $(2^2 \cdot 3)^{17} : 2^{34} + 3^9 : 27^3 - 9^8 \cdot 3^5 : 3^4$; d) $3^5 + 3^5 - (3^2)^3 + 3^5$.

3 Comparați puterile:

a) 15^{14} și 15^{13} ; b) 100^{60} și 100^{50} ; c) 81^{401} și 81^{350} ; d) 13^9 și 17^6 ;
e) 3^{100} și 2^{150} ; f) 15^6 și 225^3 ; g) 5^{18} și 125^5 ; h) 9^4 și 3^8 ;
i) 27^4 și 3^{13} ; j) 5^{40} și 7^{30} ; k) 30^{30} și 10^{45} ; l) 16^{30} și 27^{20} .

4 Ordonăți descrescător puterile:

a) $11^4, 11^7, 11^5, 11^2, 11^3$; b) $108^7, 1\ 030^7, 245^7, 1\ 011^7, 1\ 101^7$;
c) $27^5, 9^7, 241^4, 3^{16}, 2^{21}$; d) $5^{55}, 55^5, 5^{5^5}, 555$.

5 Calculați:

$2^2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$
$5 \cdot (3^2 \cdot 3^4)^2 : 9^6$
$81^4 : 27^5 : 3^1 : 3^0$
$(7^5 \cdot 8^3)^2 : (2^9 \cdot 7^{10})$
$(2^9 + 2^9 + 2^9)^5 : (81 \cdot 2^{45})$

6 Efectuați:

$(3^9 + 3^9)^5 : (32 \cdot 3^{45})$
$125^4 : 25^5 : 5^2 : 5^0$
$9 \cdot (2^2 \cdot 2^4)^2 : 8^4$
$8^{12} + 8^{12} + 8^{12} + 8^{12} + 8^{13}$
$(6^5 \cdot 8^3 \cdot 3)^2 : (2^9 \cdot 6^{10} \cdot 9)$

7 Aflați numărul natural necunoscut x pentru ca egalitățile să fie adevărate:

a) $8 = 2^{x+1}$; b) $121 = 11^{2x}$;
c) $10\ 000 = 10^x$; d) $3^x = 81$;
e) $81 = 9^{x+2}$; f) $625 = 5^{3x+1}$.

8 Descompuneți în două moduri ca sumă de puteri ale lui 10 numerele scrise în baza 10:

a) 802; b) 760; c) 9 004;
d) 701 000; e) 809 005; f) 55 040 291;
g) $\overline{904a}$; h) $\overline{89aab}$; i) $\overline{a00b7ab0}$.

9 Calculați: a) $24 \cdot 11 + 8^2 - 196 : 7$;

b) $245 \cdot (11 + 8^2) - 21\ 196 : 14$;
c) $245 \cdot [8 + (68^2 - 496)] : 4$;
d) $51 \cdot \{18 + [(28^2 - 136) : 4]\}$.

10 Descompuneți în două moduri ca sumă de puteri ale lui 2 numerele scrise în baza 2:

a) 111; b) 1 101; c) 1 001;
d) 101 000; e) 101 001; f) 11 010 111;
g) $\overline{101a}$; h) $\overline{11aaa}$; i) $\overline{a00b1bb0}$.

11 Scrieți numerele:

a) 59, 391 și 1 107 în baza 2;

b) 1 100; 1 010; 1 111; 100 101 în baza 10.

- 12 Aflați ultima cifră a numărului $2032^{2030} + 2031^{2032} + 2030^{2031}$.
- 13 Aflați \overline{ab} dacă $\overline{ab} = a + b^2$. Justificați!
- 14 Arătați că 2 021 nu este pătrat perfect.
- 15 Folosind factorul comun, arătați că $2\ 023 \cdot 505 + 1\ 011 = 1\ 011^2 + 505$.

11.2 Metode aritmetice de rezolvare a problemelor

- 1 Din 450 l de lapte se obțin 45 kg de smântână. Din câți litri de lapte se obțin 17 kg de smântână?
- 2 Lucrând împreună, 2 elevi termină o temă în 30 minute. În câte minute vor termina aceeași temă 5 elevi?

- 3 Dan poate cumpăra cu banii pe care îi are 3 frezii sau 7 lalele de ziua mamei sale. Știind că o frezie este mai scumpă cu 4 lei decât o lălea, aflați câți lei are Dan.



- 4 Pentru 4 seturi de creioane și 2 seturi de geometrie s-au plătit 180 lei, iar 7 seturi de creioane și 2 seturi de geometrie costă 240 lei. Cât costă fiecare set?



- 5 Când eu aveam 5 ani, fratele meu avea 2 ani. Acum avem împreună 35 de ani. Câți ani are fiecare dintre noi?
- 6 Un album costă cu 30 lei mai mult decât 2 manuale. Dacă 7 albume și 9 manuale costă 555 lei, cât costă un manual? Dar un album?
- 7 Un călător salută un turmă de oi: „Bună ziua, 1 000 de oi!”. O oaie răspunde: „Nu suntem 1 000! Dacă am fi de trei ori câte suntem, încă pe jumătate, încă pe sfert și încă 10 oi, atunci am fi 1 000. Câte oi sunt în turmă?”
- 8 Dan vinde garoafe. Lui Alex îi vinde jumătate din cantitate, Laura cumpără o treime din ce îi rămâne, iar Ioana ia o cincime din noul rest. Câte garoafe a avut la început Dan, dacă i-au mai rămas 8 garoafe?
- 9 La o fermă sunt păsări și iepuri. Câte păsări și câți iepuri sunt la fermă dacă am numărat 137 capete și 312 picioare?
- 10 Alex are suma de 9 800 lei în bancnote de 10 lei și de 50 lei. Dacă sunt în total 240 de bancnote, să se afle câte bancnote de fiecare fel are Alex.
- 11 Dacă m-aș fi născut în 1 890, atunci în anul în care m-am născut aș fi împlinit vârsta pe care o am acum, în 2 022. În ce an m-am născut?

11.3 Divizibilitatea numerelor

1 Alegeți multiplii numerelor scrise pe rândul de sus.

	3	2	9	10	100	4	7	5	25
2 628	○	○	○	○	○	○	○	○	○
18 000	○	○	○	○	○	○	○	○	○
40 000	○	○	○	○	○	○	○	○	○
65 025	○	○	○	○	○	○	○	○	○
6 264	○	○	○	○	○	○	○	○	○
21 196	○	○	○	○	○	○	○	○	○
175	○	○	○	○	○	○	○	○	○
2 017	○	○	○	○	○	○	○	○	○
750	○	○	○	○	○	○	○	○	○

2 Scrieți divizorii primi ai numerelor:

- | | | |
|-----------|---------|---------|
| a) 28; | b) 34; | c) 15; |
| d) 81; | e) 87; | f) 96; |
| g) 100; | h) 101; | i) 102; |
| j) 125; | k) 144; | l) 169; |
| m) 1 000; | n) 221; | o) 293. |

3 Stabiliți dacă numerele:
47; 51; 61; 97; 181; 529
sunt prime.

4 Scrieți divizorii comuni ai numerelor:

- | | | |
|--------------|--------------|--------------|
| a) 24 și 36; | b) 28 și 42; | c) 30 și 40; |
| d) 18 și 45; | e) 6 și 35; | f) 13 și 23. |

5 Scrieți multiplii comuni ai numerelor:

- | | | |
|------------|------------|-------------|
| a) 2 și 3; | b) 8 și 4; | c) 3 și 4; |
| d) 8 și 5; | e) 6 și 9; | f) 10 și 5. |

6 În cabinetul de biologie, elevii sunt repartizați câte 5 la un microscop și rămâne un elev în afară. Dacă sunt așezați câte 4 rămâne tot un elev fără loc. Când sunt așezați câte 3 nu mai rămâne niciun elev în afară. Câți elevi sunt?



7 Alex și Bianca împodobesc bradul cu 48 globulețe, 36 steluțe, 12 lumânări și 24 de artificii. Câte bucăți din fiecare podoabă trebuie să pună copiii pe o ramură de brad pentru a aranja toate podoabele în mod egal pe cât mai multe ramuri?

8 Câte numere de forma $\overline{a7b}$ sunt divizibile cu: 2; 5; 10; 3; 9; 4; 25?

9 Arătați că numărul 1 234 567 ... 202 020 212 022 este divizibil cu 3.

Indicație: Pentru a calcula suma cifrelor numărului, considerăm perechile: (0; 1 999), (1; 1 998), (2; 1 997), ..., (999; 1 000) și suma cifrelor numerelor fiecărei perechi este 28.

SUNT CAMPION

10 Dacă un număr natural este divizibil cu suma divizorilor săi primi, îl vom numi *prietenos*.

- a) Arătați că 30 este un număr prietenos, iar 50 nu este;
- b) Găsiți toate numerele prietenoase de două cifre mai mari ca 89;
- c) Arătați că dacă n este un număr prietenos și p este un divizor prim al său, atunci numărul $n \cdot p$ este prietenos.

11 Aflați numerele \overline{abc} dacă $\overline{abc} = a + b + c^3$. Justificați!

12 Scrieți numerele 13^{2033} și 13^{2034} ca sumă de două pătrate.

TEST DE EVALUARE

Ce știi? Cum știi? Cât știi?

Partea I

La exercițiile 1 și 2 scrieți numai rezultatele, la exercițiul 3 scrieți (A) dacă propoziția este adevărată și (F) dacă propoziția este falsă.

1 Scrieți ca putere:

a) $13^{31} : 13^{23}$; b) $7^{12} \cdot 7^{19}$; c) $(14^3)^5$; d) $5^{12} \cdot 2^{12}$.

2 Cât costă 3 cărți dacă 7 cărți de același fel costă 364 lei?

3 Precizați pentru fiecare dintre propozițiile de mai jos dacă este adevărată sau falsă:

a) $1^{22} + 4^2 + 0^{42} + 22^0 = 39$.

b) $1\ 053 : 9$.

c) $6^5 \cdot 10^3$ se termină cu 4 zerouri.

d) $2^4_{(10)} = 10\ 000_{(2)}$.

Partea a II-a

La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

1 Efectuați:

a) $5^4 \cdot (5^2 \cdot 5^4)^2 : 25^8$;

b) $10^3 : \{118 + 7^3 : [(2 \cdot 5^2)^2 : 50 - 1]\}$.

2 Determinați:

a) divizorii comuni ai numerelor 24 și 36;

b) numerele de forma $\overline{a4a}$ divizibile cu 9.

c) numărul mai mare dintre 2^{70} și $3^{46} + 3^{47}$. Justificați!

3 Ioana a cumpărat 2 caiete și 3 cărți cheltuind 51 lei. Dacă o carte este mai scumpă cu 12 lei decât un caiet, cât costă un caiet? Dar o carte?



Punctaj acordat:				
	1	2	3	Total
Partea I (45 p.)	20 p. (4 × 5 p.)	5 p.	20 p. (4 × 5 p.)	
Partea a II-a (45 p.)	15 p. a) 7 p.; b) 8 p.	20 p. a) 7 p.; b) 6 p.; c) 7 p.	10 p.	

Se acordă 10 puncte din oficiu. Pentru a afla nota finală, rezultatul obținut se împarte la 10.

12. Frații ordinare

12.1 Frații echiunitare, subunitare, supraunitare.
Scriere procentuală

ÎMI AMINTESC!

Dacă împărțim un întreg sau mai mulți întregi identici în același număr de părți egale, atunci una sau mai multe dintre părțile egale reprezintă o *fracție ordinară*.

Numărător, numitor

Orice fracție ordinară are forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale, iar b este întotdeauna diferit de zero.

Numărul b este *numitorul fracției* și arată în câte părți egale a fost împărțit întregul, iar numărul a este *numărătorul fracției* și arată câte astfel de părți au fost considerate.

Cum citim o fracție?



Fracția $\frac{1}{2}$ se citește o doime (jumătate) unu pe doi unu supra doi

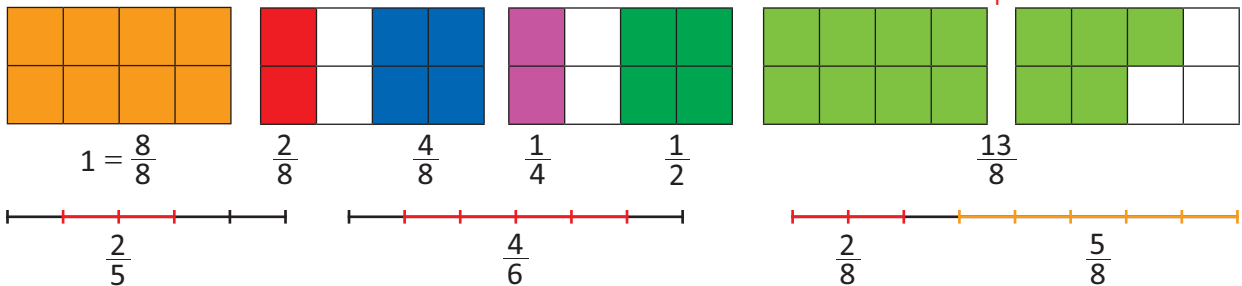
Fracția $\frac{4}{5}$ se citește patru cincimi patru pe cinci patru supra cinci

Fracția $\frac{1}{4}$ se citește o pătrime (un sfert) unu pe patru unu supra patru

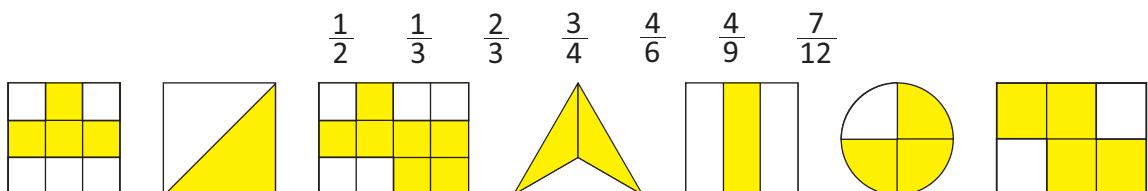
Fracția $\frac{7}{9}$ se citește șapte noimi șapte pe nouă șapte supra nouă

APLIC

- Observăm și interpretăm părțile colorate din desen.



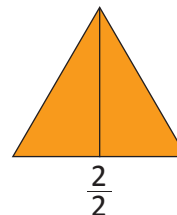
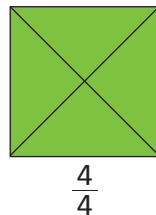
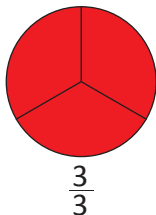
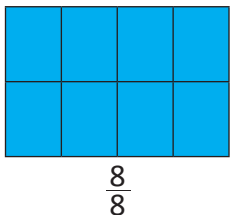
- Stabiliți corespondența dintre fiecare fracție și părțile colorate din desene.



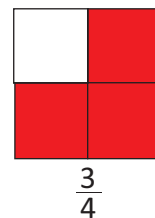
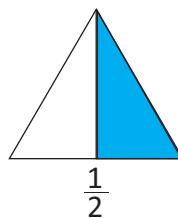
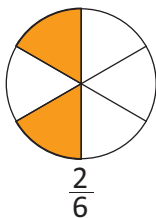
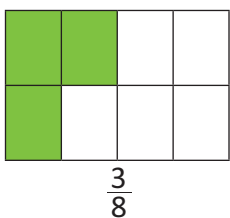
A. Frații echiunitare, subunitare, supraunitare

ÎMI AMINTESC!

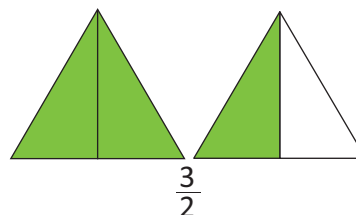
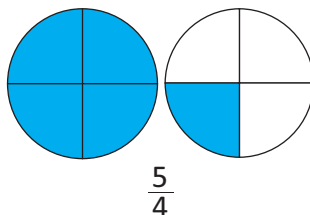
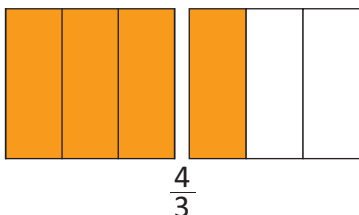
Fracții echiunitare






Fracții subunitare



Fracții supraunitare



Fracția $\frac{a}{b}$ se numește:

- **echiunitară** dacă numărătorul este egal cu numitorul ($a = b, \frac{a}{b} = 1$). 
- **subunitară** dacă numărătorul este mai mic decât numitorul ($a < b, \frac{a}{b} < 1$). 
- **supraunitară** dacă numărătorul este mai mare decât numitorul ($a > b, \frac{a}{b} > 1$). 

EXERSEZ

- 1 Reprezentați prin desene colorate diferit:
- 4 fracții subunitare diferite (folosind un pătrat, un cerc, un dreptunghi, un triunghi echilateral);
 - 3 fracții supraunitare diferite (folosind pătrate, cercuri, segmente).

- 2 Reprezentați prin desene colorate fracțiile, alegând ca întreg figurile indicate.
- $\frac{2}{3}$ (pătrat, cerc);
 - $\frac{3}{6}$ (cerc, dreptunghi);
 - $\frac{5}{4}$ (segment, cerc);
 - $\frac{5}{2}$ (cerc, triunghi).

3 Citiți următoarele fracții: $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{7}, \frac{9}{16}, \frac{4}{8}, \frac{9}{7}, \frac{3}{10}, \frac{12}{100}, \frac{94}{83}, \frac{32}{1000}$.

4 Scrieți 3 fracții echiunitare folosind:
a) numere pare; b) numere impare.

5 Scrieți 3 fracții supraunitare cu numărătorul 6 și 3 fracții supraunitare cu numitorul 10.

6 Scrieți 3 fracții subunitare cu numitorul 4 și 3 fracții subunitare cu numărătorul 7.

7 Ce fracție dintr-o zi reprezintă:

- a) 12 ore; b) 8 ore; c) 6 ore; d) 4 ore;
e) 2 ore; f) 3 ore; g) 24 ore; h) 36 ore.

8 Ce fracție dintr-o oră reprezintă:

- a) 15 minute; b) 20 minute; c) 30 minute;
d) 60 minute; e) 50 minute; f) 75 minute?

9 Scrieți 4 fracții, folosind numai numerele 4 și 5.

SUNT CAMPION

10 Pentru câte numere naturale n , fracția $\frac{n+4}{10}$ este subunitară?

11 Scrieți toate fracțiile subunitare de forma $\frac{x7}{2y}$.

12 Aflați numerele naturale x și y pentru care fracția $\frac{12}{(x-1)(y+2)}$ este echiunitară.

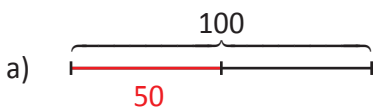
B. Scriere procentuală

ÎMI AMINTESC!

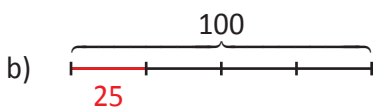
Fracția $\frac{P}{100}$ se mai scrie $p\%$ și se citește p la sută.

- Ce parte dintr-un întreg reprezintă: a) $\frac{50}{100}$ (50%); b) $\frac{25}{100}$ (25%); c) $\frac{20}{100}$ (20%).

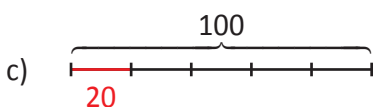
Considerăm un întreg împărțit în 100 de părți egale.



50% dintr-un întreg reprezintă $\frac{1}{2}$ (o jumătate) din întreg.



25% dintr-un întreg reprezintă $\frac{1}{4}$ (un sfert) din întreg.



20% dintr-un întreg reprezintă $\frac{1}{5}$ (o cincime) din întreg.

ÎNȚELEG

50% din 60 înseamnă $\frac{1}{2}$ din 60 și $60 : 2 = 30$.

25% din 60 înseamnă $\frac{1}{4}$ din 60 și $60 : 4 = 15$.

20% din 60 înseamnă $\frac{1}{5}$ din 60 și $60 : 5 = 12$.

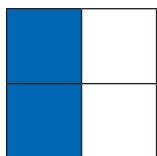
EXERSEZ

Aflați:

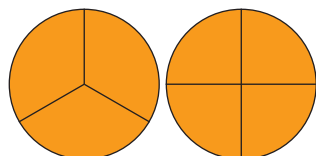
- a) 50% din 600; b) 25% din 800;
c) 20% din 400; d) 75% din 60.

12.2 Frații echivalente

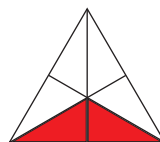
OBSERV



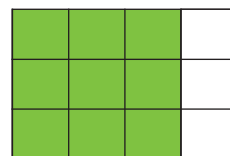
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$



$$\frac{3}{3} = \frac{4}{4}$$



$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$



$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Să privim desenele. În fiecare caz ilustrat, cele două fracții reprezintă *aceeași parte* din întregul considerat (pătrat, cerc, triunghi, dreptunghi).

Două fracții sunt *echivalente* dacă reprezintă aceeași parte dintr-un întreg sau din mai mulți întregi identici.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

$$1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$$

$$\frac{3}{3} = \frac{4}{4}$$

$$3 \cdot 4 = 3 \cdot 4$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

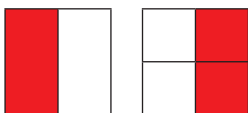
$$1 \cdot 6 = 3 \cdot 2$$

$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

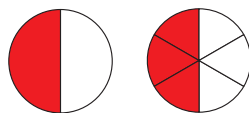
$$9 \cdot 4 = 12 \cdot 3$$

Scrieți în fiecare caz echivalențele induse de suprafețele colorate:

a)



$$\frac{1}{2} = \frac{\square}{\square}$$

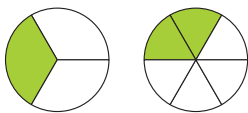


$$\frac{1}{2} = \frac{\square}{\square}$$

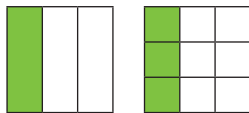


$$\frac{1}{2} = \frac{\square}{\square}$$

b)



$$\frac{1}{3} = \frac{\square}{\square}$$

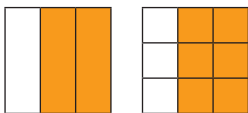


$$\frac{1}{3} = \frac{\square}{\square}$$

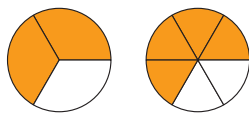


$$\frac{1}{3} = \frac{\square}{\square}$$

c)



$$\frac{2}{3} = \frac{\square}{\square}$$

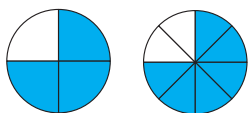


$$\frac{2}{3} = \frac{\square}{\square}$$

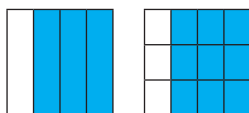


$$\frac{2}{3} = \frac{\square}{\square}$$

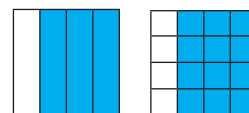
d)



$$\frac{3}{4} = \frac{\square}{\square}$$



$$\frac{3}{4} = \frac{\square}{\square}$$



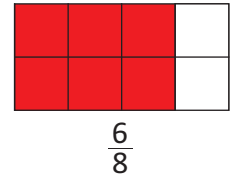
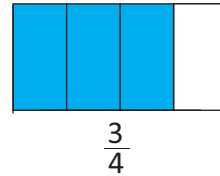
$$\frac{3}{4} = \frac{\square}{\square}$$

ÎNȚELEG

Două echipe de câte 8 elevi au participat la un concurs. Din prima echipă au luat premii $\frac{3}{4}$ din numărul elevilor, iar din a doua echipă au fost premiați $\frac{6}{8}$ din numărul elevilor.

Care echipă a luat mai multe premii?

Rezolvare: Analizând desenele, se observă că cele două echipe au obținut același număr de premii, deoarece $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.



EXERSEZ

1 Folosind metoda grafică (prin desene), arătați că următoarele egalități sunt adevărate:

a) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$; b) $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$; c) $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; d) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$; e) $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$; f) $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

2 Folosiți metoda grafică pentru a justifica echivalența următoarelor fracții:

a) $\frac{2}{3}$ și $\frac{6}{9}$; b) $\frac{3}{4}$ și $\frac{9}{12}$; c) $\frac{2}{3}$ și $\frac{4}{6}$; d) $\frac{4}{5}$ și $\frac{8}{10}$; e) $\frac{1}{2}$ și $\frac{4}{8}$; f) $\frac{1}{3}$ și $\frac{4}{12}$.

3 Completați, astfel încât relațiile să fie corecte:

a) $\frac{1}{2} = \frac{\square}{8}$; b) $\frac{6}{6} = \frac{\square}{3}$; c) $\frac{1}{3} = \frac{\square}{6}$; d) $\frac{2}{3} = \frac{\square}{12}$; e) $\frac{3}{4} = \frac{\square}{8}$; f) $\frac{2}{6} = \frac{\square}{12}$;
 g) $\frac{4}{6} = \frac{\square}{3}$; h) $\frac{4}{8} = \frac{\square}{4}$; i) $\frac{0}{8} = \frac{\square}{3}$; j) $\frac{6}{8} = \frac{\square}{12}$; k) $\frac{2}{8} = \frac{\square}{16}$; l) $\frac{3}{4} = \frac{\square}{12}$.

4 Folosind o singură dată fiecare dintre numerele 2, 3, 4, 6, scrieți patru perechi de fracții echivalente.

5 Scrieți fracții echivalente cu termeni mai mici:

a) $\frac{2}{8}$; b) $\frac{5}{10}$; c) $\frac{4}{6}$; d) $\frac{3}{12}$;
 e) $\frac{4}{8}$; f) $\frac{6}{8}$; g) $\frac{4}{12}$; h) $\frac{6}{9}$.

7 Alegeți 5 perechi de fracții echivalente dintre fracțiile:

$\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{4}{6}, \frac{6}{2}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{9}{3}, \frac{6}{4}, \frac{9}{12}, \frac{6}{9}$.

8 Determinați numerele naturale a și b , astfel încât $\frac{3}{a} = \frac{b}{4}$. Câte soluții are problema?

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

6 Completați căsuțele libere alegând din primul rând fracții echivalente celor din al doilea rând.

$\frac{3}{9}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{10}{5}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{3}$
$\frac{3}{12}$							

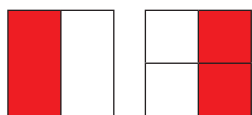
SUNT CAMPION

9 Aflați perechile ordonate $(a; b)$ de numere naturale nenule știind că: $\frac{a}{8} = \frac{3}{b}$ și $3a + 3b = 30$.

13. Amplificarea și simplificarea fracțiilor

13.1 Amplificarea fracțiilor

OBSERV



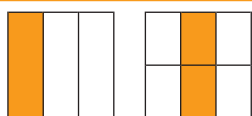
$$\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} \frac{2}{4}$$



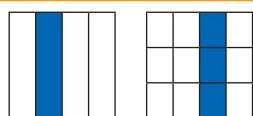
$$\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 3} \frac{3}{6}$$



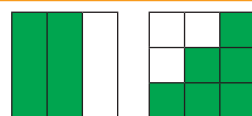
$$\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 4} \frac{4}{8}$$



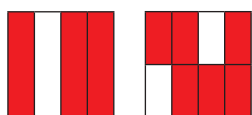
$$\frac{1}{3} \xrightarrow{\times 2} \frac{2}{6}$$



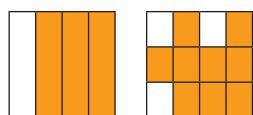
$$\frac{1}{4} \xrightarrow{\times 3} \frac{3}{12}$$



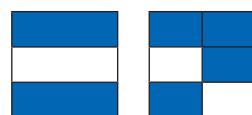
$$\frac{2}{3} \xrightarrow{\times 3} \frac{6}{9}$$



$$\frac{3}{4} \xrightarrow{\times 2} \frac{6}{8}$$



$$\frac{3}{4} \xrightarrow{\times 3} \frac{9}{12}$$



$$\frac{2}{3} \xrightarrow{\times 2} \frac{4}{6}$$



Dacă înmulțesc numărătorul și numitorul unei fracții cu același număr nenul obțin o fracție cu numere mai mari.

$$\frac{6}{4} = \frac{6 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{18}{12}$$

Noua fracție este echivalentă cu prima fracție. Astfel putem scrie multe fracții echivalente alegând alt număr pentru înmulțire.



ÎNȚELEG

Acest procedeu se numește **amplificare** și poate fi aplicat aceleiași fracții de un număr nesfârșit de ori (pentru orice număr natural nenul ales ca înmulțitor).

Exemple: $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 2}{7 \cdot 2}, \frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 3}, \frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 4}{7 \cdot 4}$

Amplificarea fracției $\frac{a}{b}$ cu un număr natural $n \neq 0$ este un procedeu prin care se obține fracția $\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}$.

Acest procedeu se notează $\frac{a}{b} \xrightarrow{n} \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$.

Exemple: $\frac{4}{5} \xrightarrow{3} \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{12}{15}; \frac{7}{3} \xrightarrow{2} \frac{7 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{14}{6}$.

APLIC

1) Amplificați cu 3 următoarele fracții: a) $\frac{7}{2}$; b) $\frac{5}{6}$; c) $\frac{2}{7}$; d) $\frac{4}{9}$; e) $\frac{6}{11}$; f) $\frac{20}{13}$; g) $\frac{19}{8}$; h) $\frac{31}{16}$.

Model de rezolvare: $\overset{3)}{\frac{7}{2}} = \frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{21}{6}$.

2) Amplificați fracțiile $\frac{4}{6}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{9}{9}$; $\frac{7}{21}$; $\frac{3x}{2y}$; $\frac{a+b}{a-b}$; cu: a) 3; b) 4; c) 6; d) 8.

Model de rezolvare: $\overset{5)}{\frac{9}{13}} = \frac{9 \cdot 5}{13 \cdot 5} = \frac{45}{65}$.

EXERSEZ

1 Completați casetele, astfel încât egalitățile să fie adevărate:

a) $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$; b) $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$; c) $\frac{7}{8} = \frac{42}{48}$; d) $\frac{8}{9} = \frac{72}{81}$;
 e) $\frac{12}{7} = \frac{60}{35}$; f) $\frac{11}{12} = \frac{77}{84}$; g) $\frac{5}{13} = \frac{25}{65}$; h) $\frac{3}{4} = \frac{36}{48}$.

2 Determinați factorul n de amplificare.

$\frac{a}{b}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{13}{14}$	$\frac{16}{23}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{9}$
$\overset{n)}{\frac{a}{b}}$	$\frac{28}{21}$	$\frac{15}{18}$	$\frac{16}{22}$	$\frac{48}{28}$	$\frac{45}{40}$	$\frac{39}{42}$	$\frac{32}{46}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{56}{72}$

3 Determinați fracțiile echivalente cu $\frac{7}{5}$, având numărătorii:

a) 56; b) 28; c) 63; d) 42; e) 105.

4 Determinați fracțiile echivalente cu $\frac{11}{6}$, având numitorii:

a) 30; b) 24; c) 72; d) 42; e) 78.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

5 Alegeți din primul rând câte un factor de amplificare pentru fracția $\frac{4}{7}$ și găsiți corespondența acestuia cu una dintre fracțiile din al doilea rând.

2	3	4	5	6	7	8	9
				$\frac{4}{7}$			
$\frac{8}{14}$	$\frac{28}{49}$	$\frac{20}{35}$	$\frac{32}{56}$	$\frac{24}{42}$	$\frac{12}{21}$	$\frac{36}{63}$	$\frac{16}{28}$

6 Amplificați fracția $\frac{8}{9}$, astfel încât să obțineți fracții echivalente, cu numitorii mai mici decât 46.

Indicație: Scrieți multiplii lui 9 diferiți de 9 și mai mici decât 46.

7 Amplificați fracțiile $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{5}$ și $\frac{8}{7}$, astfel încât să obțineți câte 3 fracții cu numărătorii egali cu:

a) 24; b) 48; c) 72; d) 96.

13.2 Cel mai mare divizor comun

OBSERV

Miruna vrea să așeze 18 mere și 12 pere în coșulețe identice (fiecare coșuleț având același număr de mere, respectiv același număr de pere). Cum o ajutăm să realizeze acest aranjament într-un număr maxim de coșulețe?

Rezolvare: Prima condiție desprinsă din enunțul problemei este că numărul de coșuri trebuie să dividă atât pe 12, cât și pe 18.

Putem aranja fructele în două coșulețe conținând câte 9 mere și 6 pere, 3 coșulețe conținând câte 6 mere și 4 pere sau 6 coșulețe cu câte 3 mere și două pere.

1	2	3	6	9	18
---	---	---	---	---	----

1	2	3	4	6	12
---	---	---	---	---	----



Analizând grilele divizorilor celor două numere 12 și 18, ne dăm seama că nu putem aranja fructele în mai mult de 6 coșulețe, deoarece nu există număr mai mare decât 6 și care să dividă atât pe 12 cât și pe 18.

Răspuns: 6 coșulețe.

ÎNȚELEG

Cel mai mare divizor comun al numerelor a și b (nu ambele nule) este cel mai mare număr natural d la care se împart exact cele două numere. Se notează $d = (a; b)$.

Noțiunea de c.m.m.d.c. se extinde și pentru mai multe numere, iar faptul că numărul natural d este c.m.m.d.c. se exprimă asemănător.

$$d = (a; b; c), \quad d = (a; b; c; e) \dots$$

Expresia „cel mai mare divizor comun” se prescurtează **c.m.m.d.c.**



• Două numere naturale x și y pentru care $(x; y) = 1$ se numesc *numere prime între ele*.

• Cele două proprietăți ce definesc cel mai mare divizor comun d al numerelor a și b (nu ambele nule), „aceea de a fi divizor comun” și „aceea de a fi cel mai mare”, se exprimă în limbaj matematic astfel:

$$1) \ a = d \cdot x, \ b = d \cdot y, \ x \text{ și } y \text{ numere naturale} \quad \text{și} \quad 2) \ (x; y) = 1, \ x \text{ și } y \text{ numere prime între ele}$$

APLIC

1) Cum verificăm dacă egalitățile sunt adevărate:

a) $(8; 6) = 2$, **b)** $(6; 9; 12) = 3$, **c)** $(0; 4) = 4$, **d)** $(8; 9) = 1$

Rezolvare: a) 1) $8 = 2 \cdot 4$, $6 = 2 \cdot 3$ și

2) $(4; 3) = 1$;

b) 1) $6 = 3 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$, $12 = 3 \cdot 4$ și

2) $(2; 3; 4) = 1$;

c) 1) $0 = 4 \cdot 0$, $4 = 4 \cdot 1$ și

2) $(0; 1) = 1$;

d)

1	2	4	8
---	---	---	---

1	3	9
---	---	---

Se observă că 1 este singurul divizor comun al numerelor 8 și 9.

2) Cum verificăm dacă două sau mai multe numere naturale (nu toate nule) sunt prime între ele?

Rezolvare: Alcătuim grila divizorilor celui mai simplu număr (de obicei cel mai mic) și verificăm care dintre aceștia divid și celelalte numere. Dacă nu există niciun divizor comun diferit de 1, spunem că numerele sunt prime între ele.

Pentru numerele 6, 46 și 95 procedăm astfel:

Grila divizorilor lui 6 este:

1	2	3	6
---	---	---	---

$2 \nmid 95, 3 \nmid 46, 6 \nmid 46, 6 \nmid 95.$

În concluzie, spunem că numerele 6, 46 și 95 sunt prime între ele și notăm $(6; 46; 95) = 1.$

3) Verificați dacă 12 este c.m.m.d.c. al numerelor 36 și 48.

Rezolvare: Metoda I.

1	2	3	4	6	9	12	18	36
---	---	---	---	---	---	----	----	----

1	2	3	4	6	8	12	16	24	48
---	---	---	---	---	---	----	----	----	----

Divizorii comuni sunt:

1	2	3	4	6	12
---	---	---	---	---	----

iar $(36; 48) = 12.$

Metoda II. Verificăm cele două proprietăți care definesc c.m.m.d.c.

1) $36 = 12 \cdot 3, 48 = 12 \cdot 4$ și 2) $(3; 4) = 1.$

În concluzie: $(36; 48) = 12.$

4) Este 7 c.m.m.d.c. al numerelor 28 și 42?

Rezolvare: Verificăm condițiile ce definesc c.m.m.d.c.

1) $28 = 7 \cdot 4, 42 = 7 \cdot 6$ și 2) $(4; 6) = 2 \neq 1.$

Deși 7 este divizor comun, el nu este și cel mai mare. Răspunsul la întrebare este NU. Adevărul este $(28; 42) = 14,$ deoarece sunt îndeplinite ambele condiții:

1) $28 = 14 \cdot 2, 42 = 14 \cdot 3$ și 2) $(2; 3) = 1.$

Și mai simplu, scriem în ordine crescătoare divizorii lui 28.

1	2	4	7	14	28
---	---	---	---	----	----

Se observă că $28 \nmid 42,$ dar $14 \mid 42$ ceea ce înseamnă că nu 7 este c.m.m.d.c.

EXERSEZ

1 Scrieți în ordine crescătoare divizorii fiecărui număr și stabiliți c.m.m.d.c. al grupelor de numere:

- a) 2 și 4; b) 3 și 6; c) 3 și 5; d) 4 și 6; e) 6 și 9; f) 10 și 15;
g) 8 și 12; h) 12 și 18; i) 4, 6 și 8; j) 18; 24 și 30.

2 Arătați că 9 este c.m.m.d.c. al numerelor 27 și 45. Observați din grilele divizorilor celor două numere scrise în ordine crescătoare și motivați răspunsul și prin verificarea condițiilor din definiția c.m.m.d.c.

3 Unde este greșeala? Dan afirmă că 6 este c.m.m.d.c. al numerelor 12 și 15 scriind următoarele două relații adevărate:

a) $12 = 6 \cdot 2$, $15 = 5 \cdot 3$ și

b) $(2; 3) = 1$

4 Arătați că egalitatea $(48; 72) = 8$ nu este adevărată.

5 Aflați c.m.m.d.c. al numerelor 18, 24 și 30 și verificați cele două condiții din definiția c.m.m.d.c.

6 Aflați valorile cifrei x știind că 12 este c.m.m.d.c. al numerelor $a = 36$ și $b = 12 \cdot x$.

7 Copiați și completați tabelul:

a și b	9 și 12	16 și 24	18 și 42	30 și 45	20 și 35	36 și 48	45 și 49	72 și 90
$(a; b)$								

8 Găsiți 3 perechi de valori naturale pentru x și y , știind că $a = 8 \cdot x$, $b = 8 \cdot y$ și $(a; b) = 8$.

9 Precizați cifra x , dacă $(54; \overline{7x}) = 6$, evidențiind cele două condiții ale c.m.m.d.c.

10 Aflați numerele naturale a, b, c cuprinse între 37 și 70, știind că $(a; b; c) = 11$ și verificați cele două condiții din definiția c.m.m.d.c.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

11 Copiați tabelul și completați căsuțele libere cu c.m.m.d.c. al numerelor a și b .

$a = 8 \cdot 3$	$a = 6 \cdot 4$	$a = 6 \cdot 8$	$a = 6 \cdot 4$	$a = 9 \cdot 6$	$a = 6 \cdot 5$	$a = 9 \cdot 10$
$b = 8 \cdot 5$	$b = 4 \cdot 3$	$b = 6 \cdot 9$	$b = 4 \cdot 3$	$b = 9 \cdot 4$	$b = 5 \cdot 8$	$b = 9 \cdot 15$

12 Aflați două numere naturale a, b diferite de 8, știind că $(a; b) = 8$ și $a + b = 10$.

13 Dacă $(a; b) = 5$, arătați că $(4 \cdot a; 6 \cdot b) = 10$.

14 Aflați numerele naturale $\overline{3x}$ și $\overline{4y}$, știind că $(\overline{3x}; \overline{4y}) = 6$. Câte soluții există?

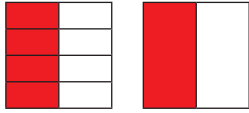
15 Aflați numerele naturale a și b diferite de 6, știind că $(a; b) = 6$ și $a \cdot b = 432$.

16 Aflați 3 perechi de numere naturale cuprinse între 20 și 30, astfel încât c.m.m.d.c. al lor să fie 3.

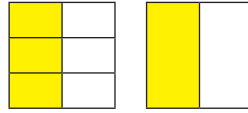
17 Arătați că numerele naturale $x = 3n + 1$ și $y = 4n + 1$ sunt prime între ele.

13.3 Simplificarea fracțiilor

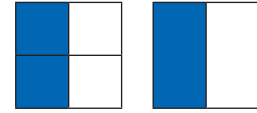
OBSERV



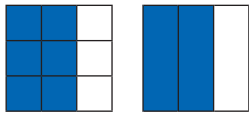
$$\frac{4}{8} = \frac{2}{4}$$



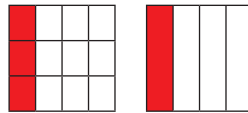
$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



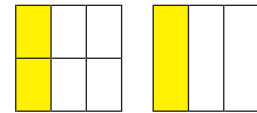
$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$



$$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$



$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$\frac{15:5}{10:5} = \frac{3}{2}$, iar $\frac{15}{10} = \frac{3}{2}$ deoarece $15 \cdot 2 = 10 \cdot 3$ $\frac{16:4}{12:4} = \frac{4}{3}$, iar $\frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ deoarece $16 \cdot 3 = 12 \cdot 4$

• După împărțirea număratorului și numitorului unei fracții la același număr natural s-a obținut o fracție echivalentă cu prima fracție.

• Ce se întâmplă dacă împărțim număratorului și numitorul fracției $\frac{24}{36}$ pe rând cu 2, 3, 4, 6 și 12?

$$\frac{24:2}{36:2} = \frac{12}{18}, \quad \frac{24:3}{36:3} = \frac{8}{12}, \quad \frac{24:4}{36:4} = \frac{6}{9}, \quad \frac{24:6}{36:6} = \frac{4}{6}, \quad \frac{24:12}{36:12} = \frac{2}{3}$$

Nu se mai poate continua problema pentru numere mai mari ca 12.

ÎNȚELEG



Dacă împărțim număratorului și numitorul unei fracții la același divisor comun $n \neq 1$, obținem o altă fracție.

Noua fracție este însă echivalentă cu prima, dar mai simplă.



Simplificarea fracției $\frac{a}{b}$ cu un divisor comun $n \neq 1$ este un procedeu prin care se obține fracția $\frac{a:n}{b:n}$ echivalentă cu $\frac{a}{b}$.

Acest procedeu se notează $\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}} = \frac{a:n}{b:n}$.

Exemple: $\frac{30^{(10)}}{20} = \frac{30:10}{20:10} = \frac{3}{2}$; $\frac{12^{(2)}}{8} = \frac{12:2}{8:2} = \frac{6}{4}$; $\frac{18^{(3)}}{21} = \frac{18:3}{21:3} = \frac{6}{7}$; $\frac{12^{(2)}}{18} = \frac{12:2}{18:2} = \frac{6}{9}$.

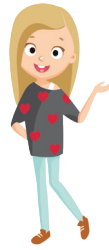
Simplificarea poate fi efectuată și prin tăiere, ca în exemplele: $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ $\frac{12 \cdot 9}{8 \cdot 6} = \frac{9}{4}$

Simplificarea nu se face în adunare și scădere. $\frac{15+3}{10} \neq \frac{6}{2}$



Observă că fracția $\frac{8}{9}$ nu poate fi scrisă mai simplu.

Da, pentru că 8 și 9 nu au divizor comun mai mare decât 1.



Dacă a și b ($b \neq 0$) sunt numere naturale prime între ele, fracția $\frac{a}{b}$ se numește ireductibilă.

Exemple: $\frac{6}{25}, \frac{8}{9}, \frac{5}{7}, \frac{14}{15}, \frac{9}{20}, \frac{4}{3}, \frac{10}{21}, \frac{3}{8}$.

APLIC

Copiați și completați căsuțele libere, astfel încât după o singură simplificare să obțineți fracții ireductibile.

$\frac{a}{b}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{21}{14}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{24}{16}$	$\frac{72}{63}$	$\frac{9}{6}$
$\frac{a}{b}^{(?)}$	$\frac{42}{36} = \frac{7}{6}$					

Putem obține o fracție ireductibilă prin simplificări succesive sau prin simplificarea fracției cu c.m.m.d.c. al numărătorului și numitorului.

Exemplu: $\frac{24}{36} = \frac{12}{18} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ sau $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ sau $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

EXERSEZ

1 Simplificați cu 3 următoarele fracții: $\frac{12}{18}, \frac{21}{24}, \frac{36}{27}, \frac{63}{54}, \frac{84}{48}, \frac{18}{24}, \frac{62}{36}, \frac{87}{123}, \frac{135}{192}, \frac{1212}{1515}$.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

2 Copiați, completați tabelul și verificați echivalența fracțiilor din fiecare coloană.

$\frac{a}{b}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{48}{66}$	$\frac{72}{42}$	$\frac{54}{48}$	$\frac{90}{78}$	$\frac{84}{102}$	$\frac{126}{192}$
$\frac{a}{b}^{(?)}$	$\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$						

Model de rezolvare: $\frac{30}{36} = \frac{30:6}{36:6} = \frac{5}{6}, 30 \cdot 6 = 180, 36 \cdot 5 = 180, \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

3 Copiați și completați, astfel încât egalitățile să fie adevărate.

- a) $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$; b) $\frac{48}{36} = \frac{16}{12}$; c) $\frac{40}{48} = \frac{5}{6}$; d) $\frac{72}{81} = \frac{8}{9}$;
 e) $\frac{35}{65} = \frac{7}{13}$; f) $\frac{42}{48} = \frac{7}{8}$; g) $\frac{75}{45} = \frac{25}{15}$; h) $\frac{56}{42} = \frac{8}{6}$.

4 Simplificați fracția $\frac{72}{48}$, astfel încât să obțineți numărătorii:

- a) 3; b) 24; c) 6; d) 9; e) 12; f) 18.

5 Scrieți fracțiile supraunitare ireductibile cu numărătorul 15.

6 Determinați numerele naturale pentru care fracțiile următoare sunt fracții subunitare reductibile:

- a) $\frac{n+1}{6}$; b) $\frac{n-1}{8}$; c) $\frac{n+2}{12}$; d) $\frac{n-3}{18}$.

7 Determinați fracțiile echivalente cu $\frac{72}{108}$, care au numitorii:

- a) 54; b) 12; c) 18; d) 36; e) 6; f) 9.

Metoda I: $108 : 54 = 2$, $\frac{72}{108} \stackrel{(\cdot 2)}{=} \frac{72 \cdot 2}{108 \cdot 2} = \frac{36}{54}$.

Metoda II: $\frac{72}{108} = \frac{x}{54}$, $108 \cdot x = 72 \cdot 54$, $54 \cdot 2 \cdot x = 36 \cdot 2 \cdot 54$, $x = 36$.

8 Scrieți fracțiile ireductibile, echivalente cu:

- a) $\frac{60}{32}$; b) $\frac{50}{75}$; c) $\frac{96}{72}$; d) $\frac{54}{36}$;
 e) $\frac{108}{81}$; f) $\frac{48}{72}$; g) $\frac{96}{108}$; h) $\frac{72}{128}$.

9 Scrieți 6 fracții echivalente cu $\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2}$.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

10 Găsiți pentru fiecare fracție din primul rând câte un factor de simplificare din al doilea rând, pentru a obține după simplificare fracția $\frac{8}{9}$.

	$\frac{64}{72}$	$\frac{32}{36}$	$\frac{24}{27}$	$\frac{72}{81}$	$\frac{16}{18}$	$\frac{48}{54}$	$\frac{40}{45}$	$\frac{56}{63}$
				$\frac{8}{9}$				
	2	3	4	5	6	7	8	9

11 Determinați cifra x, astfel încât fracția $\frac{18}{3x}$ să fie: a) reductibilă; b) ireductibilă.

12 Aflați fracțiile ireductibile, echivalente cu:

- a) $\frac{2^8 + 2^6}{35 \cdot 64}$; b) $\frac{3^9 - 3^6}{3^6 \cdot 35}$; c) $\frac{5 \cdot 3^8 + 3^{10}}{3^8 \cdot 35}$.

13 Aflați fracțiile ireductibile echivalente cu:

- a) $\frac{1515}{1818}$; b) $\frac{1616}{2424}$; c) $\frac{124124}{186186}$.

SUNT CAMPION

14 Aflați numerele naturale n pentru care fracția $\frac{105}{2n+3}$ este supraunitară reductibilă.

15 Arătați că fracția $\frac{n+3}{n+4}$ este ireductibilă pentru orice număr natural n.

16 Găsiți 5 fracții reductibile de forma $\frac{n+4}{n+7}$, unde n este număr natural mai mare decât 2017.

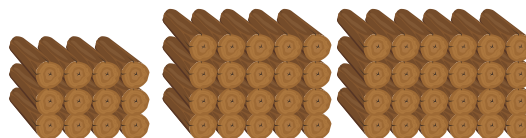
17 Arătați că fracția $\frac{2n+1}{3n+2}$ este ireductibilă pentru orice număr natural n.

14. Aducerea fracțiilor la un numitor comun

14.1 Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale

OBSERV

La o unitate de prelucrare a lemnului, buștenii sunt așezați în stive care conțin câte 4, câte 5 sau câte 6 bușteni pe fiecare rând. Ce număr minim de bușteni ar putea fi așezați în stive cu rânduri complete având câte 4, câte 5 sau câte 6 bușteni pe fiecare rând?



Numărul buștenilor trebuie să se împartă exact la 4, dar trebuie să se împartă exact și la 5, și la 6.

Încerc numerele 10, 20, 30, 40, 50, 60 și observ că 60 este bun. Următorul număr cu aceleași proprietăți este 120.

60 este un multiplu comun al numerelor 4, 5 și 6 și observ că este cel mai mic dintre multiplii nenuli.



Rezolvare: O metodă simplă este să multiplicăm succesiv unul dintre numere (de obicei pe cel mai mare) până obținem un număr care se divide și cu celelalte numere.

Răspuns: 60 este cel mai mic multiplu comun nenul al numerelor 4, 5 și 6.

6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----

ÎNȚELEG

Cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale a și b nenule este cel mai mic număr natural $m \neq 0$ care se împarte exact la cele două numere.

Se notează $m = [a; b]$.

Expresia cel mai mic multiplu comun se prescurtează **c.m.m.m.c.**

Noțiunea de c.m.m.m.c. se extinde și pentru mai multe numere naturale nenule. Faptul că m este c.m.m.m.c. se notează: $m = [a; b; c]$,

Exemple: $[4; 6] = 12$, $[2; 3; 5] = 30$, $[4; 9; 6] = 36$,
 $[2; 4; 5; 3] = 60$.

$[0; a] = 0$, pentru orice număr natural a .

Cele două proprietăți ce definesc cel mai mic multiplu comun „ m ” al numerelor naturale nenule a și b , „aceea de a fi multiplu comun” și „aceea de a fi cel mai mic”, se exprimă în limbaj matematic astfel:

1) $m = a \cdot x$, $m = b \cdot y$,
(x și y numere naturale nenule) și
2) $(x; y) = 1$

APLIC

1) Verificați dacă următoarele egalități sunt adevărate:

a) $[4; 6] = 12$; b) $[8; 12] = 24$; c) $[6; 8] = 72$; d) $[18; 27] = 108$; e) $[16; 36] = 144$.

Rezolvare:

a) 1) $12 = 4 \cdot 3$, $12 = 6 \cdot 2$

2) $(3; 2) = 1$

Egalitatea $[4; 6] = 12$ este adevărată

Putem folosi și grilele cu multipli nenuli ai celor două numere.

4	8	12	16	20	24	28
---	---	----	----	----	----	----

6	12	18	24	23
---	----	----	----	----

Se observă că 12 este c.m.m.m.c.

b) 1) $24 = 8 \cdot 3$, $24 = 12 \cdot 2$

2) $(3; 2) = 1$

Egalitatea $[8; 12] = 24$ este adevărată.

2) Aflați c.m.m.m.c. al numerelor și verificați cele două proprietăți:

a) 4 și 5; b) 3 și 4; c) 4 și 6; d) 3, 6 și 8; e) 4, 5 și 6; f) 4, 5 și 10; g) 2, 6 și 7.

Model rezolvat pentru numerele 10 și 6.

6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----

10	20	30	40	50	60
----	----	----	----	----	----

Se observă că 30 este c.m.m.m.c., iar 60 este următorul multiplu comun.

c) 1) $72 = 6 \cdot 12$, $72 = 8 \cdot 9$

2) $(12; 9) = 3 \neq 1$

Egalitatea $[6; 8] = 72$ este falsă.

d) 1) $108 = 18 \cdot 6$, $108 = 27 \cdot 4$

2) $(6; 4) = 2 \neq 1$

Egalitatea $[18; 27] = 108$ este falsă.

e) 1) $144 = 16 \cdot 9$, $144 = 36 \cdot 4$

2) $(9; 4) = 1$.

Egalitatea $[16; 36] = 144$ este adevărată.

Verificăm proprietățile:

1) $30 = 10 \cdot 3$, $30 = 6 \cdot 5$ și 2) $(3; 5) = 1$

Putem să gândim și altfel: Scriem multiplii consecutivi ai lui 10 și ne oprim la primul care se divide cu 6.

EXERSEZ

1 Scrieți în ordine crescătoare 8 multipli nenuli pentru fiecare număr și alegeți c.m.m.m.c.

a) 5 și 9; b) 6; 9; c) 6 și 10; d) 8 și 14;

e) 6 și 8; f) 12 și 15.

2 Unde este greșeala? Andrei spune că 54 este c.m.m.m.c. al numerelor 6 și 8 scriind următoarele relații adevărate:

1) $54 = 6 \cdot 9$, $32 = 8 \cdot 4$ și 2) $(9; 4) = 1$

4 Scrieți toate perechile de numere naturale care au c.m.m.m.c. egal cu:

a) 3; b) 6; c) 4; d) 5;

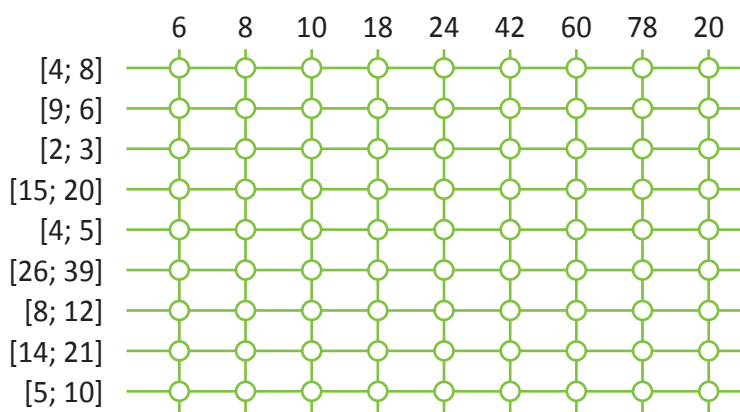
e) 8; f) 10; g) 12; h) 15.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

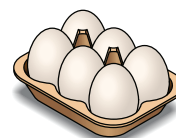
3 Copiați tabelul și scrieți în căsuțele libere c.m.m.m.c. al perechilor de numere formate din fiecare număr de pe linie cu fiecare număr de pe coloană.

$[a, b]$	4	6	9	10	12	15	18
4							
6							
9							
10							
12							

- 5 Găsiți cel mai mare număr natural de două cifre, care este divizibil cu 6 și cu 8.
- 6 Aflați cel mai mare număr natural de două cifre, care este divizibil cu 4 și cu 6.
- 7 Care este numărul minim de sticle cuprins între 731 și 826, care pot fi ambalate în lăzi complete de câte 12 sticle sau în lăzi complete de 15 sticle?
- 8 Aflați ce cantitate de cartofi cuprinsă între 361 kg și 370 kg poate fi ambalată numai în plase de 3 kg, 4 kg, respectiv 6 kg.
- 9 Un număr de militari, cuprins între 140 și 160, se deplasează în formație de coloane complete de câte 9 militari. Ajungând la un tunel, se grupează în coloane complete de câte 4 militari. Aflați câți militari sunt în formație.
- 10 Marcați nodurile care asociază perechea de numere cu c.m.m.m.c.



- 11 Raluca încearcă să aranjeze cărțile din bibliotecă câte 9 cărți pe rând, apoi încearcă o aranjare de câte 12 cărți pe rând, dar de fiecare dată îi mai rămân 3 cărți. Ea are un număr de cărți cuprins între 63 și 81. Care este acest număr?
- 12 Radu încearcă să alinieze pe tabletă un număr de figurine câte 6 pe rând, apoi încearcă să alinieze câte 14 pe rând. De fiecare dată îi rămân nealinate 5 figurine. Care este numărul figurinelor, dacă acesta este cuprins între 85 și 141?
- 13 O unitate avicolă dorește să ambaleze producția de ouă dintr-o zi. Așezate numai în cofraje de câte 6 cupe, rămân 3 ouă; așezate numai în cofraje de câte 8 cupe, rămân 5 ouă; așezate în cofraje de câte 10 cupe, rămân 7 ouă. Aflați numărul de ouă produse în această zi, dacă acesta este cuprins între 840 și 960.



SUNT CAMPION

- 14 Găsiți numerele naturale diferite de 72, astfel încât:

$$[a; b] = 72 \text{ și } a \cdot b = 864.$$

- 15 Folosind faptul că două fracții ireductibile echivalente sunt identice, arătați că:

$$[a; b] \cdot (a; b) = a \cdot b$$

14.2 Aducerea fracțiilor la cel mai mic numitor comun

ÎMI AMINTESC!



$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ pentru că $\frac{6}{8}$ se obține prin amplificarea cu 2 a fracției $\frac{3}{4}$.

Fracțiile $\frac{3}{4}$ și $\frac{6}{8}$ sunt echivalente pentru că $\frac{3}{4}$ se obține prin simplificarea cu 2 a fracției $\frac{6}{8}$.



Să rezolvăm.

$$\frac{1}{2} = \frac{\square}{6}, \quad \frac{6}{8} = \frac{\square}{4}, \quad \frac{1}{3} = \frac{\square}{6}, \quad \frac{2}{8} = \frac{\square}{4}, \quad \frac{9}{12} = \frac{\square}{4},$$

$$\frac{4}{6} = \frac{\square}{3}, \quad \frac{3}{4} = \frac{\square}{8}, \quad \frac{6}{6} = \frac{\square}{2}, \quad \frac{4}{6} = \frac{\square}{3}, \quad \frac{4}{8} = \frac{\square}{2}.$$

OBSERV

Putem folosi proprietatea amplificării unei fracții de a genera fracții echivalente și alcătuim câteva benzi (grile) cu fracții echivalente.

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{6}{8}$
$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{9}{12}$
$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{12}{16}$
$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{40}$	$\frac{15}{20}$
$\frac{6}{12}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{18}{48}$	$\frac{18}{24}$

ÎNȚELEG

- Două sau mai multe fracții ireductibile se aduc la cel mai mic numitor comun astfel:
 - 1) Se află c.m.m.m.c. al numitorilor, acesta fiind numitorul comun.
 - 2) Se amplifică fiecare fracție cu câtul dintre numitorul comun și numitorul fracției respective.

- Dacă avem mai multe fracții și oricare doi numitori sunt exprimați prin numere prime între ele, atunci c.m.m.m.c. este produsul numitorilor.

- Dacă unul dintre numitori este multiplu al celorlalți, atunci el este c.m.m.m.c.

- În alte cazuri, c.m.m.m.c. se află alcătuind o grilă crescătoare a multiplilor unui numitor (de preferat cel mai mare).

- Pentru obținerea de fracții doar cu numitori egali se poate lua ca numitor comun produsul numitorilor.

APLIC

1) Aduceți la cel mai mic numitor comun fracțiile: a) $\frac{2}{12}$ și $\frac{6}{16}$; b) $\frac{2}{8}$, $\frac{6}{27}$ și $\frac{1}{10}$.

Rezolvare:

a) După simplificări, fracțiile sunt $\frac{1}{6}$ și $\frac{3}{8}$.

Numitorul comun este 24, $24 : 6 = 4$, $24 : 8 = 3$.

$$^4) \frac{1}{6} = \frac{4}{24} \text{ și } ^3) \frac{3}{8} = \frac{9}{24}.$$

b) După simplificări, fracțiile sunt $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{10}$.

Numitorul comun este 180.

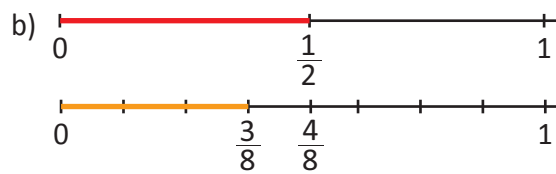
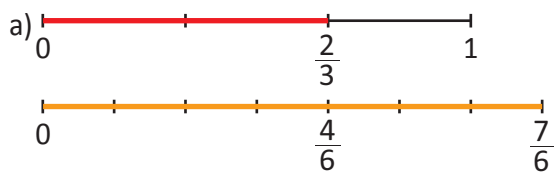
$$180 : 4 = 45, 180 : 9 = 20, 180 : 10 = 18.$$

$$^{45}) \frac{1}{4} = \frac{45}{180}, \quad ^{20}) \frac{2}{9} = \frac{40}{180}, \quad ^{18}) \frac{1}{10} = \frac{18}{180}.$$

2) Reprezentați prin desen fiecare fracție și fracțiile echivalente cu același numitor.

a) $\frac{2}{3}$ și $\frac{7}{6}$; b) $\frac{3}{8}$ și $\frac{1}{2}$.

Rezolvare:



3) Aflați două fracții cu numitori egali, echivalente cu fracțiile: a) $\frac{3}{2}$ și $\frac{8}{6}$; b) $\frac{1}{5}$ și $\frac{3}{8}$; c) $\frac{1}{6}$ și $\frac{3}{8}$.

Rezolvare: a) $6 : 2 = 3$, $^3) \frac{3}{2} = \frac{9}{6}$. Răspuns: $\frac{9}{6}$ și $\frac{8}{6}$.

b) 5 și 8 sunt prime între ele.

Se amplifică fracțiile cu 8, respectiv cu 5.

$$^8) \frac{1}{5} = \frac{8}{40} \text{ și } ^5) \frac{3}{8} = \frac{15}{40}. \text{ Răspuns: } \frac{8}{40} \text{ și } \frac{15}{40}.$$

c) Un multiplu comun al lui 6 și 8 este $6 \cdot 8 = 48$

$$^8) \frac{1}{6} = \frac{8}{48} \text{ și } ^6) \frac{3}{8} = \frac{18}{48}. \text{ Răspuns: } \frac{8}{48} \text{ și } \frac{18}{48}.$$



Există însă un multiplu comun mai mic decât 48.

Rezolvare: $24 : 6 = 4$, $24 : 8 = 3$. $^4) \frac{1}{6} = \frac{4}{24}$ și $^3) \frac{3}{8} = \frac{9}{24}$. Răspuns: $\frac{4}{24}$ și $\frac{9}{24}$.

Fracțiile $\frac{3}{2}$ și $\frac{8}{6}$ pot fi echivalate cu fracții cu numitori egali mai mici decât 6?

Nu. Dar se pot obține numitori egali mai mari decât 6.

$$^6) \frac{3}{2} = \frac{18}{12} \text{ și } ^2) \frac{8}{6} = \frac{16}{12}.$$



ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

Aflați c.m.m.m.c. și apoi completați după model un tabel asemănător.

a) 3 și 4;	b) 4 și 12;	c) 9 și 4;	Numere	Relații despre numere	c.m.m.m.c.
d) 8 și 10;	e) 6 și 18;	f) 8 și 12;	4 și 5	prime între ele	$[4; 5] = 4 \cdot 5$
g) 7 și 21;	h) 6 și 25;	i) 14 și 21;	9 și 27	27 este multiplu de 9	$[9; 27] = 27$
j) 5 și 11;	k) 12 și 18;	l) 8 și 24.	6 și 8	c.m.m.d.c. este un divizor propriu	$[6; 8] = 24$

EXERSEZ

1 Alcătuiți grile cu fracții echivalente și alegeți din ele 5 fracții cu numitorul 12, 4 fracții cu numitorul 8, 3 fracții cu numitorul 6, 3 fracții cu numitorul 16 și 3 fracții cu numitorul 20.

2 Găsiți două fracții cu numitorul 12, echivalente cu:

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\frac{1}{3}$ și $\frac{3}{6}$; | b) $\frac{1}{2}$ și $\frac{5}{15}$; |
| c) $\frac{2}{6}$ și $\frac{1}{4}$; | d) $\frac{2}{8}$ și $\frac{1}{6}$; |
| e) $\frac{2}{4}$ și $\frac{6}{8}$; | f) $\frac{3}{4}$ și $\frac{2}{6}$. |

3 Găsiți două fracții cu numitorul 12, echivalente cu:

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $\frac{4}{8}$ și $\frac{3}{9}$; | b) $\frac{5}{20}$ și $\frac{6}{18}$; |
| c) $\frac{5}{15}$ și $\frac{4}{24}$; | d) $\frac{4}{8}$ și $\frac{3}{4}$; |
| e) $\frac{2}{8}$ și $\frac{12}{16}$; | f) $\frac{5}{10}$ și $\frac{3}{18}$. |

4 Reprezentați prin desen fiecare fracție și fracțiile echivalente cu același numitor.

- | | | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{4}$; | b) $\frac{1}{4}$ și $\frac{3}{8}$; | c) $\frac{1}{3}$ și $\frac{5}{6}$; | d) $\frac{2}{3}$ și $\frac{1}{6}$; |
| e) $\frac{2}{5}$ și $\frac{3}{10}$; | f) $\frac{5}{6}$ și $\frac{3}{2}$; | g) $\frac{3}{8}$ și $\frac{5}{4}$. | |

5 Aduceți la același numitor fracțiile:

- | | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $\frac{2}{3}$ și $\frac{5}{6}$; | b) $\frac{3}{2}$ și $\frac{5}{4}$; | c) $\frac{7}{4}$ și $\frac{3}{8}$; | d) $\frac{2}{5}$ și $\frac{3}{10}$; |
| e) $\frac{4}{7}$ și $\frac{5}{21}$; | f) $\frac{4}{9}$ și $\frac{7}{54}$; | g) $\frac{7}{6}$ și $\frac{5}{18}$; | h) $\frac{5}{12}$ și $\frac{7}{24}$. |

6 Aduceți la același numitor fracțiile:

- | | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $\frac{3}{5}$ și $\frac{1}{4}$; | b) $\frac{5}{9}$ și $\frac{7}{4}$; | c) $\frac{7}{6}$ și $\frac{4}{25}$; | d) $\frac{3}{4}$ și $\frac{5}{7}$; |
| e) $\frac{5}{8}$ și $\frac{11}{9}$; | f) $\frac{7}{25}$ și $\frac{3}{8}$; | g) $\frac{5}{18}$ și $\frac{2}{35}$; | h) $\frac{3}{20}$ și $\frac{4}{21}$. |

7 Aduceți la cel mai mic numitor comun fracțiile:

- | | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\frac{4}{3}$ și $\frac{5}{4}$; | b) $\frac{2}{3}$ și $\frac{7}{6}$; | c) $\frac{3}{4}$ și $\frac{2}{9}$; | d) $\frac{3}{10}$ și $\frac{4}{5}$; |
| e) $\frac{2}{5}$ și $\frac{7}{12}$; | f) $\frac{2}{9}$ și $\frac{5}{27}$; | g) $\frac{1}{6}$ și $\frac{5}{18}$; | h) $\frac{2}{9}$ și $\frac{3}{25}$. |

8 Aduceți la cel mai mic numitor comun fracțiile:

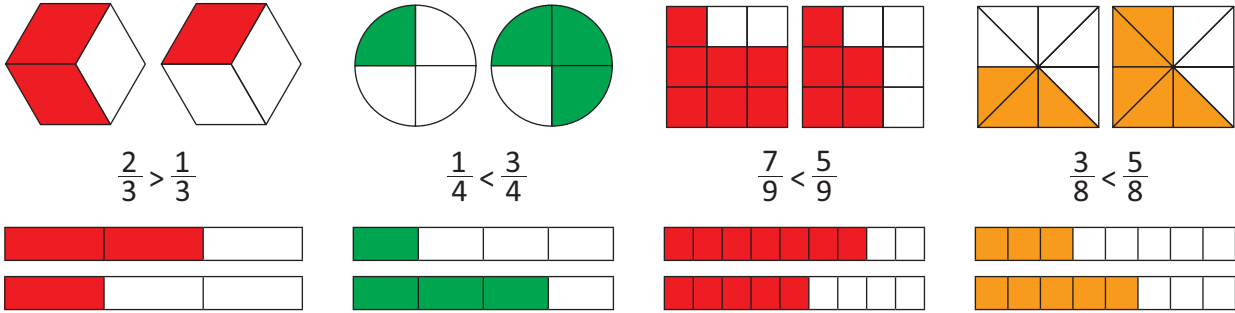
- | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $\frac{5}{6}$ și $\frac{7}{8}$; | b) $\frac{3}{8}$ și $\frac{5}{12}$; | c) $\frac{7}{8}$ și $\frac{9}{10}$; | d) $\frac{7}{18}$ și $\frac{5}{12}$; |
| e) $\frac{7}{16}$ și $\frac{5}{24}$; | f) $\frac{7}{36}$ și $\frac{1}{48}$; | g) $\frac{7}{30}$ și $\frac{8}{45}$; | h) $\frac{2}{15}$ și $\frac{3}{10}$. |

9 Aduceți la același numitor fracțiile:

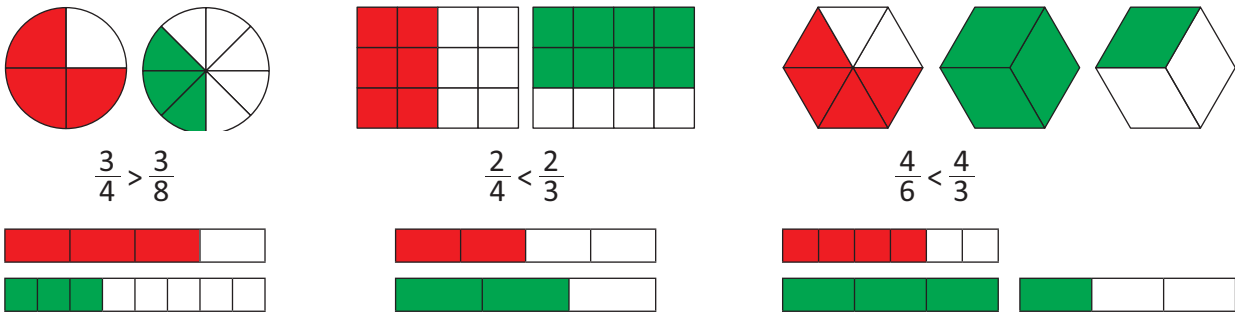
- | | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $\frac{16}{4}$ și $\frac{2}{21}$; | b) $\frac{9}{6}$ și $\frac{3}{4}$; | c) $\frac{6}{8}$ și $\frac{4}{5}$; | d) $\frac{5}{15}$ și $\frac{7}{4}$; |
| e) $\frac{2}{12}$ și $\frac{3}{5}$; | f) $\frac{4}{12}$ și $\frac{3}{4}$; | g) $\frac{4}{18}$ și $\frac{2}{5}$; | h) $\frac{3}{7}$ și $\frac{14}{21}$. |

15. Compararea fracțiilor

15.1 Compararea fracțiilor cu același numitor/numărător



Dintre două fracții cu **numitori egali** este mai mare fracția care are **numărătorul mai mare**.



Dintre două fracții cu **numărători egali** este mai mare fracția care are **numitorul mai mic**.

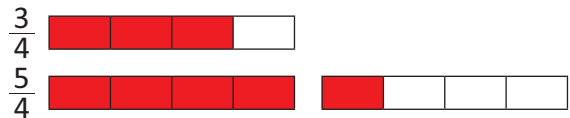
Pentru a compara două fracții care nu au nici același numitor, nici același numărător, aducem fracțiile la același numitor, respectiv numărător, și procedăm ca mai sus.

APLIC

1) Reprezentați prin desen și comparați fracțiile:

a) $\frac{6}{5}$ și $\frac{7}{5}$; b) $\frac{2}{3}$ și $\frac{5}{3}$; c) $\frac{3}{6}$ și $\frac{5}{6}$; d) $\frac{5}{8}$ și $\frac{3}{8}$.

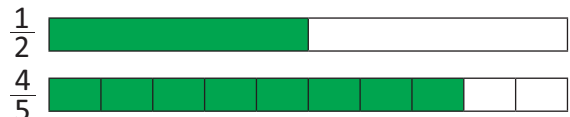
Model de reprezentare: $\frac{3}{4}$ și $\frac{5}{4}$. Răspuns: $\frac{3}{4} < \frac{5}{4}$.



2) Reprezentați prin desen și comparați fracțiile:

a) $\frac{5}{3}$ și $\frac{5}{2}$; b) $\frac{3}{2}$ și $\frac{3}{5}$; c) $\frac{2}{4}$ și $\frac{2}{6}$; d) $\frac{4}{3}$ și $\frac{4}{6}$.

Model de reprezentare: $\frac{1}{2}$ și $\frac{4}{5}$. Răspuns: $\frac{1}{2} < \frac{4}{5}$.



EXERSEZ

1 Completați cu unul dintre semnele: $>$, $<$, $=$.

a) $\frac{1}{4} \square \frac{3}{4}$;

b) $\frac{4}{5} \square \frac{3}{5}$;

c) $\frac{5}{5} \square \frac{6}{6}$;

d) $\frac{2}{7} \square \frac{5}{7}$;

e) $\frac{10}{11} \square \frac{9}{11}$;

f) $\frac{19}{19} \square \frac{18}{18}$;

g) $\frac{97}{96} \square \frac{97}{95}$;

h) $\frac{80}{93} \square \frac{80}{90}$.

2 Scrieți în ordine crescătoare fracțiile: $\frac{15}{12}$; $\frac{3}{12}$; $\frac{6}{12}$; $\frac{8}{12}$; $\frac{12}{12}$; $\frac{9}{12}$; $\frac{4}{12}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{11}{12}$.

3 Scrieți în ordine descrescătoare fracțiile: $\frac{4}{4}$; $\frac{4}{12}$; $\frac{4}{8}$; $\frac{4}{6}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{4}{11}$; $\frac{4}{15}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{4}{5}$.

4 Care dintre afirmații sunt adevărate (A) și care sunt false (F):

a) $\square \frac{7}{3} > \frac{6}{3}$;

b) $\square \frac{5}{3} > \frac{3}{4}$;

c) $\square \frac{19}{13} < \frac{1}{13}$;

d) $\square \frac{18}{31} > \frac{18}{31}$;

e) $\square \frac{23}{15} > \frac{23}{16}$;

f) $\square \frac{49}{42} < \frac{48}{49}$;

g) $\square \frac{16}{91} > \frac{16}{92}$;

h) $\square \frac{19}{21} > \frac{19}{18}$.

5 Asociați fiecare fracție cu locul pe care îl ocupă într-o ordine crescătoare a fracțiilor.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
$\frac{3}{8}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{9}{9}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{3}{4}$

6 Comparați fracțiile (folosind eventual amplificarea):

a) $\frac{3}{7}$ și $\frac{5}{14}$; b) $\frac{4}{5}$ și $\frac{2}{3}$; c) $\frac{3}{4}$ și $\frac{7}{8}$; d) $\frac{2}{91}$ și $\frac{1}{49}$. *Exemplu:* $\frac{2}{5} > \frac{3}{10}$ deoarece $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} > \frac{3}{10}$.

7 Comparați fracțiile (folosind eventual o fracție intermediară):

a) $\frac{2}{57}$ și $\frac{3}{58}$; b) $\frac{1}{102}$ și $\frac{2}{103}$; c) $\frac{36}{105}$ și $\frac{72}{83}$; d) $\frac{302}{110}$ și $\frac{151}{39}$. *Exemplu:* $\frac{5}{22} > \frac{4}{23}$ deoarece $\frac{5}{22} > \frac{5}{23} > \frac{4}{23}$.

8 Ordonăți crescător fracțiile: $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{5}{24}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{11}{24}$; $\frac{7}{24}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{5}{6}$.

9 Descoperiți relațiile greșite și scrieți corect ordinea fracțiilor:

a) $\frac{11}{16} < \frac{13}{16} < \frac{14}{16} < \frac{12}{16} < \frac{17}{16} < \frac{18}{16} < \frac{19}{19}$;

b) $\frac{19}{12} > \frac{19}{15} > \frac{19}{14} > \frac{19}{16} > \frac{19}{18} > \frac{19}{19} > \frac{19}{17}$.

SUNT CAMPION

10 Aflați numărul natural nenul n pentru care sunt adevărate relațiile:

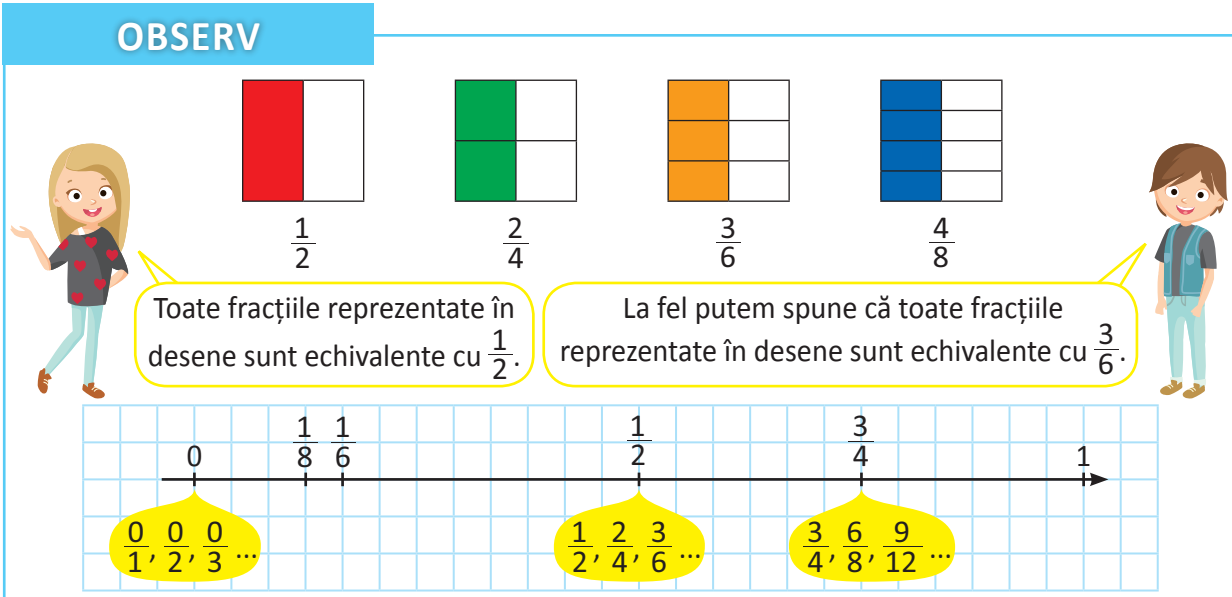
a) $\frac{3}{4} < \frac{5}{n}$; b) $\frac{n+1}{7} < \frac{5}{4}$; c) $\frac{n^2}{13} < \frac{14}{3}$.

11 Aflați numerele naturale n pentru care sunt adevărate relațiile:

a) $\frac{5}{9} < \frac{n+1}{18} < \frac{5}{6}$; b) $\frac{2}{3} < \frac{24}{n-1} < \frac{3}{4}$.

15.2 Reprezentarea pe axa numerelor a unei fracții ordinare

OBSERV



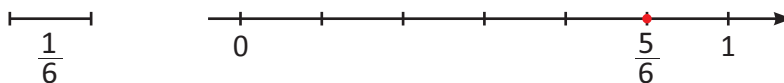
ÎNȚELEG

- Toate fracțiile echivalente cu $\frac{1}{2}$ sunt aceleași cu fracțiile echivalente cu $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots$. Ele reprezintă același număr rațional. Din acest motiv, fracțiile echivalente sunt reprezentate pe axa numerelor prin același punct.
- Numărul rațional zero este reprezentat de orice fracție de forma $\frac{0}{b}$ cu b natural nenul.
- A efectua o operație matematică între două numere raționale înseamnă a efectua operația respectivă între două fracții ordinare care reprezintă numerele raționale.
- Frațiile $\frac{a}{a}$, a număr natural nenul, reprezintă numărul rațional 1.
- Frațiile echivalente cu $\frac{n}{1}$, n număr natural, reprezintă numărul rațional n .
- Un număr rațional reprezentat de o fracție $\frac{a}{b}$, a și b naturale nenule, poate fi reprezentat de orice fracție echivalentă cu $\frac{a}{b}$.

APLIC

1) Reprezentați pe axa numerelor fracția $\frac{5}{6}$.

Rezolvare: Alegem un segment care va reprezenta $\frac{1}{6}$. Desenăm o dreaptă, pe care fixăm originea (punctul care va reprezenta numărul zero). Desenăm de la origine spre dreapta 6 segmente legate, egale cu $\frac{1}{6}$ și ajungem în punctul care reprezintă numărul 1.



2) Reprezentați pe axa numerelor fracțiile $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$ și $\frac{3}{2}$.

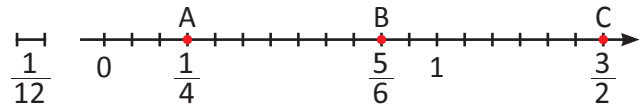
Rezolvare: • Aducem fracțiile la cel mai mic numitor comun.

$^3) \frac{1}{4} = \frac{3}{12}, \quad ^2) \frac{5}{6} = \frac{10}{12}, \quad ^6) \frac{3}{2} = \frac{18}{12}.$

• Desenăm o dreaptă și alegem un segment care va reprezenta partea $\frac{1}{12}$.

• Fixăm originea (punctul care reprezintă numărul zero).

• Desenăm de la origine spre dreapta 12 segmente legate egale cu partea $\frac{1}{12}$ și punctul lor care se ajunge reprezintă numărul 1.



Spunem că:

punctul A are coordonata $\frac{1}{4}$ sau prescurtat A $(\frac{1}{4})$;

punctul B are coordonata $\frac{5}{6}$ sau prescurtat B $(\frac{5}{6})$;

punctul C are coordonata $\frac{3}{2}$ sau prescurtat C $(\frac{3}{2})$.

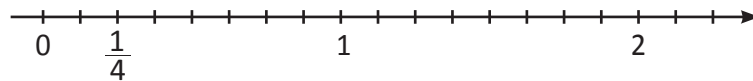
EXERSEZ

1 Reprezentați pe axa numerelor fracțiile: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}, \frac{8}{2}.$

2 Reprezentați pe axa numerelor fracțiile: $\frac{6}{3}, \frac{9}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{12}{3}, \frac{11}{3}.$

3 Reprezentați pe axa numerelor punctul A $(\frac{4}{3})$. Dați exemple de 4 fracții care sunt reprezentate pe axă tot în punctul A.

4 Copiați desenul și reprezentați pe axa numerelor fracțiile: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{11}{8}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{7}{8}, \frac{17}{8}.$



5 Reprezentați pe axa numerelor fracțiile:

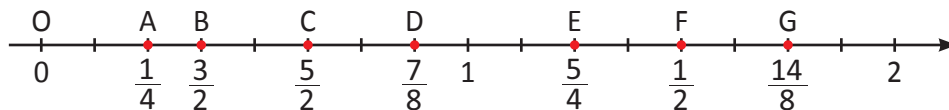
$\frac{8}{8}, \frac{16}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{3}{8}.$

6 Reprezentați pe axa numerelor punctele:

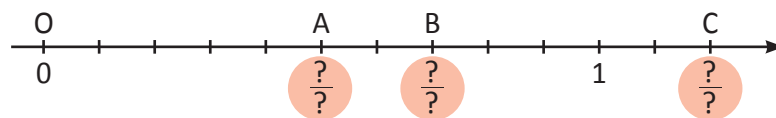
A(1); B(2); C(3); D $(\frac{1}{2})$; E $(\frac{3}{2})$; F $(\frac{5}{2})$.

7 a) Identificați greșelile din desen.

b) Scrieți literele în ordine alfabetică și scrieți în dreptul fiecărei litere coordonata corespunzătoare.

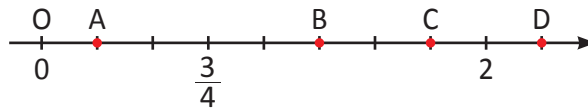


8 a) Copiați desenul și completați.



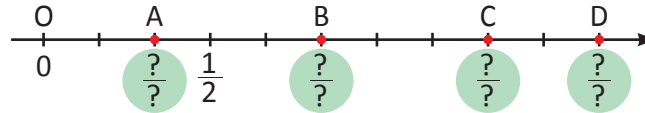
b) Pe același desen reprezentați fracțiile $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}$ și $\frac{4}{5}$ și accentuați cu culoare roșie punctele.

9 Precizați coordonatele punctelor A, B, C și D.



ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

10 Copiați desenul și completați cercelețe.



Observ că punctul A ($\frac{1}{3}$) este mai aproape de origine decât punctul B ($\frac{5}{6}$).

Da, pentru că $\frac{2}{6}$ este un reprezentant al numărului rațional $\frac{1}{3}$ este mai mic decât $\frac{5}{6}$.

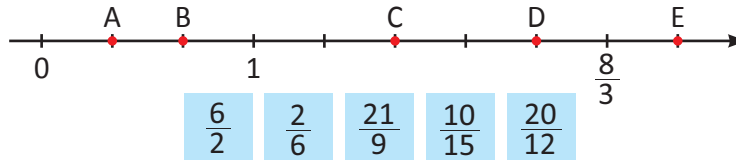


Dintre două puncte situate pe axă în dreapta originii, mai *aproape de origine* este punctul care are *coordanata mai mică*.

11 Aflați numerele naturale n , pentru care punctul A (n) este situat pe axa numerelor, la stânga punctului B ($\frac{19}{5}$).

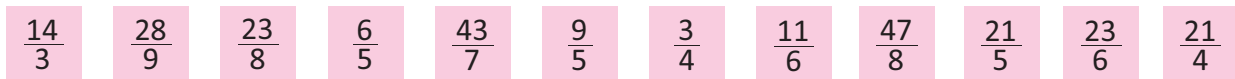
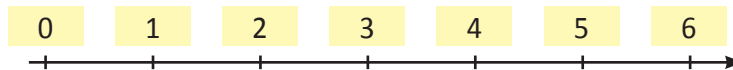
12 Care dintre punctele A ($\frac{4}{3}$), B ($\frac{2}{3}$) și C ($\frac{5}{6}$) este reprezentat pe axa numerelor mai aproape, respectiv mai departe de origine?

13 Alegeți fracția echivalentă coordonatei fiecăruia dintre punctele A, B, C, D, E, indicate pe axa numerelor:



14 Alegeți fracția a cărei reprezentare pe axa numerelor este cea mai apropiată de:

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5; f) 6.



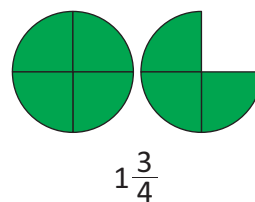
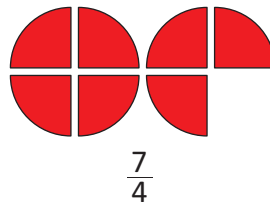
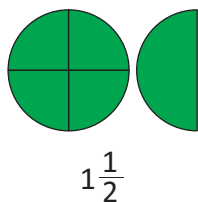
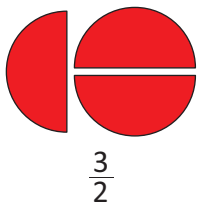
SUNT CAMPION

15 Aflați numerele naturale n , astfel încât punctul D ($\frac{24}{n}$) să fie situat pe axa numerelor între punctele A ($\frac{6}{5}$) și B ($\frac{8}{9}$).

16. Scoaterea întregilor din fracție. Introducerea întregilor în fracție

A. Scoaterea întregilor din fracție

OBSERV



- $1\frac{1}{2}$ se citește „un întreg și o doime” și $1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$.
- $1\frac{3}{4}$ se citește „un întreg și trei pătrimi” și $1\frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4}$.

ÎNȚELEG



Spunem că am scos întregii din $\frac{7}{2}$ dacă scriem $3\frac{1}{2}$.

$$\frac{7}{2} = \frac{6}{2} + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2};$$

$$\frac{14}{3} = \frac{12}{3} + \frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3} = 4\frac{2}{3}.$$

Dar dacă scriem $\frac{7}{2} = 2\frac{3}{2}$, mai spunem că am scos întregii din $\frac{7}{2}$?



Enunțul „Scoateți întregii dintr-o fracție” se referă la toți întregii care se cuprind într-o fracție supraunitară.

Numărul întregilor cuprinși într-o fracție constituie **partea întregă a fracției**, iar *fracția subunitară* obținută după scoaterea întregilor se numește **partea fracționară**.

Scoaterea întregilor dintr-o fracție supraunitară $\frac{a}{b}$ se realizează efectuând împărțirea lui a la b , obținându-se un cât c și un rest $r < b$, unde $a = b \cdot c + r$.

Câtul reprezintă întregii, iar restul va fi numărătorul fracției subunitare rămase.

$$\frac{a}{b} = \frac{b \cdot c + r}{b} = c + \frac{r}{b} = c\frac{r}{b}, r < b.$$

APLIC

La cerința „Scoateți întregii din fracția $\frac{21}{5}$ ”, Radu a scris $\frac{21}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 6}{5} = 3 + \frac{6}{5} = 3\frac{6}{5}$.

Este corect cum a făcut Radu?

Răspuns: Nu. Radu nu a respectat cerința problemei și a scos doar o parte din întregi. În același timp, nu a aplicat corect teorema împărțirii cu rest care precizează că restul împărțirii este mai mic decât împărțitorul.

Corect este: $\frac{21}{5} = \frac{4 \cdot 5 + 1}{5} = 4 + \frac{1}{5} = 4\frac{1}{5}$.

EXERSEZ

1 Scoateți întregii din fracțiile: a) $\frac{7}{2}$; b) $\frac{17}{7}$; c) $\frac{19}{5}$; d) $\frac{17}{3}$; e) $\frac{15}{4}$; f) $\frac{34}{5}$; g) $\frac{122}{3}$; h) $\frac{107}{15}$.

2 Dacă la împărțirea lui a la b se obține câtul c și restul r completați tabelul:

$\frac{a}{b}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{34}{8}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{38}{5}$
c	5					
$\frac{r}{b}$	$\frac{1}{3}$					
$c\frac{r}{b}$	$5\frac{1}{3}$					

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

3 Asociați fiecare fracție cu întregii cuprinși în fracție (partea întreagă).

1 2 3 4 5 10

$\frac{21}{5}$ $\frac{96}{31}$ $\frac{207}{103}$ $\frac{105}{103}$ $\frac{35}{6}$ $\frac{108}{10}$

B. Introducerea întregilor în fracție

OBSERV



Din $\frac{7}{2}$ s-au scos toți întregii, iar din $\frac{17}{3}$ doar 4.

$$\frac{7}{2} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2} = 3\frac{1}{2}; \quad \frac{17}{3} = \frac{4 \cdot 3 + 5}{3} = 4\frac{5}{3}.$$

În schimb numerele $3\frac{1}{2}$ și $4\frac{5}{3}$ au o formă comună, un număr de întregi și o fracție.



ÎNȚELEG

Un număr $n\frac{a}{b}$ exprimat printr-un număr natural n și o fracție ordinară $\frac{a}{b}$, se numește *număr mixt*.

Exemple de numere mixte: $2\frac{5}{3}$; $4\frac{1}{2}$; $6\frac{4}{5}$; $3\frac{9}{2}$.

Când scriem $n\frac{a}{b} = \frac{n \cdot b + a}{b}$, spunem că am *introdus întregii în fracție*.

APLIC

Introduceți întregii în fracție: a) $7\frac{2}{3}$; b) $2\frac{5}{4}$; c) $6\frac{4}{5}$; d) $3\frac{9}{2}$.

Model de rezolvare: a) $7\frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{23}{3}$.

EXERSEZ

1 Introduceți întregii în fracție: a) $7\frac{3}{7}$; b) $9\frac{2}{3}$; c) $10\frac{8}{3}$; d) $8\frac{3}{11}$; e) $6\frac{5}{12}$; f) $4\frac{7}{12}$; g) $5\frac{16}{13}$.

2 Copiați și completați tabelul:

$n\frac{a}{b}$	$6\frac{2}{3}$	$5\frac{4}{3}$	$7\frac{2}{5}$	$3\frac{5}{8}$	$2\frac{9}{4}$
$\frac{n \cdot b + a}{b}$	$\frac{6 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{20}{3}$				

3 Copiați și completați:

a) $3\frac{1}{2} = \frac{\square}{2}$; b) $5\frac{2}{3} = \frac{\square}{3}$; c) $7\frac{5}{2} = \frac{\square}{2}$;
d) $8\frac{2}{5} = \frac{\square}{5}$; e) $12\frac{3}{4} = \frac{\square}{4}$; f) $11\frac{3}{2} = \frac{\square}{2}$.

17. Adunarea și scăderea fracțiilor

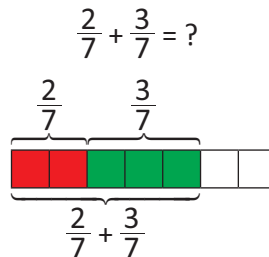
17.1 Suma și diferența fracțiilor cu același numitor

A. Suma fracțiilor cu numitori egali

ÎMI AMINTESC!



Întregul îl împărțim în șapte părți egale.



$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$
partea colorată din întreaga suprafață.



ÎNȚELEG

Suma a două fracții cu numitori egali este o fracție echivalentă cu fracția „suma numărătorilor supra numitorul comun“.

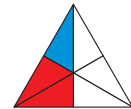
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} = \frac{s}{c} \qquad \frac{s}{c} = \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

APLIC

1) Calculați: a) $\frac{2}{3} + \frac{4}{3}$; b) $\frac{5}{6} + \frac{4}{6}$; c) $\frac{1}{18} + \frac{4}{18} + \frac{7}{18}$. Model de rezolvare: a) $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2+4}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

2) Scrieți și calculați sumele fracțiilor reprezentate de părțile colorate din fiecare desen.

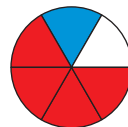
Model de rezolvare:
 $\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$



a)



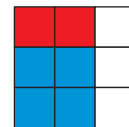
b)



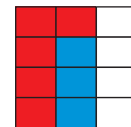
c)



d)



e)



f)

EXERSEZ

1 Scrieți detaliat, calculați și simplificați rezultatul.

a) $\frac{1}{6} + \frac{3}{6}$; b) $\frac{1}{9} + \frac{5}{9}$; c) $\frac{7}{8} + \frac{5}{8}$; d) $\frac{4}{21} + \frac{10}{21}$; e) $\frac{2}{15} + \frac{8}{15}$; f) $\frac{5}{16} + \frac{7}{16}$; g) $\frac{1}{18} + \frac{5}{18}$; h) $\frac{7}{24} + \frac{11}{24}$.

2 Calculați și exprimați suma printr-o fracție ireductibilă.

a) $\frac{5}{12} + \frac{3}{12}$; b) $\frac{9}{20} + \frac{3}{20}$; c) $\frac{9}{12} + \frac{7}{12}$; d) $\frac{5}{18} + \frac{7}{18}$; e) $\frac{19}{60} + \frac{26}{60}$; f) $\frac{15}{32} + \frac{25}{32}$; g) $\frac{20}{72} + \frac{7}{72}$; h) $\frac{11}{56} + \frac{13}{56}$.

3 La un târg de mașini, $\frac{2}{10}$ din exponate erau mărci japoneze, $\frac{4}{10}$ erau germane, iar celelalte erau mărci românești. Ce fracție reprezentau mașinile străine?

4 Mama lui Tudor a cumpărat $\frac{7}{5}$ kg de mere și $\frac{8}{5}$ kg de portocale. Ce cantitate de fructe a cumpărat?

5 Participanții la un concurs au fost premiați astfel: $\frac{1}{16}$ dintre aceștia au primit premii în bani, iar $\frac{3}{16}$ dintre participanți au primit ca premii obiecte. Ce fracție reprezintă numărul participanților premiați?



6 Aflați în două moduri fracția ireductibilă egală cu:

a) $1 + \frac{4}{6}$; b) $3 + \frac{15}{2}$; c) $4 + \frac{6}{9}$; d) $1 + \frac{12}{18}$; e) $2 + \frac{10}{15}$; f) $3 + \frac{9}{21}$; g) $2 + \frac{30}{45}$.

7 Un comerciant a vândut în prima zi $\frac{4}{15}$ din cantitatea de marfă, iar în a doua zi cu $\frac{2}{15}$ mai mult decât în prima zi. Ce parte din cantitatea de marfă a fost vândută în cele două zile?

8 Estimați sumele, rotunjind termenii la cel mai apropiat întreg și comparați cu rezultatul obținut prin calcul.

a) $\frac{13}{6} + \frac{5}{6}$; b) $\frac{8}{9} + \frac{12}{9}$; c) $2\frac{4}{5} + \frac{6}{5}$; d) $3\frac{5}{6} + \frac{11}{6}$; e) $\frac{20}{7} + 4\frac{1}{7}$; f) $\frac{25}{8} + 1\frac{7}{8}$; g) $\frac{28}{9} + \frac{8}{9}$.

Model de rezolvare: $4\frac{8}{10} + \frac{9}{10}$ $4\frac{8}{10} \approx 5$, $\frac{9}{10} \approx 1$, $4\frac{8}{10} + \frac{11}{10} \approx 5 + 1 = 6$

Prin calcul $4\frac{8}{10} + \frac{11}{10} = 4\frac{19}{10} = 5\frac{9}{10}$. Estimarea 6 este foarte apropiată de rezultatul $5\frac{9}{10}$.

SUNT CAMPION

9 Efectuați: a) $\frac{3}{153} + \frac{6}{153} + \frac{9}{153} + \dots + \frac{99}{153}$ b) $\frac{6}{357} + \frac{9}{357} + \frac{12}{357} + \dots + \frac{102}{357}$

B. Scrierea unui număr fracționar ca sumă de numere fracționare cu numitori egali

ÎNȚELEG

$$\frac{5}{2} = \frac{0+5}{2} = \frac{0}{2} + \frac{5}{2}; \quad \frac{5}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2}; \quad \frac{5}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{2}{2} + \frac{3}{2}; \quad \frac{5}{2} = \frac{1+1+3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}.$$



Orice număr fracționar poate fi scris ca sumă de numere fracționare în mai multe moduri?

Acest lucru este posibil deoarece orice număr natural poate fi scris în mai multe moduri ca sumă de numere naturale.



$$\frac{a}{n} = \frac{b+c}{n} = \frac{b}{n} + \frac{c}{n}, \quad \frac{a}{n} = \frac{b+c+d}{n} = \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{d}{n}$$

APLIC

1) Scrieți ca sumă de două fracții ordinare diferite.

a) $\frac{7}{9}$; b) $\frac{11}{4}$; c) $\frac{14}{5}$; d) $\frac{9}{8}$; e) $\frac{8}{7}$; f) $\frac{16}{11}$.

Găsiți mai multe moduri.

Model rezolvat: $\frac{8}{3} = \frac{1+7}{3} = \frac{1}{3} + \frac{7}{3}$; $\frac{8}{3} = \frac{2+6}{3} = \frac{2}{3} + \frac{6}{3}$; $\frac{8}{3} = \frac{3+5}{3} = \frac{3}{3} + \frac{5}{3}$.

2) Scrieți ca sumă dintre un număr natural și o fracție ordinară:

a) $\frac{8}{3}$; b) $\frac{11}{5}$; c) $\frac{9}{2}$; d) $\frac{16}{9}$.

Model rezolvat: $\frac{17}{5} = \frac{5}{5} + \frac{12}{5} = 1 + \frac{12}{5}$; $\frac{17}{5} = \frac{10}{5} + \frac{7}{5} = 2 + \frac{7}{5}$; $\frac{17}{5} = \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5}$.

EXERSEZ

1 Scrieți ca sumă dintre o fracție ordinară subunitară și un număr natural:

a) $\frac{7}{3}$; b) $\frac{18}{5}$; c) $\frac{13}{4}$; d) $\frac{29}{7}$; e) $\frac{39}{8}$; f) $\frac{39}{8}$; g) $\frac{39}{8}$; h) $\frac{39}{8}$.

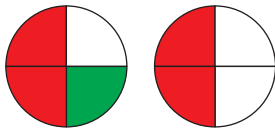
2 Scrieți ca sumă de trei fracții ordinare diferite numerele:

a) $\frac{8}{7}$; b) $\frac{9}{10}$; c) $\frac{12}{5}$; d) $\frac{10}{3}$; e) $\frac{39}{8}$; f) $\frac{39}{8}$; g) $\frac{39}{8}$; h) $\frac{39}{8}$.

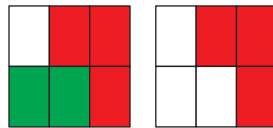
Găsiți mai multe moduri.

C. Diferența fracțiilor cu numitori egali

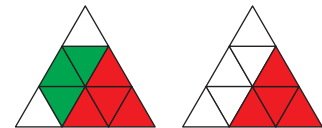
OBSERV



$$\frac{3}{4} \quad \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$



$$\frac{5}{6} \quad \frac{5}{6} - \frac{2}{6}$$



$$\frac{7}{9} \quad \frac{7}{9} - \frac{3}{9}$$



Gândim scăderea fracțiilor cu numitori egali la fel ca adunarea?

Exact la fel. Scădem numărătorii deasupra liniei și sub linie scriem numitorul comun.



$$\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5-2}{6}$$

ÎNȚELEG

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n} = \frac{r}{n} \text{ și } \frac{r}{n} = \frac{a-b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n}, \text{ unde } a > b.$$

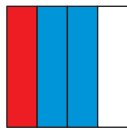
Descăzutul $\frac{a}{n}$ și scăzătorul $\frac{b}{n}$ sunt termenii scăderii, iar rezultatul $\frac{a-b}{n}$ se numește rest sau diferență.

Scăderea este posibilă numai dacă descăzutul este mai mare sau egal cu scăzătorul.

Dacă descăzutul este egal cu scăzătorul, atunci rezultatul este zero.

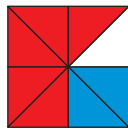
APLIC

1) Interpretând partea colorată și părțile diferit colorate, calculați:



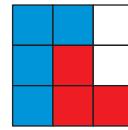
$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{4}$$



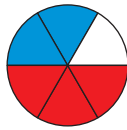
$$\frac{7}{8} - \frac{2}{8}$$

$$\frac{7}{8} - \frac{5}{8}$$



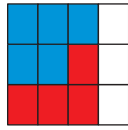
$$\frac{7}{9} - \frac{3}{9}$$

$$\frac{7}{9} - \frac{4}{9}$$



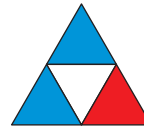
$$\frac{5}{6} - \frac{2}{6}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{6}$$



$$\frac{9}{12} - \frac{5}{12}$$

$$\frac{9}{12} - \frac{4}{12}$$



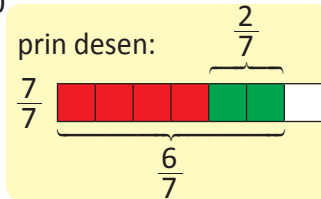
$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{4}$$

2) Calculați diferențele, atât teoretic, cât și prin interpretarea desenelor.

a) $\frac{4}{6} - \frac{3}{6}$; b) $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}$; c) $\frac{6}{7} - \frac{2}{7}$; d) $\frac{5}{5} - \frac{1}{5}$; e) $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}$; f) $\frac{8}{9} - \frac{3}{9}$; g) $\frac{7}{10} - \frac{3}{10}$.

Model de rezolvare: pentru $\frac{6}{7} - \frac{2}{7}$ teoretic: $\frac{6}{7} - \frac{2}{7} = \frac{6-2}{7} = \frac{4}{7}$



EXERSEZ

1 Scrieți detaliat și calculați:

a) $\frac{16}{13} - \frac{9}{13}$; b) $\frac{8}{15} - \frac{2}{15}$; c) $\frac{82}{19} - \frac{63}{19}$; d) $\frac{72}{17} - \frac{29}{17}$.

2 Scrieți detaliat și exprimați rezultatul printr-o fracție ireductibilă.

a) $\frac{31}{20} - \frac{15}{20}$; b) $\frac{41}{12} - \frac{23}{12}$; c) $\frac{43}{12} - \frac{35}{12}$; d) $\frac{70}{27} - \frac{58}{27}$; e) $\frac{85}{42} - \frac{57}{42}$.

3 Estimați, folosind rotunjirea până la cel mai apropiat întreg și comparați cu rezultatul obținut prin calcul:

a) $\frac{22}{7} - \frac{9}{7}$; b) $\frac{21}{5} - \frac{4}{5}$; c) $\frac{33}{8} - \frac{15}{8}$; d) $\frac{34}{7} - \frac{15}{7}$; e) $\frac{46}{9} - \frac{17}{9}$.

17.2 Suma și diferența fracțiilor cu numitori diferiți

ÎMI AMINTESC!



Cum adunăm sau scădem fracții care au numitori diferiți?

Calculați:

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$; b) $\frac{7}{3} - \frac{5}{6}$;
c) $\frac{7}{4} - \frac{3}{5}$; d) $\frac{5}{6} + \frac{3}{8}$.

Prin amplificare se aduc fracțiile la un numitor comun.



Rezolvare: a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$; b) $\frac{7}{3} - \frac{5}{6} = \frac{14}{6} - \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$;
c) $\frac{7}{4} - \frac{3}{5} = \frac{35}{20} - \frac{12}{20} = \frac{23}{20}$; d) $\frac{5}{6} + \frac{3}{8} = \frac{20}{24} + \frac{9}{24} = \frac{29}{24}$.

EXERSEZ

1 Calculați: a) $\frac{3}{2} + \frac{1}{4}$; b) $\frac{5}{3} + \frac{1}{6}$; c) $\frac{13}{4} - \frac{5}{8}$; d) $\frac{17}{10} - \frac{4}{5}$; e) $\frac{4}{3} + \frac{5}{4}$; f) $\frac{7}{9} + \frac{3}{4}$; g) $\frac{9}{2} - \frac{4}{3}$.

2 Calculați: a) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$; b) $\frac{1}{6} + \frac{4}{15}$; c) $\frac{13}{10} - \frac{5}{6}$; d) $\frac{9}{4} - \frac{5}{6}$; e) $\frac{5}{9} + \frac{1}{6}$; f) $\frac{9}{8} - \frac{5}{6}$; g) $\frac{17}{12} - \frac{3}{8}$.

3 Diferența a două numere este $6\frac{3}{8}$, iar unul dintre numere este $9\frac{1}{6}$. Aflați celălalt număr. Câte soluții are problema?

4 Un alpinist a făcut în prima zi $\frac{3}{20}$ din traseu, iar a doua zi cu $\frac{1}{15}$ mai puțin decât în prima zi. Ce parte din traseu mai este de parcurs după cele două zile?

5 Cele patru pătrate egale reprezintă diferențele $4 - \frac{3}{4}$ și $4 - 3\frac{1}{4}$.



a) Aflați rezultatele scăderilor interpretând imaginile.

b) Efectuați cele două scăderi.

6 Reprezentați prin pătrate și culori diferite scăderile: $5 - \frac{1}{3}$ și $5 - 4\frac{2}{3}$.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

7 Completați căsuțele libere:

$\frac{2}{4}$	+	$\frac{3}{4}$	=	
+		+		+
1	+	$\frac{7}{4}$	=	
=		=		=
	+		=	

$\frac{1}{6}$	+	$\frac{3}{6}$	=	
+		+		+
$\frac{5}{6}$	+	$\frac{3}{2}$	=	
=		=		=
	+		=	

8 Calculați:

a) $\frac{7}{14} + \frac{24}{16} + \frac{5}{4}$; b) $\frac{12}{18} + \frac{5}{6} + \frac{28}{81}$;
c) $\frac{9}{36} + \frac{3}{8} + \frac{15}{12}$; d) $\frac{3}{18} + \frac{7}{12} + \frac{20}{24}$.

9 Arătați că suma numerelor x și y este un număr natural:

a) $x = \frac{31}{14} - \frac{17}{14} - \frac{24}{42}$ și $y = \frac{52}{21} - \frac{10}{21} - \frac{27}{63}$;
b) $x = \frac{61}{24} - \frac{14}{24} - \frac{87}{72}$ și $y = \frac{67}{16} - \frac{13}{16} - \frac{54}{48}$.

10 Estimați, folosind rotunjirea până la cel mai apropiat întreg și comparați cu rezultatul obținut prin calcul.

a) $\frac{41}{8} + \frac{17}{4}$; b) $\frac{23}{21} + \frac{6}{7}$; c) $\frac{43}{6} + \frac{13}{4}$; d) $\frac{53}{9} - \frac{4}{6}$; e) $\frac{34}{9} - \frac{19}{18}$; f) $\frac{24}{5} - \frac{15}{7}$.

Proprietățile adunării numerelor raționale

ÎMI AMINTESC!

La adunarea numerelor naturale:

putem schimba locul termenilor

$$a + b = b + a$$

putem grupa câte doi termeni

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

zero nu influențează rezultatul

$$a + 0 = 0 + a = a$$

OBSERV

$${}^4)\frac{2}{3} + {}^3)\frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8+3}{12} = \frac{3+8}{12} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} ({}^4)\frac{1}{2} + ({}^2)\frac{1}{4} + \frac{1}{8} &= \left(\frac{4}{8} + \frac{2}{8}\right) + \frac{1}{8} = \frac{4+2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{(4+2)+1}{8} = \frac{4+(2+1)}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2+1}{8} = \\ &= \frac{4}{8} + \left(\frac{2}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \end{aligned}$$

ÎNȚELEG

Adunarea este comutativă

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \text{ pentru orice } \\ \text{numere raționale } \frac{a}{b} \text{ și } \frac{c}{d}$$

Adunarea este asociativă

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) \\ \text{pentru orice numere raționale } \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$$

Zero $\left(\frac{0}{a}, a \text{ nenul}\right)$ este element neutru al adunării.

$$\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \\ \text{pentru orice număr rațional } \frac{a}{b}$$

APLIC

Calculați: $\frac{1}{3} + \frac{5}{3} + \frac{1}{2}$. *Rezolvare:* $\frac{1}{3} + \frac{5}{3} + \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3}\right) + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. Am asociat $\frac{1}{3}$ și $\frac{5}{3}$.

EXERSEZ

1 Calculați:

a) $\frac{1}{4} + \frac{7}{4} + \frac{2}{3}$;

b) $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$;

c) $\frac{1}{6} + \frac{2}{5} + \frac{11}{6}$;

d) $\frac{3}{7} + \frac{11}{7} + \frac{3}{2}$.

2 Calculați:

a) $4 + \frac{2}{5} + 1 + \frac{3}{5}$;

b) $7 + \frac{3}{8} + 2 + \frac{5}{8}$;

c) $\frac{2}{7} + 3 + \frac{5}{7} + 1$;

d) $\frac{7}{6} + 4 + \frac{5}{6} + 3$.

3 Folosind asociativitatea și comutativitatea, calculați:

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{2}$;

b) $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{8}{5} + \frac{1}{8}$;

c) $\frac{1}{4} + \frac{5}{3} + \frac{1}{3} + \frac{7}{4}$;

d) $\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{7}{6} + \frac{5}{3}$.

4 Calculați:

a) $4\frac{5}{6} + 2\frac{4}{3}$;

b) $2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{6}$;

c) $4\frac{2}{5} + 3\frac{1}{4}$;

d) $5\frac{1}{4} + 2\frac{3}{8}$.

18. Înmulțirea și împărțirea fracțiilor

18.1 Produsul fracțiilor

A. Înmulțirea unui număr natural cu o fracție ordinară

OBSERV

Mama Irinei are de plantat flori pe o anumită suprafață din grădină și plantează într-o zi $\frac{2}{9}$ din suprafață. Ce parte din suprafață va fi plantată cu flori după 4 zile?

Rezolvare grafică: Considerăm suprafața ca un întreg pe care îl împărțim în 9 parcele egale.

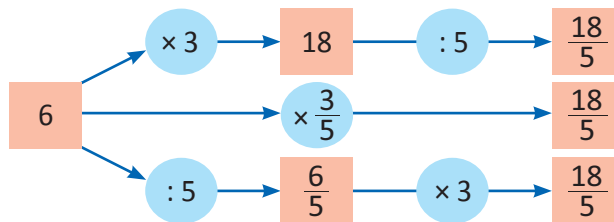


Răspuns: $\frac{8}{9}$.

Rezolvare prin calcul:

$$4 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2+2+2+2}{9} = \frac{4 \cdot 2}{9} = \frac{8}{9}$$

Priviți desenul.



ÎNȚELEG

Produsul $a \cdot \frac{b}{c}$ dintre numărul natural a și fracția ordinară $\frac{b}{c}$ poate fi calculat astfel:

1) $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$

sau

2) $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b$

Înmulțim numărul a cu numărătorul și păstrăm numitorul.

Împărțim numărul a la numitor și rezultatul îl înmulțim cu numărătorul.

APLIC

Calculați în două moduri $6 \cdot \frac{5}{8}$.

Rezolvare: a) $6 \cdot \frac{5}{8} = \frac{6 \cdot 5}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$ b) $6 \cdot \frac{5}{8} = \frac{6}{8} \cdot 5 = \frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4}$

EXERSEZ

1 Calculați în două moduri:

a) $60 \cdot \frac{3}{5}$; b) $\frac{5}{6} \cdot 9$; c) $14 \cdot \frac{3}{4}$.

2 Calculați în două moduri:

a) $7 \frac{2}{3} \cdot 6$; b) $3 \frac{2}{5} \cdot 15$; c) $4 \frac{3}{7} \cdot 5$.

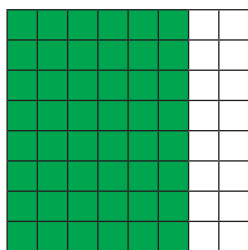
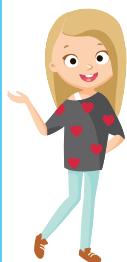
3 Ce distanță parcurge un biciclist în $2 \frac{1}{3}$ ore dacă merge cu viteza de 30 km pe oră?

4 Dintr-o sumă de bani, Sorin a cheltuit $\frac{3}{5}$ pentru un bilet la un spectacol, iar cu restul a cumpărat o carte de 36 lei. Ce sumă a avut Sorin?

B. Produsul a două fracții ordinare

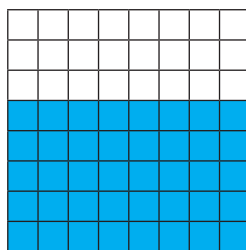
OBSERV

Am înțeles cum se înmulțește un număr natural cu o fracție.



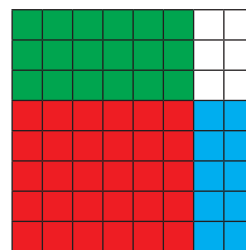
$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} = ?$$



$$\frac{5}{8}$$

Dar cum se înmulțesc două fracții ordinare? Să privim desenele!



$$\frac{30}{64} = \frac{15}{32} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8}$$

ÎNȚELEG

Produsul dintre două fracții ordinare este egal cu produsul numărătorilor supra produsul numitorilor.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

APLIC

Aflați în două moduri fracția ireductibilă echivalentă cu:

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$; b) $\frac{7}{6} \cdot \frac{4}{5}$; c) $\frac{3}{8} \cdot \frac{12}{5}$; d) $\frac{6}{7} \cdot \frac{5}{9}$; e) $\frac{9}{5} \cdot \frac{7}{24}$; f) $\frac{11}{8} \cdot \frac{10}{9}$; g) $\frac{7}{20} \cdot \frac{16}{5}$.

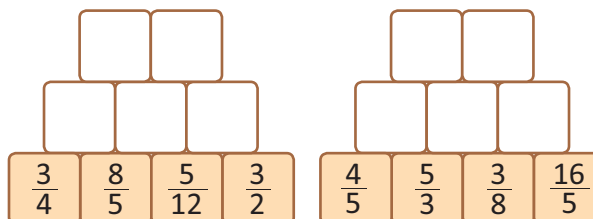
Model de rezolvare: $\frac{3}{16} \cdot \frac{12}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{28}$ sau $\frac{3}{16} \cdot \frac{12}{7} = \frac{3}{7} \cdot \frac{12}{16} = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{28}$.

EXERSEZ

1 Calculați și simplificați rezultatul:

a) $\frac{12}{5} \cdot \frac{7}{18}$; b) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6}$; c) $\frac{9}{7} \cdot \frac{2}{3}$;
 d) $\frac{8}{5} \cdot \frac{7}{12}$; e) $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{6}$; f) $\frac{21}{4} \cdot \frac{5}{14}$;
 g) $\frac{35}{8} \cdot \frac{4}{21}$; h) $\frac{49}{24} \cdot \frac{18}{35}$; i) $\frac{14}{27} \cdot \frac{18}{49}$.

2 Completați fiecare căramidă cu produsul fracțiilor de pe cărămizile de sprijin.



C. Simplificarea într-un produs de fracții

OBSERV

Simplificați $\frac{4}{9} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{15}{11}$.

Rezolvare: $\frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot \overset{5}{\cancel{15}} \cdot 7}{\underset{3}{\cancel{9}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 11} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 5}{3 \cdot 1 \cdot 11} = \frac{70}{33}$

a) Simplificăm direct:

c) Scriem într-o formă echivalentă:

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{15}{11} = \frac{4^{(2)}}{2} \cdot \frac{15^{(3)}}{9} \cdot \frac{7}{11} = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{11} = \frac{70}{33}$$

b) Simplificăm succesiv:

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{15}{11} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 15^{(2)}}{9 \cdot 2 \cdot 11} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 15^{(3)}}{9 \cdot 1 \cdot 11} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 5}{3 \cdot 11} = \frac{70}{33}$$

EXERSEZ

1 Simplificați în trei moduri:

2 Efectuați:

a) $\frac{6}{7} \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{3}{20}$; b) $\frac{8}{11} \cdot \frac{35}{6} \cdot \frac{5}{21}$; c) $\frac{12}{13} \cdot \frac{25}{8} \cdot \frac{11}{35}$. a) $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}$; b) $\frac{19}{6} - \frac{5}{18} \cdot 3$; c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{4}$.

D. Proprietățile înmulțirii numerelor raționale

OBSERV

ÎNȚELEG

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$$

$$\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{7}{6} = \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{6} = \frac{56}{90}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{6}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{28}{30} = \frac{56}{90}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{6} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{56}{90}$$

Comutativitatea Pentru orice numere raționale $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Asociativitatea

Pentru orice numere raționale $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Elementul neutru Numărul 1 este element neutru la înmulțirea cu orice număr rațional $\frac{a}{b}$

$$1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

Distributivitatea (factor comun)

Pentru orice numere raționale $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ și $\frac{e}{f}$:

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$$

și

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} - \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$$

$$1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\frac{7}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right) = \frac{7}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{49}{15}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{6}{8} - \frac{2}{8}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{8} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{3}$$

ÎNȚELEG

Înmulțirea numerelor raționale are proprietăți asemănătoare cu înmulțirea numerelor naturale?
Da, pentru că înmulțirea numerelor raționale se face prin înmulțiri de numere naturale.

EXERSEZ

1 Folosind proprietățile înmulțirii, aflați fracția ireductibilă egală cu:

a) $\left(\frac{6}{7} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{10}{9}$; b) $\frac{13}{7} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{26}$; c) $\frac{6}{7} \cdot \left(\frac{21}{4} \cdot \frac{9}{8}\right)$; d) $\frac{3}{8} \cdot \frac{17}{15} \cdot \frac{8}{9}$;
e) $\frac{3}{5} \cdot \frac{17}{13} \cdot \frac{2}{3}$; f) $\frac{5}{4} \cdot \frac{13}{7} \cdot \frac{2}{5}$; g) $\left(\frac{3}{14} \cdot \frac{5}{4}\right) \cdot \frac{7}{3}$; h) $\frac{8}{9} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{6}{7}$.

2 Calculați în două moduri:

a) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{7}{3}\right)$; b) $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{8}\right)$; c) $\frac{4}{7} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{21}{4}\right)$; d) $\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{12}{7} - \frac{3}{14}\right)$.

3 Calculați în două moduri:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$; b) $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{3} + \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3}$;
c) $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{9} + \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{9}$; d) $\frac{11}{6} \cdot \frac{9}{8} - \frac{11}{6} \cdot \frac{3}{8}$;
e) $\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$; f) $\frac{7}{9} \cdot \frac{11}{8} - \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{8}$.

4 Calculați $x \cdot y \cdot z$, știind că:

a) $x = \frac{4}{5}$ și $yz = \frac{5}{6}$; b) $y = \frac{2}{3}$ și $xz = \frac{9}{4}$.

5 Aflați: a) $x(y - z)$, dacă $xz = \frac{3}{5}$ și $xy = \frac{21}{10}$;
b) $y(x - z)$, dacă $yz = \frac{3}{4}$ și $xy = \frac{7}{6}$.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

6 Copiați și completați tabelul:

a	b	c	$a + b$	$b + c$	$a + c$	$a \cdot b$	$b \cdot c$	$a \cdot c$	$a \cdot (b + c)$	$b \cdot (a + c)$	$c \cdot (a + b)$
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{5}$									
$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$									
$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{4}$									

7 Calculați:

a) $x \cdot y + y \cdot z$, știind că: $x + z = \frac{6}{25}$ și $y = \frac{5}{3}$;
b) $x \cdot y - x \cdot z$, știind că: $y - z = \frac{7}{4}$ și $z = \frac{21}{8}$;
c) xz , știind că: $x \cdot (y + z) = \frac{4}{5}$ și $xy = \frac{3}{10}$.

SUNT CAMPION

8 Calculați $x \cdot y \cdot z$, știind că:

a) $xy = \frac{5}{4}$, $yz = \frac{9}{2}$, $xz = \frac{32}{45}$;
b) $xy = \frac{3}{8}$, $yz = \frac{5}{3}$, $xz = \frac{72}{45}$.

18.2 Puterea cu exponent natural a unei fracții ordinare

ÎMI AMINTESC!



Știm să scriem și să calculăm 2 la puterea a treia.
 $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Scrim: $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{64}{125}$.

Să vedem cum scriem și cum citim puterea a treia a lui $\frac{4}{5}$.

Citim: $\frac{4}{5}$, totul la a treia.



ÎNȚELEG

Pentru a ridica la o putere un număr rațional exprimat printr-o fracție ordinară, ridicăm la acea putere atât numărătorul, cât și numitorul fracției.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ factori egali}} = \frac{a^n}{b^n}$$

$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$ pentru orice număr rațional $\frac{a}{b}$ nenul.

Baza este $\frac{a}{b}$ și exponentul n .

$\frac{a^n}{b^n}$ este puterea a n -a a lui $\frac{a}{b}$.

Prin convenție:

$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$ pentru orice număr rațional $\frac{a}{b}$.

EXERSEZ

1 Calculați: $\left(\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(\frac{1}{2}\right)^4$; $\left(\frac{1}{2}\right)^5$; $\left(\frac{1}{2}\right)^6$; $\left(\frac{1}{2}\right)^7$; $\left(\frac{1}{2}\right)^8$; $\left(\frac{1}{2}\right)^9$.

2 Scrieți sub formă de putere și calculați:

- a) $\frac{4}{5}$ la puterea a doua; c) pătratul lui $\frac{2}{7}$;
 b) puterea a treia a lui $\frac{4}{5}$; d) $\frac{5}{6}$ la pătrat.

3 Calculați pătratele fracțiilor:

- a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{6}{7}$; c) $\frac{9}{8}$; d) $\frac{11}{6}$;
 e) $\frac{4}{13}$; f) $\frac{7}{10}$; g) $\frac{12}{13}$; h) $\frac{15}{16}$.

4 Descoperiți relațiile adevărate și pe cele false:

- a) $\left(\frac{2}{3}\right)^0 < \left(\frac{2}{3}\right)^2$; b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$;
 c) $\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 0$; d) $\left(\frac{5}{4}\right)^2 < \left(\frac{5}{4}\right)^3$;
 e) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{3}{9}$; f) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$;
 g) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 1\frac{1}{4}$; h) $\left(\frac{2}{7}\right)^0 = 1$.

5 Calculați:

- a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}$;
 d) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2$; e) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}$; f) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3$;
 g) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$; h) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2$;
 i) $\left(\frac{5}{6}\right)^7 : \left(\frac{5}{6}\right)^5$; j) $\left(\frac{8}{9}\right)^3 : \left(\frac{8}{9}\right)^3$.

6 Scrieți ca putere a unei fracții ordinare:

- a) $\frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^2}$; b) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^4}$; c) $\frac{25}{9}$; d) $\frac{27}{64}$; e) $\frac{3}{24}$; f) $\frac{20}{45}$;
 g) $\frac{81}{625}$; h) $\frac{54}{128}$; i) $\frac{36}{169}$; j) $\frac{50}{72}$; k) $\frac{16}{54}$.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

7 Copiați pe caiete și completați tabelul.

$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$\frac{16}{54}$	$\frac{32}{162}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{64}{729}$	$\frac{9}{9}$	$\frac{32}{243}$	$\frac{4}{6}$
n							

8 Completați căsuțele libere cu o cifră.

- a) $\frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\square}$; b) $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\square}$; c) $\frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\square}$;
 d) $\frac{9}{100} = \left(\frac{3}{\square}\right)^2$; e) $\frac{27}{64} = \left(\frac{\square}{4}\right)^3$; f) $\frac{16}{81} = \left(\frac{2}{\square}\right)^4$.

9 Completați casetele cu unul dintre semnele „<“, „=“ sau „>“:

- a) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \square \left(\frac{1}{3}\right)^2$; b) $\left(\frac{4}{3}\right)^2 \square \left(\frac{4}{3}\right)^3$;
 c) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \square \left(\frac{2}{5}\right)^3$; d) $\left(\frac{6}{5}\right)^2 \square \left(\frac{6}{5}\right)^3$.

10 Asociați fiecărui număr din casetele de jos pătratul său, aflat în una dintre casetele de sus.

$\frac{16}{36}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{16}{49}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{36}{64}$	$\frac{49}{64}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{36}{100}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{8}$

SUNT CAMPION

11 Calculați:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{49}}$$

12 Arătați că:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{29^2} < 1$$

Reguli de calcul cu puteri

OBSERV

Scrieți ca putere cu baza $\frac{4}{7}$ numerele: a) $\left(\frac{4}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^3$; b) $\left[\left(\frac{4}{7}\right)^2\right]^3$.

Rezolvare: a) $\left(\frac{4}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{4^2}{7^2} \cdot \frac{4^3}{7^3} = \frac{4^2 \cdot 4^3}{7^2 \cdot 7^3} = \frac{4^5}{7^5} = \left(\frac{4}{7}\right)^5$;

b) $\left[\left(\frac{4}{7}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{4}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{4^2}{7^2} \cdot \frac{4^2}{7^2} \cdot \frac{4^2}{7^2} = \frac{4^6}{7^6} = \left(\frac{4}{7}\right)^6$.

Deducem că:

$$\left(\frac{4}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \left(\frac{4}{7}\right)^{2+3} \text{ și } \left[\left(\frac{4}{7}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{4}{7}\right)^{2 \cdot 3}$$

Regulile de calcul cu puteri de numere naturale sunt aceleași și pentru numere raționale.

ÎNȚELEG

Pentru orice numere naturale nenule a, b, c, d, m, n se verifică relațiile:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n} \quad \left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n} \quad \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$$

APLIC

1) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \left(\frac{3}{5}\right)^{2+4} = \left(\frac{3}{5}\right)^6$

3) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{2^4}\right] = \left(\frac{3}{5}\right)^{2 \cdot 4} = \left(\frac{3}{5}\right)^8$

2) $\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7}\right)^4 = \left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^4$

4) $\left(\frac{3}{5}\right)^8 : \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^{8-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^6$

EXERSEZ

1 Scrieți sub formă de putere a unei fracții ordinare.

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^9$;

b) $\frac{2^4}{3^4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$;

c) $\frac{4}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$;

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{8}{27}$;

e) $\frac{3^5}{4^5} \cdot \left(\frac{6}{8}\right)^7$;

f) $\frac{6^7}{8^7} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$;

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \frac{12}{18}$;

h) $\left(\frac{4}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{6}{15}\right)^9$.

2 Scrieți sub formă de putere cu aceeași bază.

a) $\left(\frac{1}{8}\right)^7$ și $\left(\frac{1}{4}\right)^3$;

b) $\left(\frac{1}{9}\right)^5$ și $\left(\frac{1}{27}\right)^4$;

c) $\left(\frac{27}{8}\right)^7$ și $\left(\frac{18}{8}\right)^5$;

d) $\left(\frac{1}{32}\right)^6$ și $\left(\frac{3}{48}\right)^5$.

3 Scrieți sub formă de putere a unei fracții ordinare.

a) $\left(\frac{9}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^9$; b) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{2^5}\right] \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7$; c) $\left(\frac{8}{125}\right)^4 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^7$; d) $\left(\frac{18}{50}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^8$.

4 Scrieți ca puteri cu același exponent.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{28}$ și $\left(\frac{1}{4}\right)^{21}$;

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{18}$ și $\left(\frac{1}{5}\right)^{12}$;

c) $\left(\frac{4}{5}\right)^{24}$ și $\left(\frac{2}{3}\right)^{32}$;

d) $\left(\frac{5}{6}\right)^{45}$ și $\left(\frac{4}{3}\right)^{36}$.

5 Scrieți mai simplu.

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{12}$;

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^{14} \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^7$;

c) $\left(\frac{49}{121}\right)^5 \cdot \left(\frac{11}{9}\right)^{10}$;

d) $\left(\frac{16}{81}\right)^3 \cdot \left(\frac{125}{8}\right)^4$.

6 Scrieți sub formă de putere a unei fracții ordinare.

a) $\left(\frac{7}{6}\right)^{13} : \left(\frac{7}{6}\right)^4$;

b) $\left(\frac{5}{7}\right)^{12} : \frac{25}{49}$;

c) $\frac{4^9}{3^9} : \frac{64}{27}$;

d) $\left(\frac{6}{9}\right)^{14} : \left(\frac{2}{3}\right)^6$;

e) $\left(\frac{6}{8}\right)^{12} : \frac{18}{32}$;

f) $\left(\frac{8}{125}\right)^5 : \left(\frac{4}{10}\right)^7$;

g) $\left(\frac{81}{16}\right)^5 : \left(\frac{6}{4}\right)^{13}$;

h) $\left(\frac{3}{5}\right)^9 : \frac{25}{9}$.

7 Arătați că:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{3}\right)^2$;

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{30} > \left(\frac{1}{3}\right)^{20}$;

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 > \left(\frac{1}{5}\right)^2$;

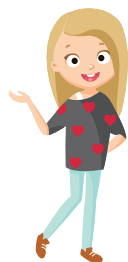
d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{18} > \left(\frac{1}{5}\right)^{12}$.

SUNT CAMPION

8 Dacă $S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{45}$, calculați:
 $(S + 2) : 128^6$.

18.3 Împărțirea fracțiilor ordinare

OBSERV



Cum calculăm $\frac{9}{20} : \frac{3}{4}$?

Exercițiul se poate gândi și astfel:

$$? \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$$



Acum putem scrie:

$$\frac{9}{20} : \frac{3}{4} = \frac{3}{5} = \frac{9:3}{20:4}$$

Sau, la fel de bine, putem scrie:

$$\frac{9}{20} : \frac{3}{4} = \frac{3}{5} = \frac{9}{20} \cdot \frac{4}{3}$$



ÎNȚELEG

• Inversa unei fracții nenule $\frac{a}{b}$ este $\frac{b}{a}$.

• Inversul unui număr natural nenul a este $\frac{1}{a}$.

• Împărțirea dintre două fracții se face înmulțind prima fracție cu inversa celei de-a doua fracții.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad (b, c, d \text{ nenule})$$



Observ că $9 : 2 = 9 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

Înțeleg că linia de fracție reprezintă împărțire.

Linia de fracție „-“ are înțelesul de împărțire „:”, iar egalitatea $a : b = \frac{a}{b}$ este adevărată pentru orice numere naturale a și b , $b \neq 0$.



EXERSEZ

1 Scrieți inversele următoarelor numere:

- a) $\frac{6}{5}$; b) $\frac{3}{8}$; c) 7; d) $4\frac{1}{5}$;
e) $\frac{25}{9}$; f) $\frac{1}{8}$; g) $3\frac{4}{3}$.

2 Scrieți rezultatul sub formă de fracție ireducibilă:

- a) $\frac{4}{7} : \frac{3}{7}$; b) $\frac{5}{6} : \frac{3}{2}$; c) $\frac{6}{9} : \frac{5}{3}$;
d) $\frac{5}{12} : \frac{15}{8}$; e) $\frac{9}{8} : \frac{3}{4}$; f) $\frac{5}{6} : \frac{10}{9}$.

3 Efectuați:

- a) $8 : \frac{4}{5}$; b) $\frac{6}{25} : 9$; c) $15 : \frac{5}{4}$; d) $4\frac{1}{5} : 7$; e) $2\frac{4}{7} : 9$; f) $5\frac{1}{7} : 12$; g) $6\frac{1}{4} : 15$.

4 Câți săculeți de $2\frac{1}{2}$ kg sunt necesari pentru a transporta 390 kg de fructe?

5 Stabiliți dacă egalitățile de mai jos sunt adevărate (A) sau false (F).

a) $\square \frac{6}{7} : 4 = \frac{1}{4} : \frac{7}{6}$; b) $\square \frac{12}{25} : \frac{3}{5} = \frac{12:3}{25:5}$; c) $\square 6\frac{1}{2} : 3\frac{1}{2} = 2$; d) $\square \frac{5}{9} : \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{5}{9} : \frac{2}{7}\right) \cdot \frac{4}{3}$.

6 Cu cât trebuie înmulțit numărul $\frac{2}{3}$ pentru a obține rezultatul $\frac{5}{6}$?

7 Găsiți 3 fracții ordinare care, împărțite la $\frac{4}{5}$, dau ca rezultat un număr natural par.

8 Aflați numărul rațional x , știind că:

a) $\frac{1}{2}$ din x este $\frac{4}{5}$; b) $\frac{2}{3}$ din x este $\frac{4}{9}$;
 c) $\frac{3}{4}$ din x este $\frac{12}{5}$; d) $\frac{4}{5}$ din x este $\frac{8}{7}$.

9 Efectuați:

a) $\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right) : \frac{23}{4}$; b) $\frac{11}{2} : \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{8}\right)$;
 c) $\left(\frac{5}{4} + \frac{7}{6}\right) : \frac{29}{6}$; d) $\frac{17}{12} : \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{8}\right)$.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

10 Copiați pe caiete și completați.

$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$	$\frac{d}{c}$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{10}$				
	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{10}$			
$\frac{5}{6}$				$\frac{5}{9}$	
	$\frac{6}{7}$				$\frac{7}{28}$
$\frac{4}{9}$			$\frac{6}{5}$		

11 Asociați fiecare număr din al doilea rând cu inversul său din primul rând.

2	$1\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{7}$	$1\frac{3}{5}$	$2\frac{1}{2}$	$\frac{5}{9}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$2\frac{1}{3}$	$1\frac{4}{5}$	$\frac{5}{8}$



Ordinea efectuării operațiilor

- Într-un calcul fără paranteze sau în interiorul unei paranteze rotunde se fac mai întâi ridicările la putere, apoi înmulțirile și împărțirile și în final adunările și scăderile.
- Într-un calcul cu paranteze se fac mai întâi operațiile din parantezele rotunde, după care parantezele drepte devin rotunde ș.a.m.d.

1) Efectuați:

a) $\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{15}$; b) $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5}$;
 c) $\frac{7}{5} - \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2}$; d) $\frac{10}{3} - \frac{2}{3} : \frac{4}{5}$.

2) Calculați:

a) $\left(5 + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{6}{5}$; b) $\left(6 + \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{3}{10}$;
 c) $\left(4 - \frac{2}{5}\right) : \frac{12}{15}$; d) $\left(2 + \frac{5}{6}\right) : \frac{17}{4}$.

3) Verificați dacă egalitățile sunt adevărate.

a) $\square \frac{12}{35} \cdot \left[\frac{3}{8} + \left(1\frac{5}{8} - \frac{3}{8} : \frac{3}{2}\right)\right] = \frac{3}{5}$; b) $\square \frac{5}{19} \cdot \left[\frac{11}{2} - \left(2\frac{1}{4} - \frac{23}{4} : \frac{23}{6}\right)\right] = \frac{5}{4}$;
 c) $\square \frac{7}{6} \cdot \left[\frac{11}{6} - \left(2\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) : \frac{15}{7}\right] = \frac{7}{9}$; d) $\square \frac{3}{14} \cdot \left[\frac{23}{6} - \left(2\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) : \frac{15}{7}\right] = \frac{4}{7}$.

19. Aflarea unei fracții sau procent dintr-un număr sau fracție

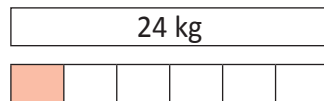
19.1 Aflarea unei fracții dintr-un număr sau fracție

A. Aflarea unei fracții dintr-un număr natural

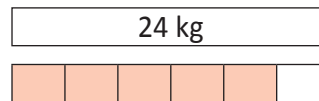
ÎMI AMINTESC!

Din cele 24 kg de fructe cumpărate, mama lui Andrei a folosit pentru conserve doar $\frac{5}{6}$. Câte kg de fructe au fost prelucrate?

Rezolvare:



$\frac{1}{6}$ din 24



$\frac{5}{6}$ din 24

$\frac{1}{6}$ din cantitate reprezintă $24 : 6 = 4$ kg

$\frac{5}{6}$ din cantitate reprezintă $5 \cdot 4 = 20$ kg

Se observă că $\frac{5}{6}$ din 24 kg înseamnă $\frac{5}{6} \cdot 24$ kg = $5 \cdot \frac{24}{6}$ kg = $5 \cdot 4$ kg = 20 kg. Răspuns: 20 kg.

ÎNȚELEG

Pentru aflarea unei fracții $\frac{a}{b}$ dintr-un număr natural n se calculează produsul $\frac{a}{b} \cdot n$.

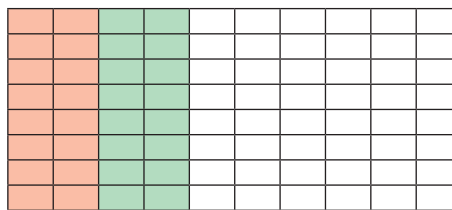
APLIC

- Aflați $\frac{2}{5}$ din 80.

Rezolvare. a) prin calcul: $\frac{2}{5}$ din 80 = $\frac{2}{5} \cdot 80 = 2 \cdot \frac{80}{5} = 2 \cdot 16 = 32$;

b) prin reprezentări: Divizând o latură în 10 părți egale și cealaltă latură în 8 părți egale, obținem o acoperire cu 80 dreptunghiuri egale.

Partea colorată este acoperită din 32 de dreptunghiuri și reprezintă $\frac{2}{5}$ din 80.



80

$\frac{1}{5}$ din 80 = 16

$\frac{2}{5}$ din 80 = 32



EXERSEZ

1 Calculați $\frac{1}{2}$ din: a) 150 km; b) 620 kg; c) 130 litri; d) 270 minute; e) 24 ore; f) 726 lei; g) 540 m.

2 Calculați $\frac{1}{3}$ din:

a) 432 kg; b) 81 tone; c) 87 ani; d) 51 de lăzi; e) 57 de mașini; f) 853 euro; g) 48 de țări.

3 Aflați prin reprezentări: a) $\frac{5}{6}$ din 18; b) $\frac{3}{8}$ din 40.

4 Calculați: a) $\frac{5}{6}$ din 372; b) $\frac{3}{5}$ din 1 500; c) $\frac{3}{8}$ din 2 400; d) $\frac{6}{7}$ din 2 100; e) $\frac{5}{100}$ din 2 300; f) $\frac{4}{100}$ din 50; g) $\frac{35}{100}$ din 120.

5 O suprafață dreptunghiulară are lungimea de 51 m, iar lățimea reprezintă $\frac{2}{3}$ din lungime. Calculați perimetrul dreptunghiului.

6 Dintr-o cantitate de iarbă verde se obține doar $\frac{3}{7}$ iarbă uscată. Câte kg de iarbă uscată se obțin din 1 456 kg de iarbă verde?

7 Ciprian a cheltuit $\frac{5}{8}$ din suma de 248 lei și încă 32 lei. Câți lei i-au rămas din sumă?

8 Matei a executat 35 de aruncări la coșul de baschet și a ratat $\frac{2}{7}$ din aruncări. Câte aruncări reușite au fost?

9 După ce mărim un număr cu $\frac{3}{5}$ din el, se obține numărul 48. Care a fost numărul inițial?

10 Într-o livadă sunt 60 de cireși, reprezentând $\frac{4}{7}$ din totalul pomilor. Câți pomi sunt în livadă?

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

11 Completați căsuțele libere.

n	15	30	45	60	75	90	105	120	135
$\frac{3}{5}$ din n									
$\frac{5}{3}$ din n									

12 Asociați fiecărei căsuțe dreptunghiulare un număr natural din rândul de sus.

4
6
8
12
14
15
18
24
28
65

$\frac{20}{100}$ din 40
 $\frac{1}{2}$ din 8
 $\frac{3}{2}$ din 12
 $\frac{2}{5}$ din 35
 $\frac{4}{3}$ din 18

$\frac{3}{7}$ din 28
 $\frac{2}{3}$ din 9
 $\frac{3}{4}$ din 20
 $\frac{5}{2}$ din 26
 $\frac{7}{9}$ din 36

B. Aflarea unei fracții dintr-o fracție ordinară

OBSERV

Calculați $\frac{2}{3}$ din $\frac{4}{5}$.

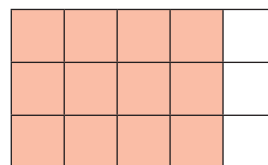
Rezolvare: $\frac{2}{3}$ din $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$. Problema devine $\frac{2}{3}$ din $\frac{12}{15}$.

Desenăm un dreptunghi care are lungimea împărțită în 5 părți egale și lățimea în 3 părți egale.

Observăm că se obțin 15 casete egale, fiecare reprezentând $\frac{1}{15}$ din întregul dreptunghi.

Fracția $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$ este reprezentată de cele 12 casete colorate, iar $\frac{2}{3}$ din $\frac{4}{5}$ reprezintă $\frac{2}{3}$ din această parte colorată.

$\frac{2}{3}$ din $\frac{4}{5} = 8$ casete = $8 \cdot \frac{1}{15} = \frac{8}{15}$. *Răspuns:* $\frac{2}{3}$ din $\frac{4}{5}$ este $\frac{8}{15}$.



ÎNȚELEG



$\frac{2}{3}$ din $\frac{4}{5}$ înseamnă $\frac{8}{15}$.

O fracție $\frac{a}{b}$ dintr-o altă fracție $\frac{c}{d}$ se calculează înmulțind fracțiile.

Dar $\frac{8}{15} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$.

$\frac{a}{b}$ din $\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.



APLIC

1) Aflați un număr rațional, știind că $\frac{3}{4}$ din el reprezintă $\frac{5}{8}$.

Rezolvare: $\frac{3}{4}$ din ? = $\frac{5}{8}$ înseamnă $\frac{3}{4} \cdot ? = \frac{5}{8}$.

Numărul necunoscut va fi $\frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5}{6}$. *Răspuns:* $\frac{5}{6}$.

2) Ce fracție din $\frac{6}{5}$ reprezintă $\frac{2}{3}$?

Rezolvare. Se înțelege: Ce număr înmulțit cu $\frac{6}{5}$ este egal cu $\frac{2}{3}$? Facem operație de împărțire.

$\frac{2}{3} : \frac{6}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{9}$. *Răspuns:* $\frac{5}{9}$.

EXERSEZ

1 Calculați:

- a) $\frac{3}{4}$ din $\frac{8}{5}$; b) $\frac{4}{5}$ din $\frac{12}{7}$; c) $\frac{3}{8}$ din $\frac{21}{2}$;
d) $\frac{5}{6}$ din $\frac{21}{5}$; e) $\frac{2}{9}$ din $\frac{3}{4}$; f) $\frac{7}{12}$ din $\frac{14}{9}$.

2 Ce fracție din $\frac{15}{4}$ reprezintă $\frac{10}{3}$?

3 Aflați un număr rațional, știind că $\frac{5}{7}$ din el reprezintă $\frac{2}{3}$.

C. Scara unei hărți *E

ÎNȚELEG

$$\text{Scara} = \frac{\text{distanța de pe hartă}}{\text{distanța reală}}$$

Scara se exprimă printr-o fracție de forma $\frac{1}{x000\dots}$.

APLIC

1) Dacă într-un desen realizat la scara $\frac{1}{50}$, un segment are 6 cm, ce lungime are în realitate?

Rezolvare: Scara $\frac{1}{50}$ arată că, în desen, lungimea reală se micșorează de 50 de ori, adică se înmulțește cu $\frac{1}{50}$.

$$\frac{1}{50} \cdot \text{lungimea reală} = 6 \text{ cm}$$

$$\text{lungimea reală} = 6 : \frac{1}{50} = 6 \cdot 50 = 300 \quad \text{Răspuns: } 300 \text{ cm} = 3 \text{ m.}$$

2) Distanța de la București la Pitești este de 110 km, iar pe o hartă distanța este $5\frac{1}{2}$ cm. Aflați scara acestei hărți.

$$\text{Rezolvare: } 5\frac{1}{2} \text{ cm} = \frac{11}{2} \text{ cm. } 110 \text{ km} = 11\,000\,000 \text{ cm.}$$

$$\text{Scara} = \frac{11}{2} : 11\,000\,000 = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{11\,000\,000} = \frac{1}{2\,000\,000} \quad \text{Răspuns: } \frac{1}{2\,000\,000}$$

EXERSEZ

1 Într-un plan al unui teren, realizat la scara $\frac{1}{500}$, un segment are 5 cm. Ce lungime are în realitate?

2 Distanța dintre București și Paris este de 1 850 km, iar pe hartă distanța este de $7\frac{1}{5}$ cm. Aflați scara acestei hărți.

3 Radu a măsurat curtea dreptunghiulară a școlii și a găsit dimensiunile 54 m, respectiv 72 m. Ajutați-l să deseneze planul acestui teren la scara $\frac{1}{600}$.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

4 Completați tabelul cu distanțele reale exprimate în unități de măsură potrivite.

Scara	6 cm	10 cm	15 cm	25 cm	30 cm
$\frac{1}{50}$					
$\frac{1}{5\,000}$					
$\frac{1}{50\,000}$					

5 Ce fracție reprezintă a din b ? Uniți cu o linie răspunsul potrivit.

12 din 16

4 din 6

16 din 12

6 din 10

20 din 10

15 din 30

6 din 4

$\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}$

$\frac{3}{4}$

$\frac{3}{2}$

$\frac{4}{3}$

$\frac{3}{5}$

$\frac{5}{3}$

19.2 Procente

A. Cum aflăm $p\%$ dintr-un număr

OBSERV

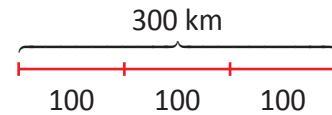
Dacă un autoturism consumă în medie 7 litri de combustibil la 100 km, cât combustibil va consuma pe o distanță de 300 km?

Înmulțim 7 l cu numărul de sute.

Numărul de sute se află prin $300 : 100$ sau $\frac{300}{100} = 3$.

Pentru 300 km va consuma $7 \cdot 3 = 21$ litri.

$7 \cdot 3$ este exprimarea simplă a înmulțirii $7 \cdot \frac{300}{100} = \frac{7}{100} \cdot 300$.



ÎNȚELEG

Fracția $\frac{p}{100}$ sau $p\%$ se numește *raport procentual* și se citește „p la sută“.

Procent este un cuvânt din limba latină format din *pro* (la, pentru) și *centum* (sută).

APLIC

1) Calculați 6% din 12.

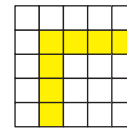
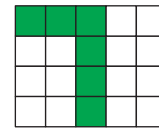
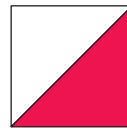
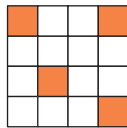
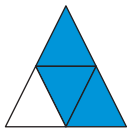
Rezolvare: $\frac{6}{100} \cdot 12 = \frac{72}{100} \stackrel{(18)}{=} \frac{4}{25}$.

2) Calculați 125% din 600.

Rezolvare: $\frac{125}{100} \cdot 600 = 125 \cdot \frac{600}{100} = 125 \cdot 6 = 750$.

EXERSEZ

1 Cât la sută din suprafețele desenate reprezintă părțile colorate?



2 Calculați:

- a) 5% din 300; b) 12% din 500; c) 25% din 56; d) 8% din 1 500; e) 20% din 85.

3 Scrieți fracții cu numitorul 100 echivalente cu:

- a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{3}{25}$; d) $\frac{7}{20}$; e) 1; f) $\frac{9}{4}$.

4 Calculați:

- a) 25% din 40 litri; b) 75% din 1 200 kg; c) 30% din 700 km;
d) 20% din 130 ore; e) 15% din 2 400 lei; f) 30% din 480 km.

5 Într-o clasă sunt 35 de elevi, din care 40% sunt băieți. Câți băieți sunt în clasă?

6 Din 560 de bilete vândute la un spectacol, 20% au fost de categoria a I-a. Câte bilete de categoria a I-a s-au vândut?

B. Măriri și micșorări cu p% *E

APLIC

1) Măriți numărul 50 cu 20%.

Rezolvare:

$$20\% \text{ din } 50 = \frac{20}{100} \cdot 50 = \frac{20 \cdot 50}{100} = 10.$$

$$50 + 10 = 60. \text{ Răspuns: } 60.$$

2) Micșorați numărul 120 cu 5%.

Rezolvare:

$$5\% \text{ din } 120 = \frac{5}{100} \cdot 120 = \frac{5 \cdot 120}{100} = 6.$$

$$120 - 6 = 114. \text{ Răspuns: } 114.$$

EXERSEZ

1 Sorin are un depozit bancar de 2 400 lei. Câți lei îi mai rămân dacă reține 18% din sumă?

2 Victor a obținut în prima etapă a unui concurs de tir sportiv 375 puncte, iar în a doua etapă cu 20% mai multe puncte. Câte puncte a obținut Victor în a doua etapă?

3 Alexandra se gândește la un număr și spune că, dacă îl micșorează cu 12%, obține 264. La ce număr s-a gândit Alexandra?

4 Un angajat al unei companii a fost premiat printr-un spor de salariu de 18%, obținând astfel un venit de 3 540 lei. Cât era salariul înainte de premiere?

5 După o creștere cu 20%, prețul unui obiect a devenit 240 lei. Ce preț avea obiectul înainte de majorare?

6 După o reducere cu 30%, prețul unui obiect a devenit 280 lei. Ce preț avea obiectul înainte de reducere?

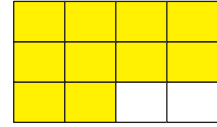
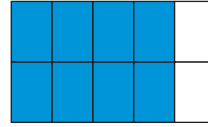
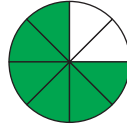


20. Recapitulare



1 Scrieți în casete fracția reprezentată de fiecare desen și fracția echivalentă ireductibilă.

Întregul împărțit
în părți egale



Fracții
echivalente

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

2 Amplificați fracțiile.

a) $\frac{3}{4} = \frac{\square}{\square}$;

b) $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$;

c) $\frac{4}{5} = \frac{\square}{15}$;

d) $\frac{7}{\square} = \frac{35}{40}$.

3 Simplificați fracțiile.

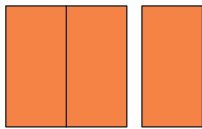
a) $\frac{18}{24} = \frac{\square}{\square}$;

b) $\frac{36}{24} = \frac{6}{4}$;

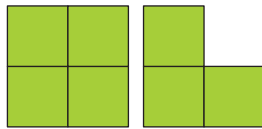
c) $\frac{27}{45} = \frac{\square}{5}$;

d) $\frac{35}{\square} = \frac{5}{6}$.

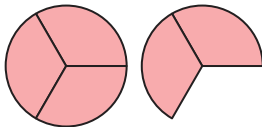
4 Puneți în evidență echivalența dintre un număr mixt și fracția ordinară reprezentată de desen.



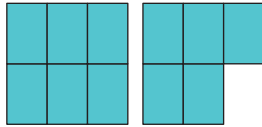
$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$



$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$



$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$



$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

5 Ordonăți crescător fracțiile și veți afla alt nume al operațiilor matematice.

$\frac{1}{4}$ **L** $\frac{1}{2}$ **C** $\frac{3}{4}$ **U** $\frac{1}{6}$ **A** $\frac{1}{8}$ **C** $\frac{7}{4}$ **E** $\frac{7}{5}$ **L**

6 Adunați și scădeți fracții aduse la cel mai mic numitor comun.

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{8}{\square} + \frac{10}{\square} \quad \frac{3}{8} + \frac{5}{4} = \frac{3}{8} + \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{6}{25} = \frac{75}{\square} - \frac{24}{\square} \quad \frac{7}{6} - \frac{5}{18} = \frac{\square}{\square} - \frac{5}{18}$$

$$\frac{8}{4} + \frac{5}{6} = \frac{27}{\square} + \frac{10}{\square} \quad \frac{5}{16} - \frac{7}{24} = \frac{15}{\square} - \frac{14}{\square}$$

7 Completați tabelele:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{6}{7}$
$\frac{8}{3}$		
$\frac{14}{9}$		

:	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{3}{8}$		
$\frac{5}{12}$		

a	a^2	a^3
$\frac{3}{5}$		
$\frac{4}{6}$		

a	5% din a	120% din a
800		
240		

8 Irina și Andreea au împreună 1 430 lei, iar Andreea are cu 20% mai mult decât Irina. Ce sumă de bani are fiecare?



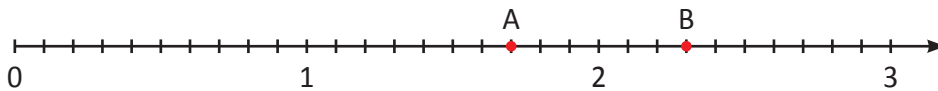
1 Scrieți în ordine crescătoare fracțiile: $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{6}{7}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{17}{8}$; $\frac{9}{9}$; $\frac{6}{5}$.

2 Exprimați prin fracții ireductibile numerele raționale:

a) $\frac{168}{192}$; b) $\frac{630}{756}$.

3 Folosind numai numerele 2, 3, 4, 6 scrieți 4 perechi de fracții echivalente.

4 Folosind desenul, citiți în două moduri coordonata punctului A și coordonata punctului B.



5 Estimați prin rotunjire până la unitate și comparați cu rezultatul obținut prin calcul.

a) $\frac{11}{5} + 7\frac{5}{6}$; b) $6\frac{3}{4} - \frac{7}{8}$.

6 La un antrenament de baschet, Sorin a reușit 24 de coșuri, reprezentând 30% din numărul total de aruncări. Câte aruncări nereușite a executat Sorin?

7 Efectuați:

a) $\frac{11}{2} \cdot \left(\frac{5}{11} + \frac{7}{22}\right)$; b) $\left[\frac{4}{5} + \frac{3}{2} : \left(\frac{6}{5} - \frac{3}{10}\right)\right] \cdot \frac{6}{37}$.

8 Un bazin plin cu apă este golit astfel: în prima zi $\frac{1}{3}$ din capacitate, a doua zi 25% din rest, iar a treia zi ultimii 3 400 litri. Câți litri de apă s-au golit în a doua zi?

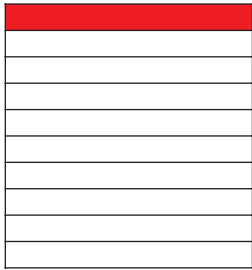
9 Cum împarte bunicul, în mod egal, 5 ciocolate identice la cei 6 nepoți, fără a tăia o ciocolată în mai mult de 3 părți egale?

Punctaj:									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
10 p.	10 p. (2 × 5 p.)	10 p.	10 p.	10 p. (2 × 5 p.)	10 p.	10 p. (2 × 5 p.)	10 p.	10 p.	
Se acordă 10 puncte din oficiu. Pentru a afla nota finală, rezultatul obținut se împarte la 10.									

21. Frații zecimale

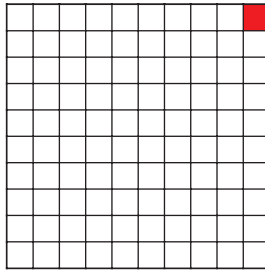
21.1 Scrierea și citirea fracțiilor zecimale

OBSERV



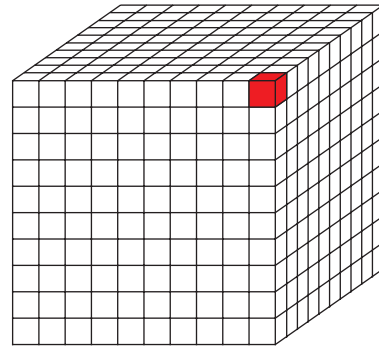
Un  reprezintă o zecime.

Notăm: $\frac{1}{10} = 0,1$



Un  reprezintă o sutime.

Notăm: $\frac{1}{100} = 0,01$



Un  reprezintă o miime

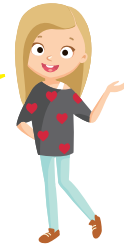
Notăm: $\frac{1}{1000} = 0,001$

Putem scrie astfel: $\frac{3}{10} = 0,3$; $\frac{5}{100} = 0,05$; $\frac{7}{1000} = 0,007$; $2\frac{6}{10} = 2,6$; $1\frac{43}{100} = 1,43$; $2\frac{53}{1000} = 2,053$.

ÎNȚELEG

Un număr scris cu virgulă se numește *fracție zecimală* sau *număr zecimal*.

Pentru a separa partea întregă a unui număr de partea fracționară folosim virgula.



Un număr zecimal este format dintr-o *parte întregă* și o *parte zecimală*, despărțite de virgulă. Cifrele scrise după virgulă se numesc *zecimale*.

Exemplu: Pentru numărul 5 342,768 avem:

- a) Cifrele părții zecimale reprezintă 7 zecimi, 6 sutimi și 8 miimi;
- b) 68 înseamnă 68 miimi, 76 înseamnă 76 de sutimi, iar 768 înseamnă 768 miimi (fracție subunitară).

Cum citim?

- Numărul 67,438 se citește 67 întregi și 438 miimi sau simplu 67 virgulă 438.
- Numărul 3,72 se citește 3 întregi și 72 sutimi sau simplu 3 virgulă 72.
- Numărul 0,02 se citește două sutimi sau simplu zero virgulă zero doi.
- Să comparăm numerele 72,6 și 72,60.

Rezolvare: $72,6 = 72\frac{10}{10} = 72\frac{60}{100}$.

Dacă după ultima zecimală adăugăm zerouri, obținem același număr zecimal.





De ce mai scriem aceste zerouri, dacă nu au valoare?

La scăderea numerelor zecimale vor trebui adăugate uneori zerouri.

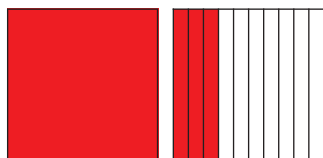


De ce ne complicăm și nu lucrăm doar cu numere fracționare?

Calculul cu numere zecimale este mai simplu, asemănându-se cu cel al numerelor naturale.



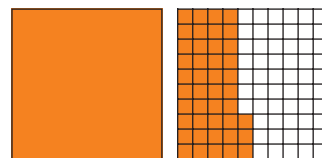
Reprezentări prin desen ale numerelor zecimale.



1,3



1,06



1,43

APLIC

- 1) Citiți numerele: **a)** 0,7; **b)** 0,06;
c) 2,73; **d)** 32,045.

Rezolvare: a) 7 zecimi sau zero virgulă 7;
b) 6 sutimi sau zero virgulă zero șase;
c) 2 întregi și 73 sutimi sau doi virgulă 73;
d) 32 întregi și 45 miimi sau 32 virgulă zero 45.

- 3) Ce semnifică pentru numărul 23,671 secvențele: **a)** 23; **b)** 67; **c)** 71; **d)** 36; **e)** 2 367?

Rezolvare: a) 23 întregi (partea întreagă);
b) 67 sutimi; c) 71 miimi;
d) 36 zecimi; e) 2 367 sutimi.

- 2) Scrieți numerele zecimale: **a)** 6 întregi și 3 zecimi; **b)** 8 întregi 6 sutimi 3 miimi; **c)** 4 întregi și 20 sutimi; **d)** 28 zecimi; **e)** 365 sutimi.

Rezolvare: a) 6,3; b) 8,063; c) 4,2;
d) $\frac{28}{10} = 2\frac{8}{10} = 2,8$; e) $\frac{365}{100} = 3\frac{65}{100} = 3,65$.

Ultima cifră a secvenței stabilește felul fracției.



EXERSEZ

- 1 Citiți următoarele numere zecimale: a) 4,5; b) 12,63; c) 14,08; d) 3,007; e) 6,405.

- 2 Scrieți următoarele numere zecimale.

- a) 8 întregi și 5 sutimi; b) 237 zecimi; c) 17 întregi 3 zecimi și 4 miimi;
d) 2 întregi și 4 miimi; e) 24 întregi și 50 miimi; f) 6 700 de miimi.

- 3 Analizați numărul 23,97 și apreciați cu „adevărat“ (A) sau „fals“ (F) afirmațiile:

- a) partea întreagă este 24; b) partea zecimală este 97;
c) partea zecimală este 970 miimi; d) partea întreagă este 2 397;
e) numărul conține 239 zecimi; f) partea zecimală este 97 sutimi.

4 Completați tabelul după model:

Numărul zecimal	Partea întreagă	Cifra sutelor	Cifra zecilor	Cifra zecimilor	Cifra sutimilor	Cifra miimilor	Numărul zecimilor	Numărul sutimilor
4 351,679	4 351	3	5	6	7	9	43 516	435 167
204,75								
346,028								
670,9								
5 462,706								

5 Ce semnifică pentru numărul zecimal 45,268 secvențele:

- a) 452; b) 45; c) 68; d) 268; e) 4 526; f) 45 268?

6 După modelul: $21 + \frac{3}{10} + \frac{5}{10} = 21,35$, scrieți următoarele sume sub formă de număr zecimal:

- a) $6 + \frac{5}{10}$; b) $16 + \frac{0}{10} + \frac{7}{100}$; c) $32 + \frac{4}{10} + \frac{5}{1\ 000}$; d) $45 + \frac{6}{100} + \frac{3}{10\ 000}$.

7 Scrieți sub formă de număr mixt și apoi fracție ordinară următoarele numere zecimale:

- a) 6,4; b) 5,42; c) 14,5;
d) 3,248; e) 4,063; f) 2,008.

8 Scrieți sub formă de fracție ordinară cu numitor o putere a lui 10 următoarele numere zecimale:

- a) 2,05; b) 0,07; c) 2,034;
d) 0,036; e) 16,042; f) 18,234.

9 Scrieți sub formă de număr mixt și apoi ca număr zecimal următoarele fracții:

- a) $\frac{23}{10}$; b) $\frac{451}{100}$; c) $\frac{245}{10}$; d) $\frac{3\ 467}{1\ 000}$; e) $\frac{2\ 653}{100}$; f) $\frac{6\ 725}{10}$.

10 După modelul: $376,251 = 376 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{1}{1\ 000}$, scrieți ca sumă următoarele numere zecimale:

- a) 27,56; b) 8,32; c) 0,476; d) 32,5967; e) 9,208.

11 Apreciați prin „adevărat“ (A) sau „fals“ (F) următoarele afirmații:

- a) $\frac{2}{10} = 0,20$; b) $\frac{1}{5} = 0,5$; c) $4,80 = \frac{48}{100}$;
d) $2,6 = 2,60$; e) $\frac{235}{100} = 23 + \frac{5}{100}$; f) $4,56 = 4 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100}$.

SUNT CAMPION

12 Amplificați convenabil pentru a obține la numitor 10, 100, 1 000 și apoi scrieți în formă zecimală fracțiile:

- a) $\frac{3}{25}$; b) $\frac{5}{2}$; c) $\frac{4}{5}$; d) $\frac{9}{20}$; e) $\frac{7}{125}$; f) $\frac{3}{40}$.

21.2 Scrierea în formă zecimală a fracțiilor ordinare care au numitorul o putere a lui 10

OBSERV



- Cum scriem fracția ordinară $\frac{345}{100}$ ca număr zecimal?

Scriem fracția ca o sumă de trei fracții cu același numitor.

Fracția subunitară rămasă va fi partea zecimală a numărului.

$$\frac{345}{100} = \frac{300}{100} + \frac{40}{100} + \frac{5}{100} = 3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} = 3,45$$



- Cum scriem fracția $\frac{72}{100}$ ca număr zecimal?

Partea întreagă este zero.

Fracția, fiind subunitară, reprezintă partea zecimală.

$$\frac{72}{100} = \frac{70}{100} + \frac{2}{100} = \frac{7}{10} + \frac{2}{100} = 0,72$$



ÎNȚELEG

O fracție ordinară care are numitorul 10^n se transformă în număr zecimal astfel: scriem numărul de la numărător și punem virgula după n cifre numărate de la dreapta la stânga numărului, iar dacă nu sunt cifre suficiente se completează la stânga cu zerouri după virgulă.

- 1) Scrieți în formă zecimală fracția $\frac{2\ 634}{10^3}$.

Rezolvare: Numărul trebuie să aibă 3 zecimale.

$$\frac{2\ 634}{10^3} = 2,634$$

- 2) Scrieți în formă zecimală fracția $\frac{432}{10^5}$.

Rezolvare: Numărul trebuie să aibă 5 zecimale.

$$\frac{432}{10^5} = 0,00432$$

EXERSEZ

- 1 Scrieți fracțiile sub formă zecimală:

a) $\frac{3}{10}$; b) $\frac{7}{10^2}$; c) $\frac{32}{10^2}$;
 d) $\frac{45}{10^3}$; e) $\frac{279}{10^4}$; f) $\frac{43\ 867}{10^4}$.

- 2 Scrieți fracțiile sub formă zecimală:

a) $\frac{5}{100}$; b) $\frac{8}{10}$; c) $\frac{234}{10}$;
 d) $\frac{6}{100}$; e) $\frac{35}{100}$; f) $\frac{839}{1\ 000}$.

- 3 Scrieți fracțiile sub formă zecimală:

a) $\frac{8}{10^3}$; b) $\frac{30}{100}$; c) $\frac{54}{10^2}$; d) $\frac{672}{10^3}$; e) $\frac{2\ 365}{10^4}$; f) $\frac{6\ 719}{10^5}$.

4 Amplificați cu cel mai mic număr pentru a obține la numitor o putere a lui 10:

- a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{1}{5}$;
d) $\frac{1}{25}$; e) $\frac{1}{40}$; f) $\frac{1}{125}$.

5 Scrieți sub formă zecimală următoarele fracții:

- a) $\frac{7}{2}$; b) $\frac{5}{4}$; c) $\frac{3}{5}$;
d) $\frac{8}{25}$; e) $\frac{93}{40}$; f) $\frac{682}{125}$.

6 Scrieți sub formă zecimală fracțiile: a) $\frac{9}{6}$; b) $\frac{21}{12}$; c) $\frac{14}{35}$; d) $\frac{9}{75}$; e) $\frac{27}{48}$.

7 Completați partea zecimală:

- a) $\frac{6}{10} = 0, \square$; b) $\frac{3}{2} = 1, \square$; c) $\frac{9}{5} = 1, \square$; d) $\frac{13}{4} = 3, \square$; e) $\frac{21}{15} = 1, \square$; f) $\frac{5}{20} = 0, \square$.

21.3 Transformarea unei fracții zecimale în fracție ordinară

OBSERV



Cum se exprimă 7,21 în fracție ordinară?

Folosim regula de citire: 7,21 înseamnă 7 întregi și 21 de sutimi.

Scriem: $7,21 = 7\frac{21}{100} = \frac{721}{100}$



ÎNȚELEG

Un număr zecimal cu un număr finit de zecimale se transformă în fracție ordinară astfel: scriem la numărător numărul natural obținut după eliminarea virgulei, iar la numitor 10^n , unde n este numărul de zecimale al numărului inițial.

APLIC

Transformați în fracții ordinare ireductibile următoarele numerele zecimale: a) 0,405; b) 43,8.

Rezolvare: a) $0,405 = \frac{405}{10^3} = \frac{405}{1000} \stackrel{(5)}{=} \frac{81}{200}$. b) $43,8 = \frac{438}{10} \stackrel{(2)}{=} \frac{219}{5}$.

EXERSEZ

1 Exprimați prin fracții ordinare:

- a) 12,15; b) 2,401; c) 6,004;
d) 18,205; e) 24,03; f) 192,5.

2 Exprimați prin fracții ordinare ireductibile:

- a) 3,24; b) 7,2; c) 8,32;
d) 7,04; e) 0,125; f) 6,352.

3 Exprimați prin fracții ordinare, după model:

$$4,53 = 4 + \frac{5}{10} + \frac{3}{100} = 4 + \frac{50}{100} + \frac{3}{100} = 4\frac{53}{100} = \frac{453}{100}$$

- a) 2,06; b) 7,35; c) 9,48; d) 12,405; e) 0,243; f) 5,2347.

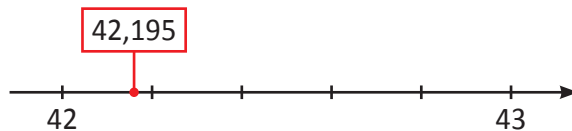
22. Aproximări

22.1 Aproximarea prin lipsă sau adaos

OBSERV

Radu spune că proba sportivă de maraton se desfășoară pe distanța de 42 km, iar Sorin crede că sunt 43 km. În realitate, lungimea traseului este de 42,195 km. Cele două păreri reprezintă două aproximări ale distanței. Care dintre aproximări este mai bună?

Rezolvare:



42,195 este mai apropiat de 42 decât de 43.



- Fiind mai mic, numărul 42 este o *aproximare prin lipsă* a numărului 42,195.
Eroarea aproximării este diferența dintre cele două numere.
 $E = 42,195 - 42 = 0,195$.
- Fiind mai mare, numărul 43 este o *aproximare prin adaos* a numărului 42,195.
 $E = 43 - 42,195 = 0,805$.

Răspuns: Radu a făcut o aproximare mai bună.

ÎNȚELEG

Aproximarea „până la o unitate” a unui număr zecimal cu cel puțin o zecimală

Aproximarea prin lipsă	Aproximarea prin adaos
partea întreagă a numărului zecimal	aproximarea prin lipsă mărită cu o unitate
$26 < 26,34 < 27$; $2 < 2,4 < 3$; $1056 < 1056,409 < 1057$	

Aproximarea „până la o zecime” a unui număr zecimal cu cel puțin două zecimale

Aproximarea prin lipsă	Aproximarea prin adaos
numărul format din partea întreagă și prima zecimală	aproximarea prin lipsă mărită cu o zecime $\left(\frac{1}{10}\right)$
$38,4 < 38,421 < 38,5$; $2,4 < 2,46 < 2,5$; $1086,7 < 1086,739 < 1086,8$	

Aproximarea „până la o sutime” a unui număr zecimal cu cel puțin trei zecimale (ultima nenulă)

Aproximarea prin lipsă	Aproximarea prin adaos
numărul format din partea întreagă și primele două zecimale	aproximarea prin lipsă mărită cu o sutime $\left(\frac{1}{100}\right)$
$49,3 < 49,306 < 49,31$; $6,83 < 6,835 < 6,84$; $2018,37 < 2018,378 < 2018,38$	

APLIC

1) Aproximați, prin lipsă sau adaos până la o unitate, numerele: **a)** 26,3; **b)** 34,05.

Rezolvare:

- a) $26,3 \approx 26$ (aproximare prin lipsă);
 $26,3 \approx 27$ (aproximare prin adaos);
 b) $34,05 \approx 34$ (aproximare prin lipsă);
 $34,05 \approx 35$ (aproximare prin adaos).

2) Aproximați, prin lipsă sau adaos până la o zecime, numerele: **a)** 46,57; **b)** 32,048.

Rezolvare:

- a) $46,57 \approx 46,5$ (aproximare prin lipsă);
 $46,57 \approx 46,6$ (aproximare prin adaos);
 b) $32,048 \approx 32$ (aproximare prin lipsă);
 $32,048 \approx 32,1$ (aproximare prin adaos).

3) Aproximați, prin lipsă sau adaos până la o sutime, numerele: **a)** 49,261; **b)** 37,406.

Rezolvare: a) $49,261 \approx 49,26$ (aproximare prin lipsă); b) $37,406 \approx 37,4$ (aproximare prin lipsă);
 $49,261 \approx 49,27$ (aproximare prin adaos); $37,406 \approx 37,41$ (aproximare prin adaos).

EXERSEZ

1 Aproximați, prin adaos și lipsă până la o unitate, numerele:

- a) 34,65; b) 28,09; c) 49,6; d) 83,04.

2 Aproximați, prin lipsă și adaos până la o zecime, numerele:

- a) 16,352; b) 21,463; c) 5,03; d) 16,92.

3 Aproximați, prin lipsă sau adaos până la sutime, numerele:

- a) 2,341; b) 5,206; c) 4,391; d) 5,004.

4 Aproximați numărul 37,865 prin lipsă sau adaos până la:

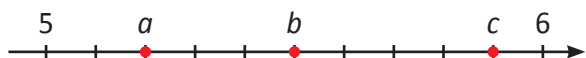
- a) o unitate; b) o zecime; c) o sutime.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

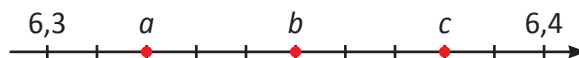
5 Completați tabelul cu aproximări.

Numărul zecimal	aproximare prin lipsă până la			aproximare prin adaos până la		
	o unitate	o zecime	o sutime	o unitate	o zecime	o sutime
12,4356						
4,056						
16,307						
6,005						
0,398						

6 a) Determinați numerele a , b , c .
 b) Aproximați, prin lipsă până o la unitate, numerele găsite a , b și c .
 c) Aproximați, prin adaos până la o unitate, numerele găsite a , b și c .



7 a) Determinați numerele a , b , c .
 b) Aproximați, prin lipsă și adaos până la o unitate, numerele a , b și c .
 c) Aproximați, prin lipsă și adaos până la o zecime, numerele a , b și c .



- 8 Pentru care numere cu o zecimală numărul 48 este aproximarea prin lipsă până la o unitate?
- 9 Pentru care numere cu două zecimale 12,4 este aproximarea prin adaos până la o zecime?
- 10 Aproximați prin lipsă sau adaos până la o miime numerele:
 a) 3,2056; b) 4,6008; c) 7,5093; d) 8,0005; e) 2,0356; f) 5,2461.

22.2 Rotunjiri

ÎNȚELEG

Aproximarea prin lipsă sau adaos cea mai apropiată de numărul aproximat se numește *rotunjire*. Dacă cele două aproximări se află la aceeași distanță față de numărul aproximat, aproximarea prin adaos va fi socotită rotunjire.

APLIC

Rotunjirea până la unitate a lui 4,3 este 4.
 Rotunjirea până la unitate a lui 4,7 este 5.
 Rotunjirea până la o zecime a lui 7,36 este 7,4.
 Rotunjirea până la o zecime a lui 7,32 este 7,3.
 Rotunjirea până la o sutime a lui 3,261 este 3,26.
 Rotunjirea până la o sutime a lui 3,268 este 3,27.

EXERSEZ

- 1 Alegeți rotunjirea până la zecime a numărului 23,645: a) 24; b) 23,64; c) 23,6; d) 23,7.
- 2 Alegeți rotunjirea până la o sutime a numărului 47,503: a) 47,6; b) 48; c) 47,61; d) 47,5.
- 3 Aflați rotunjirea până la cea mai apropiată zecime (respectiv sutime) a numerelor:
 a) 5,431; b) 4,062; c) 7,301; d) 8,265.
- 4 Rotunjiți numărul 8 235,674 până la cea mai apropiată:
 a) sutime; b) unitate; c) sută; d) zecime; e) mie.
- 5 Ce numere cu o zecimală au rotunjirea 24?

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

- 6 Copiați și completați tabelul:

Numere	12,931	34,253	56,785	62,093	49,705
Rotunjire până la unitate					
Rotunjire până la zecime					
Rotunjire până la sutime					

- 7 Numerele din rândul de sus sunt rotunjirile până la zecime ale numerelor din rândul de jos. Stabiliți corespondența.

7 7,1 7,2 7,3 7,4 7,5 7,6 7,7 7,8 7,9

7,28 7,03 7,13 7,15 7,48 7,35 7,68 7,87 7,56 7,75

22.3 Compararea și ordonarea fracțiilor zecimale

OBSERV



Comparați numerele: a) 324,62 și 325,89; b) 645,238 și 645,271.

În primul caz
părțile întregi
sunt diferite.
Din $324 < 325$
rezultă că:
 $324,62 < 325,89$.

324,62 **645,238**

325,89 **645,271**

În al doilea caz
părțile întregi
sunt egale,
iar $\frac{238}{1000} < \frac{271}{1000}$, deci:
 $645,238 < 645,271$.



ÎNȚELEG

La compararea a două numere zecimale procedăm astfel:

1. Dacă numerele zecimale au părțile întregi diferite, atunci este mai mare numărul cu partea întreagă mai mare.

2. Dacă numerele zecimale au părțile întregi egale, atunci este mai mare numărul care are prima dintre zecimale de același ordin mai mare.

APLIC

Comparați numerele: a) 423,42 și 86,23; b) 524,63 și 574,28.

Rezolvare: a) $423,42 > 86,23$ (deoarece $423 > 86$);

b) primele cifre diferite de același ordin sunt $2 < 7$ și deci $524,63 < 574,28$.

EXERSEZ

1 Comparați numerele din fiecare pereche, folosind semnele „>”, „<” sau „=”: Precizați cifrele de același ordin care determină relația.

- a) 72,3 și 62,3; b) 34,16 și 35,16;
c) 27,35 și 27,45; d) 19,48 și 19,49.

3 Încadrați fiecare număr zecimal între două numere consecutive:

- a) 4,05; b) 0,71; c) 42,9; d) 12,5.

5 Încadrați fiecare număr zecimal între două numere care diferă printr-o sutime:

- a) 46,051; b) 2,346; c) 9,304; d) 6,495; e) 0,008; f) 5,999.

6 Scrieți în ordine crescătoare numerele:

- 6,2; 3,24; 0,9; 3,05; 6,12; 6,02; 0,99; 3,4.

7 Scrieți în ordine descrescătoare numerele:

- 4,3; 4,03; 4,13; 4,20; 4,31; 4,07; 4,5; 4,09.

2 În dreptul fiecărei afirmații scrieți A (adevărat) sau F (fals):

- a) $4,35 = 4,350$; b) $50,3 = 5,03$;
c) $14,5 < 14,05$; d) $2,54 < 2,504$.

4 Încadrați fiecare număr zecimal între două aproximări de ordinul zecimilor:

- a) 3,41; b) 42,36; c) 19,08; d) 24,93.

SUNT CAMPION

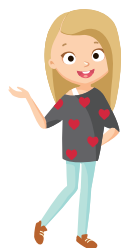
8 Determinați cifra x știind că:

- a) $2,48 < 2,4x$; b) $8x,7 < 83,26$;
c) $7x3 \geq 762,5$; d) $4,36 > 4,x5$.

22.4 Reprezentarea pe axa numerelor a unor fracții zecimale

OBSERV

- Cum procedăm pentru a reprezenta pe axă numărul 4,7?

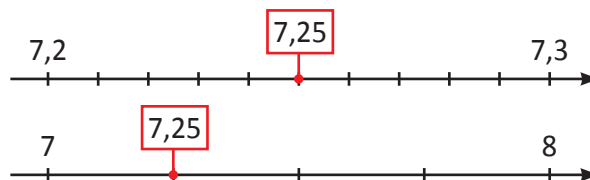


Numărul 4,7 este cuprins între numerele consecutive 4 și 5.

Împărțim în zece diviziuni egale segmentul cuprins între reprezentările numerelor 4 și 5.



- Cum procedăm pentru a reprezenta pe axă numărul 7,25?



Împărțim în zece diviziuni egale segmentul cuprins între reprezentările numerelor 7,2 și 7,3.

Putem împărți în patru părți egale segmentul cuprins între reprezentările numerelor 7 și 8.



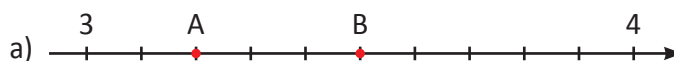
ÎNȚELEG

Pe axa numerelor, împărțim în 10 diviziuni egale segmentul cuprins între:

a) reprezentările a două numere naturale consecutive, pentru a obține diviziuni ce reprezintă fiecare o zecime;

b) reprezentările a două numere consecutive care au o singură zecimală, pentru a obține diviziuni ce reprezintă fiecare o sutime ș.a.m.d.

APLIC



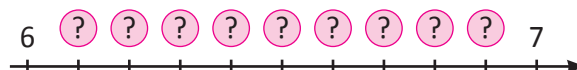
Punctului A îi corespunde numărul 3,2, iar punctului B îi corespunde numărul 3,5.



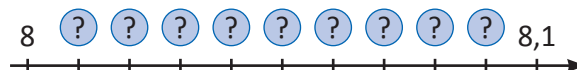
Punctului A îi corespunde numărul 6,32, iar punctului B îi corespunde numărul 6,37.

EXERSEZ

- 1 Precizați numerele din dreptul fiecărei diviziuni:



- 2 Precizați numerele din dreptul fiecărei diviziuni:

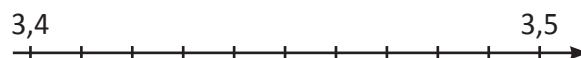


- 3 Reprezentați pe axe separate numerele:

- 3; 3,25; 3,5; 3,75; 4.
- 1; 1,25; 1,5; 2; 2,5; 3.
- 3,2; 3,4; 3,5; 3,7; 3,8.
- 5,21; 5,23; 5,25; 5,27; 5,29.

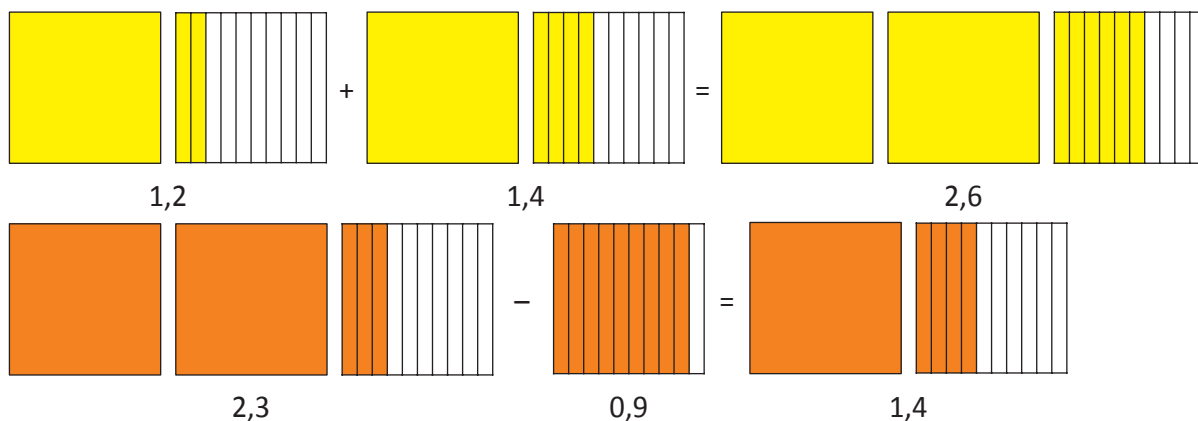
- 4 Pe axa de mai jos reprezentați numerele:

3,41; 3,43; 3,46; 3,47; 3,48.



23. Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale

OBSERV



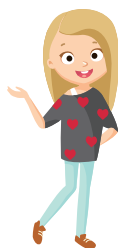
- Cum se calculează $7,46 + 6,3$?



$$7,46 + 6,3 = 7,46 + 6,30 =$$

$$= \frac{746}{100} + \frac{630}{100} = \frac{1376}{100} = 13,76$$

Transformăm numerele zecimale în fracții ordinare. Scriem apoi rezultatul sub formă zecimală.



Putem să le adunăm așezându-le unele sub altele?

$$\begin{array}{r} 7,46 + \\ 6,30 \\ \hline 13,76 \end{array}$$

Este posibil numai dacă ținem cont de regulile de mai jos.



ÎNȚELEG

Reguli pentru adunarea și scăderea numerelor zecimale:

1. Dacă numerele nu au același număr de zecimale, atunci la numărul cu mai puține zecimale adăugăm zerouri după ultima cifră.

2. Se așază numerele zecimale unele sub altele, astfel încât „virgula să fie sub virgulă”, „zecimi sub zecimi”, „sutimi sub sutimi” ș.a.m.d.

3. Se adună sau se scad după regula de adunare sau scădere a numerelor naturale, iar la rezultat virgula se pune sub virgulele termenilor.

APLIC

- 1) Calculați: a) $361,25 + 73,4$; b) $12 + 15,634$; c) $487,64 - 25,8$; d) $53 - 9,35$.

Rezolvare: a)
$$\begin{array}{r} 361,25 + \\ 73,40 \\ \hline 434,65 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 12,000 + \\ 15,634 \\ \hline 27,634 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 487,64 - \\ 25,80 \\ \hline 461,84 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} 53,00 - \\ 9,35 \\ \hline 43,65 \end{array}$$

2) Estimați până la o unitate și până la o zecime:

a) $S = 3,48 + 6,364 + 8,92$

b) $D = 7,89 - 5,23$

Rezolvare: a) $S \approx 3 + 6 + 9 = 18$ (estimare la unitate)

$S \approx 3,5 + 6,4 + 8,9 = 18,8$ (estimare la zecime)

b) $D \approx 8 - 5 = 3$ (estimare la unitate)

$D \approx 7,9 - 5,2 = 2,7$ (estimare la zecime)

Estimarea se face rotunjind numerele.



Proprietățile adunării și scăderii

Orice numere zecimale a, b, c verifică:

1. *Comutativitatea:* $a + b = b + a$;

2. *Asociativitatea:* $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$;

3. *Element neutru:* $a + 0 = 0 + a = a$.

Comparați numerele:

a) $x = 2,6 + (4,3 + 5,4)$ și $y = (2,6 + 4,3) + 5,4$

b) $x = 3,2 + 2,5 + 1,8$ și $y = 3,2 + 1,8 + 2,5$

Rezolvare:

a) $x = 2,6 + 9,7 = 12,3$ iar $y = 6,9 + 5,4 = 12,3$

b) $x = 5,7 + 1,8 = 7,5$ iar $y = 5 + 2,5 = 7,5$

Răspuns: În ambele cazuri, $x = y$.

Orice numere zecimale a, b, c pentru care scăderile sunt posibile verifică:

1. $a + b - c = a + (b - c)$

2. $a - b - c = a - (b + c)$

3. $a - b - c = a - c - b$

Comparați numerele:

a) $x = 3,2 + 4,5 - 2,6$ și $y = 3,2 = (4,5 - 2,6)$;

b) $x = 7,5 - 2,3 - 1,7$ și $y = 7,5 - (2,3 + 1,7)$;

c) $x = 8,6 - 3,5 - 2,6$ și $y = 8,6 - 2,6 - 3,5$.

Rezolvare: a) $x = 7,7 - 2,6 = 5,1$ iar $y = 3,2 + 1,9 = 5,1$;

b) $x = 5,2 - 1,7 = 3,5$ iar $y = 7,5 - 4 = 3,5$;

c) $x = 5,1 - 2,6 = 2,5$ iar $y = 6 - 3,5 = 2,5$.

Răspuns: În toate cele trei cazuri $x = y$.

EXERSEZ

1 Calculați în două moduri:

a) $2,3 + 1,5$; b) $3,4 + 2,3$; c) $1,8 + 4,1$; d) $5,6 + 2,3$; e) $17,4 + 8,5$; f) $16,2 + 7,5$.

2 Calculați în două moduri:

a) $12,3 + 15,97$; b) $24,56 + 7,6$; c) $26 + 145,8$; d) $36,47 + 0,8$; e) $28,3 + 6,029$; f) $94,16 + 3,208$.

3 Calculați în două moduri:

a) $6,7 - 2,3$; b) $8,9 - 3,4$; c) $9,7 - 1,4$; d) $7,8 - 4,6$; e) $12,4 - 3,6$; f) $7 - 2,48$.

4 Calculați în două moduri:

a) $32 - 1,298$; b) $58,6 - 7,375$; c) $63,07 - 29,4$; d) $16,5 - 9,163$; e) $12,1 - 9,28$; f) $62,7 - 29,06$.

5 Mama Corinei a făcut cumpărături de la trei magazine în valoare de 123,25 lei, 71,5 lei, respectiv 107,35 lei. Ce sumă a cheltuit mama Corinei?

6 Distanța de la București la Pitești este de 109,6 km, iar de la Pitești la Brașov sunt 130,9 km. Care este pe această rută distanța de la București la Brașov?

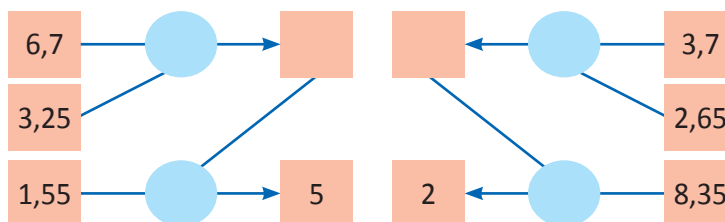
7 Ce lungime de cablu electric trebuie să cumpere Radu pentru a confecționa trei prelungitoare de 3,75 m, 4,3 m, respectiv 2,5 m?

8 În urmă cu câțiva ani, Andrei a sădit în grădina casei un brad înalt de 1,35 m. Acum bradul este mai înalt cu 1,96 m. Ce înălțime are bradul?

9 Un camion încărcat cu lemne cântărește 7,25 tone. Știind că lemnele cântăresc 3,9 tone, aflați cât cântărește camionul gol.

10 Prin măcinare, din 102 kg de grâu s-au obținut 65,8 kg de făină, iar restul tărațe. Câte kg de tărațe s-au obținut?

11 Completați pătratele cu numere zecimale și cerculețele cu semnul „+” sau „-”.



12 Estimați până la cel mai apropiat întreg sumele:

- a) $7,42 + 3,5 + 4,63$; b) $5,62 + 2,4 + 1,35$; c) $6,4 + 2,81 + 3,2 + 7,5$; d) $9,25 + 3,7 + 6,09 + 1,5$.

13 Estimați până la cel mai apropiat întreg diferențele.

- a) $7,21 - 2,85$; b) $12,51 - 4,5$; c) $16,8 - 8,3$; d) $9,08 - 3,25$.

14 Folosind proprietățile adunării, calculați:

- a) $3,6 + 12,5 + 2,4$; b) $6,1 + 13,4 + 4,9$; c) $7,2 + 8,6 + 5,8$; d) $8,3 + 14,9 + 9,7$;
e) $6,42 + 5,49 + 3,58$; f) $5,28 + 13,05 + 9,72$.

15 Calculați mai simplu sumele:

- a) $6,3 + 5,6 + 4,7 + 3,4$; b) $9,2 + 5,8 + 13,2 + 1,8$;
c) $8,6 + 12,5 + 3,5 + 7,4$; d) $4,23 + 5,48 + 6,77 = 9,52$.

16 Folosind proprietățile scăderii, calculați:

- a) $8,7 + 23,15 - 2,7$; b) $42,5 - 14,7 + 4,2$; c) $6,12 - 2,36 + 9,24$; d) $16,8 - 3,16 - 2,84$;
e) $12,9 - 4,6 - 3,4$; f) $6,38 + 12,86 - 4,38$.

17 Andrei și Dan au economisit împreună 214,3 euro pentru a cumpăra un cadou. Andrei a economisit cu 16,7 euro mai puțin decât Andrei. Câți euro a economisit fiecare?

SUNT CAMPION

18 Calculați în două moduri:

- a) $1,1 + 2,2 + 3,3 + \dots + 9,9$
b) $0,4 + 0,5 + 0,6 + \dots + 8,8 + 8,9 + 9$

19 Aflați cifrele a, b, c din fiecare egalitate.

- a) $\overline{3,ab} + \overline{c,53} = 8,4$;
b) $\overline{a,45b} - \overline{1,c35} = 1,616$.

24. Înmulțirea fracțiilor zecimale

24.1 Produsul fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

A. Înmulțirea unui număr zecimal cu o putere a lui 10

OBSERV



• La confecționarea unui costum de haine se folosesc 2,65 m de stofă. Câți metri de stofă sunt necesari pentru confecționarea a 10 costume?

După înmulțirea cu 10, au rămas aceleași cifre ale numărului.

Rezolvare: Lungimea stofei este $10 \cdot 2,65$ m.

$$10 \cdot 2,65 = 10 \cdot \frac{265}{100} = \frac{2650}{100} = 26,5$$

Răspuns: Sunt necesari 26,5 m de stofă.

S-a schimbat însă poziția virgulei.



ÎNȚELEG

Produsul dintre un număr zecimal și 10^n , n număr natural nenul, se efectuează mutând virgula spre dreapta peste un număr de cifre egal cu exponentul n .

Exemple: $3,65 \cdot 10 = 36,5$

$3,65 \cdot 100 = 365$

$3,65 \cdot 1\,000 = 3,650 \cdot 1\,000 = 3\,650$

$0,075 \cdot 100 = 7,5$



Dacă nu sunt suficiente cifre la partea zecimală, completăm cu zerouri până la n zecimale.

$$2,6 \cdot 10^3 = 2,600 \cdot 10^3 = 2\,600$$

Primele zerouri de la începutul părții întregi formate după mutarea virgulei, nu se mai scriu.

$$0,027 \cdot 100 = 2,7$$



APLIC

- 1) Efectuați: **a)** $5,7 \cdot 10$; **b)** $2,32 \cdot 10$; **c)** $0,05 \cdot 10$; **d)** $3,96 \cdot 100$;
 e) $4,765 \cdot 100$; **f)** $0,007 \cdot 100$; **g)** $0,56 \cdot 1\,000$.

Rezolvare :

a) Scriem 57 și nu mai punem virgulă.

$$5,7 \cdot 10 = 57$$

b) Scriem 232 și punem virgula după 3.

$$2,32 \cdot 10 = 23,2$$

c) Numărul fără virgulă este 005.

Punem virgula între 0 și 5 și nu mai scriem primul zero.

$$0,05 \cdot 10 = 0,5$$

d) Scriem 396 și nu mai punem virgulă.

$$3,96 \cdot 100 = 396$$

e) Scriem 4 765 și punem virgula după 6.

$$4,765 \cdot 100 = 476,5$$

f) Mutăm virgula între 0 și 7 și păstrăm la partea întregă un singur zero.

$$0,007 \cdot 100 = 0,7$$

g) Completăm cu un zero 0,560.

$$0,56 \cdot 1\,000 = 0,560 \cdot 1\,000 = 560$$

Scrierea unui număr ca produs de număr zecimal și o putere a lui 10

2) Scrieți numerele 724 și 5 347 ca produse între un număr zecimal și o putere a lui 10.

Rezolvare: $724 = 72,4 \cdot 10,$
 $724 = 7,24 \cdot 10^2,$
 $724 = 0,724 \cdot 10^3,$
 $724 = 0,0724 \cdot 10^4 \dots$

$5\ 347 = 534,7 \cdot 10,$
 $5\ 347 = 53,47 \cdot 10^2,$
 $5\ 347 = 5,347 \cdot 10^3,$
 $5\ 347 = 0,5347 \cdot 10^4 \dots$

EXERSEZ

1 Efectuați:

a) $8,2 \cdot 10;$ b) $4,34 \cdot 10;$ c) $0,07 \cdot 10;$
d) $0,036 \cdot 10;$ e) $0,56 \cdot 10;$ f) $5,4 \cdot 10.$

2 Efectuați:

a) $2,72 \cdot 100;$ b) $3,627 \cdot 100;$ c) $0,002 \cdot 10^2;$
d) $0,0003 \cdot 10^2;$ e) $4,91 \cdot 10^2;$ f) $5,803 \cdot 10^2.$

3 Efectuați:

a) $3,45 \cdot 10^3;$ b) $8,067 \cdot 10^3;$ c) $0,09 \cdot 10^3;$ d) $0,0032 \cdot 10^3;$ e) $2,8 \cdot 10^3;$ f) $0,005 \cdot 10^3.$

B. Înmulțirea unui număr zecimal cu un număr natural

OBSERV

• O trusă școlară costă 12,75 lei, iar un ghiozdan costă de 7 ori mai mult. Care este prețul unui ghiozdan?

Rezolvare:

$$7 \cdot 12,75 = 7 \cdot \frac{1275}{100} = \frac{8925}{100} = 89,25$$

Răspuns: Prețul unui ghiozdan este 89,25 lei.



Înmulțirea fără virgulă este:

$$\begin{array}{r} 1\ 275 \times \\ 7 \\ \hline 8\ 925 \end{array}$$

Acest rezultat are aceleași cifre ca și 89,25 (prețul ghiozdanului).



ÎNȚELEG

Produsul dintre un număr zecimal și un număr natural se calculează astfel:

I. Înmulțim numerele ca numere naturale (fără virgulă).

II. Scriem virgula la rezultat astfel încât rezultatul să aibă același număr de zecimale ca factorul dat.

Exemple:

$$\begin{array}{r} 13,85 \times \\ \quad \downarrow 9 \\ \hline 124,65 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21,35 \times \\ \quad \downarrow 14 \\ \hline 289,90 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,43 \times \\ \quad \downarrow 5 \\ \hline 7,16 \end{array}$$

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

Asociați fiecărei înmulțiri răspunsul corect.

$2,6 \cdot 7$

$5 \cdot 4,06$

$3,25 \cdot 9$

$6,705 \cdot 8$

$3,4 \cdot 12$

$6,9 \cdot 27$

$32 \cdot 4,365$

$0,028 \cdot 35$

20,3

53,64

40,8

29,25

18,2

139,68

0,98

186,3

C. Înmulțirea a două numere zecimale

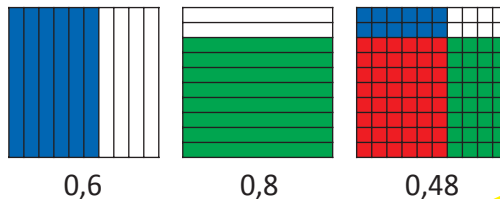
OBSERV

Calculați că $0,6 \cdot 0,8$.



Putem transforma numerele în fracții ordinare:

$$0,6 \cdot 0,8 = \frac{6}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{48}{100} = 0,48.$$



0,6

0,8

0,48

Desenele ilustrează foarte bine această înmulțire.



ÎNȚELEG

Înțeleg că la înmulțirea $0,7 \cdot 0,25$ se obțin miimi.

Da, deoarece înmulțirea numitorilor $10^1 \cdot 10^2 = 10^3$, numitorul fracției fiind astfel 1 000.



Produsul dintre două numere zecimale având m respectiv n zecimale se calculează astfel:

I. Se înmulțesc numerele ca numere naturale (fără virgulă).

II. Se scrie virgula la rezultat astfel încât rezultatul să aibă $(m + n)$ zecimale.

Exemple:

$$\begin{array}{r} 21,57 \times \\ \quad 2,4 \\ \hline 8628 \\ 4314 \\ \hline 51,768 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32,04 \times \\ \quad 3,23 \\ \hline 9612 \\ 6408 \\ \hline 9612 \\ \hline 103,4892 \end{array}$$



EXERSEZ

1 Calculați:

- a) $2,3 \cdot 4,6$; b) $2,8 \cdot 5,3$; c) $0,9 \cdot 6,7$; d) $0,3 \cdot 0,8$;
e) $38,2 \cdot 0,5$; f) $27,4 \cdot 8,7$; g) $203,5 \cdot 38,4$; h) $0,3051 \cdot 5,8$.

2 Calculați:

- a) $20,57 \cdot 3,4$; b) $32,06 \cdot 4,25$;
c) $0,35 \cdot 0,08$; d) $3,75 \cdot 2,005$.

D. Estimarea produsului *E

OBSERV

O societate pomicolă folosește la stropirea pomilor o soluție obținută prin dizolvarea a 0,37 g de substanță într-un litru de apă. Câtă substanță este necesară pentru 9 litri de apă?

Rezolvare: Pentru estimare, rotunjim numerele astfel:

$$0,37 \approx 0,4 \text{ (rotunjire până la cea mai apropiată zecime);}$$

$$9 \approx 10 \text{ (rotunjire la cea mai apropiată zece).}$$

Răspuns estimat: aproximativ 4 g de substanță;

Răspunsul exact obținut prin calcul: $10 \cdot 0,37 = 3,7$, rezultat apropiat de estimare.

EXERSEZ

- Estimați până la cel mai apropiat întreg și comparați cu rezultatul prin calcul:
 - $3,8 \cdot 2,1$;
 - $0,8 \cdot 4,1$;
 - $11 \cdot 3,2$;
 - $4,3 \cdot 19$.
- Calculați mai simplu.
 - $0,6 \cdot 3,4 \cdot 5$;
 - $0,5 \cdot 4,6 \cdot 0,2$;
 - $5 \cdot 23,7 \cdot 0,2$;
 - $20 \cdot 24,6 \cdot 5$.
- Încadrați între două numere naturale produsele:
 - $6,19 \cdot 8,7$;
 - $7,32 \cdot 9,8$;
 - $4,09 \cdot 8,109$;
 - $5,81 \cdot 7,15$.
- Radu a cumpărat 9 CD-uri, fiecare având prețul 18,25 lei. Estimați prețul plătit și comparați cu rezultatul real.
- Scrieți numărul 635 ca un produs între un număr zecimal și: a) 10; b) 10^2 ; c) 10^3 ; d) 10^4 .
- Familia lui Ștefan pleacă într-o minivacanță de la București la Bran pe un traseu de 173,8 km. Știind că mașina lor consumă 6,4 litri la 100 km, spuneți dacă 22 litri sunt suficienți pentru acest drum (dus-întors)?
- Scrieți numărul zecimal 0,027 ca produs de trei numere zecimale și ca putere.
- O școală are 16 săli de clasă și dotează fiecare clasă cu un mijloc audio care costă 46,8 euro. Care este prețul total al achiziției dacă firma oferă o reducere de 3,2 euro pentru fiecare mijloc vândut?

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

- Copiați și completați tabelul.

a	b	c	$a \cdot b$	$b \cdot c$	$a \cdot c$	$a \cdot (b + c)$	$b \cdot (a + c)$	$c \cdot (a + b)$
2,5	0,2	0,3						
0,6	2,4				0,12			
1,5		0,4	0,3					
0,5	0,4			0,2				

24.2 Puteri cu exponent număr natural

ÎMI AMINTESC!

• Puterea a n -a a unui număr natural oarecare a este produsul a n factori egali cu a .

• $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$; $a^1 = a$; $a^0 = 1$, pentru orice $a \neq 0$.

• Scrierea 0^0 nu are sens.

Puterea doi la a opta

$$2^8 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{8 \text{ factori}}$$

↑ bază

ÎNȚELEG



Puterea a n -a a unui număr zecimal nenul este **produsul a n factori** egali cu numărul care este bază.

Regulile de calcul cu puteri de numere zecimale sunt aceleași ca și pentru puteri de numere naturale:

Exemple: $(0,3)^4 = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,0081$

$$(2,1)^3 = 2,1 \cdot 2,1 \cdot 2,1 = 9,261$$

$$(3,4)^0 = 1$$

$$(2,5)^1 = 2,5$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n};$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m;$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0.$$

EXERSEZ

1 Calculați puterea a doua a numerelor:
a) 0,5; b) 1,1; c) 1,2; d) 1,3; e) 1,4; f) 1,5.

3 Scrieți sub forma unei puteri.
a) $(2,3)^2 \cdot (2,3)^3$; b) $(1,5)^4 \cdot (1,5)^6$;
c) $(0,4)^5 \cdot (0,4)^6$; d) $(0,9)^3 \cdot (0,9)^4$.

5 Scrieți sub forma unei singure puteri.
a) $[(0,3)^2]^3$; b) $[(0,5)^3]^2$; c) $[(0,2)^2]^6$;
d) $[(0,4)^2]^3$; e) $[(0,8)^4]^5$.

7 Aflați numărul zecimal egal cu:
a) $[(0,3)^2]^3$; b) $[(0,5)^3]^2$; c) $[(0,2)^2]^4$; d) $[(0,4)^2]^3$; e) $[(0,6)^3]^2$.

2 Calculați cubul numerelor:
a) 0,2; b) 0,4; c) 0,5; d) 0,6; e) 0,7; f) 0,8.

4 Scrieți sub forma unei puteri și calculați.
a) $(1,4)^5 : (1,4)^3$; b) $(2,7)^7 : (2,7)^5$;
c) $(0,9)^5 : (0,9)^2$; d) $(0,4)^8 : (0,4)^5$.

6 Scrieți sub forma unei singure puteri.
a) $(2,3)^4 \cdot (1,5)^4$; b) $(0,6)^5 \cdot (2,5)^5$;
c) $(1,8)^6 \cdot (0,5)^6$; d) $(2,4)^7 \cdot (1,5)^7$.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

8 Completați tabelul, scriind numerele date sub formă de putere cu exponentul 3:

$(1,2)^9$	$(0,8)^{15}$	$(1,7)^6$	$(2,4)^{18}$	$(0,5)^{12}$	$(1,5)^6$

9 Fără a calcula, stabiliți afirmațiile adevărate și afirmațiile false.

a) $(0,01)^4 = 0,0001$; b) $(0,5)^2 = 0,25$; c) $(0,3)^3 = 0,9$; d) $(0,5)^3 = 1,25$; e) $(2,5)^2 = 6,25$; f) $(0,5)^3 = 0,125$.

10 Înlocuiți căsuțele goale cu un număr zecimal astfel încât relațiile să fie adevărate.

a) $(0,3)^4 \cdot (0,5)^4 = \square^4$; b) $(0,6)^3 \cdot (0,8)^3 = \square^3$;

c) $(0,5)^7 \cdot (0,5)^7 = \square^7$; d) $(1,4)^5 \cdot (1,5)^5 = \square^5$;

e) $(2,5)^6 \cdot (1,6)^6 = \square^6$; f) $(1,2)^8 \cdot (1,3)^8 = \square^8$.

11 Înlocuiți căsuțele libere cu un număr zecimal astfel încât relațiile să fie corecte.

a) $(0,3)^4 \cdot (0,2)^4 = \square^2$; b) $(0,4)^6 \cdot (0,2) = \square^2$;

c) $(0,3)^9 \cdot (0,2)^9 = \square^3$; d) $(0,6)^8 \cdot (0,3)^8 = \square^4$;

e) $(1,2)^{10} \cdot (1,5)^{10} = \square^5$; f) $(1,4)^{12} \cdot (1,5)^{12} = \square^6$.

25. Împărțirea

25.1 Împărțirea a două numere naturale cu rezultat fracție zecimală; transformări

OBSERV

Iată câteva probleme practice.



- Pentru zugrăvirea unui apartament sunt necesare 39 kg de vopsea. Câte gălețușe de 5 kg de vopsea trebuie cumpărate pentru această lucrare?

Rezolvare: Restul este important în configurarea răspunsului. Rezultatul acestei împărțiri este $7\frac{4}{5}$. Aproximarea prin adaos până la unitate va constitui răspunsul problemei.

Răspuns: 8 gălețușe.

$$\begin{array}{r} 39 \quad 5 \\ 35 \overline{) 7} \\ =4 \end{array}$$

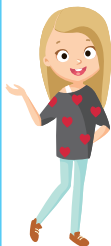
- La un cerc de pictură s-au alocat 500 lei pentru cumpărarea unor seturi de culori. Dacă un set de culori costă 23 lei, câte seturi pot fi cumpărate cu suma alocată?

Rezolvare: Restul împărțirii nu contează. Rezultatul problemei va fi o aproximare prin lipsă până la unitate.

Răspuns: 21 seturi.

$$\begin{array}{r} 500 \quad 23 \\ 46 \overline{) 21} \\ =40 \\ \underline{23} \\ 17 \end{array}$$

Când restul trebuie considerat, rezultatul problemei va fi o aproximare prin adaos.



- Andrei a cumpărat 4 CD-uri pentru care a plătit 94 de lei. Care este prețul unui CD?

Rezolvare: Rezultatul împărțirii este $23\frac{2}{4} = 23\frac{1}{2} = 23,5$.
Răspuns: 23,5 lei.

$$\begin{array}{r} 94 \quad 4 \\ 8 \overline{) 23} \\ 14 \\ \underline{12} \\ =2 \end{array}$$

Atunci când restul împărțirii se neglijează, rezultatul problemei este o aproximare prin lipsă.



- Radu are 14 ani, iar Irina, sora lui, are vârsta de 4 ori mai mică decât a fratelui său. Ce vârstă are Irina?

Rezolvare: Rezultatul împărțirii este $3\frac{2}{4} = 3\frac{1}{2}$.
Răspuns: 3 ani și jumătate.

$$\begin{array}{r} 14 \quad 4 \\ 12 \overline{) 3} \\ =2 \end{array}$$

În unele probleme, rezultatul împărțirii trebuie exprimat ca număr zecimal.



Alteori, rezultatul împărțirii se exprimă printr-un număr mixt.



ÎNȚELEG



Cum reprezentăm fracția $\frac{1365}{40}$ printr-un număr zecimal?

Rezolvare: **Metoda I** Efectuăm împărțirea $1365 : 40$

Pasul I

$$\begin{array}{r} 1365 \quad 40 \\ 120 \overline{) 34} \\ =165 \\ \underline{160} \\ =5 \end{array}$$

După acest pas am obținut câtul 34 și restul 5. Efectuăm proba împărțirii:
 $1365 = 34 \cdot 40 + 5$.

Pasul II

$$\begin{array}{r|l} 1365,0 & 40 \\ \hline 120 & 34,1 \\ \hline =165 & \\ \hline 160 & \\ \hline ==50 & \\ \hline 40 & \\ \hline 10 & \end{array}$$

Dacă vrem să continuăm pentru a obține un cât cu zecimale procedăm astfel:

- Punem virgula și un zero la deîmpărțit;
- Punem virgula la cât;

- Punem un zero la rest, transformând astfel 5 întregi în 50 de zecimi.

Am obținut câtul 34,1 și restul 10 zecimi.

Efectuăm proba împărțirii:

$$1\ 365 = 34,1 \cdot 40 + 0,1$$

Pasul III

$$\begin{array}{r|l} 1365,00 & 40 \\ \hline 120 & 34,12 \\ \hline =165 & \\ \hline 160 & \\ \hline ==50 & \\ \hline 40 & \\ \hline 100 & \\ \hline 80 & \\ \hline =20 & \end{array}$$

- Adăugăm încă un zero la deîmpărțit;

- Adăugăm un zero la rest, transformând astfel 10 zecimi în 100 sutimi.

După pasul III am obținut câtul 34,12 și restul 20 sutimi.

Efectuăm proba împărțirii:

$$1\ 365 = 34,12 \cdot 40 + 0,20$$

Pasul IV

$$\begin{array}{r|l} 1365,000 & 40 \\ \hline 120 & 34,125 \\ \hline =165 & \\ \hline 160 & \\ \hline ==50 & \\ \hline 40 & \\ \hline 100 & \\ \hline 80 & \\ \hline =200 & \\ \hline 200 & \\ \hline === & \end{array}$$

- Repetăm procedeul de la pasul III;

- Adăugăm un zero la deîmpărțit;

- Adăugăm un zero la rest, transformând astfel 20 de sutimi în 200 miimi.

Am obținut câtul 34,125 și restul zero.

Efectuăm proba împărțirii:

$$1\ 365 = 34,125 \cdot 40$$

Metoda II

$$^{25)} \frac{1365}{40} = \frac{34125}{1000} = 34,125$$

Uneori putem amplifica o fracție pentru a obține la numitor o putere a lui 10.

$$\frac{27}{75} \stackrel{(3)}{=} \frac{9}{25} = \stackrel{(4)}{=} \frac{9}{25} = \frac{36}{100} = 0,36$$

Alteori, mai întâi simplificăm fracția și apoi amplificăm noua fracție pentru a obține la numitor o putere a lui 10.

O fracție ordinară poate fi exprimată printr-un număr zecimal cu un număr finit de zecimale, dacă este echivalentă cu o altă fracție al cărei numitor are ca divizori doar puteri ale lui 2 și 5.

EXERSEZ

1 Scrieți cu virgulă următoarele fracții:

a) $\frac{32}{10}$; b) $\frac{45}{100}$; c) $\frac{134}{10}$; d) $\frac{52}{100}$.

3 Amplificați convenabil, astfel încât să obțineți fracții cu numitori puteri ale lui 10.

a) $\frac{7}{2}$; b) $\frac{6}{4}$; c) $\frac{5}{8}$; d) $\frac{9}{5}$;
e) $\frac{13}{25}$; f) $\frac{143}{20}$; g) $\frac{143}{50}$; h) $\frac{128}{125}$.

2 Efectuați împărțirile:

a) 35 : 4; b) 28 : 5; c) 17 : 25; d) 79 : 40.

4 Efectuați în două moduri împărțirile:

a) 17 : 2; b) 36 : 5; c) 29 : 25; d) 93 : 60.

5 Aproximați prin lipsă până la sutimi.

a) 7 : 3; b) 17 : 6; c) $\frac{59}{40}$; d) 23 : 7.

25.2 Media aritmetică a două sau mai multor numere naturale

OBSERV

Un agricultor a obținut de pe cele 6 ha cultivate cu cereale următoarele recolte: 3 000 kg pe un hectar, 7 000 kg pe două hectare și 11 000 kg pe trei hectare. Care a fost producția medie la hectar?

Rezolvare: $3\ 000 + 7\ 000 + 11\ 000 = 21\ 000$
 $21\ 000 : 6 = 3\ 500$

Răspuns: Producția medie la hectar a fost 3 500 kg.



ÎNȚELEG

Media aritmetică a două numere x și y este numărul

$$m_a = \frac{x+y}{2}$$

$$m_a(8;6) = \frac{8+6}{2} = 7$$

Media aritmetică a trei numere x, y, z este numărul

$$m_a = \frac{x+y+z}{3}$$

$$m_a(4;9;8) = \frac{4+9+8}{3} = 7$$

Media aritmetică a n numere este:

$$m_a = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n}$$

$$m_a(3;4;5;6) = \frac{3+4+5+6}{4} = 4,5$$



Media aritmetică este mai mare decât cel mai mic dintre numere.

Media aritmetică este mai mică decât cel mai mare dintre numere.



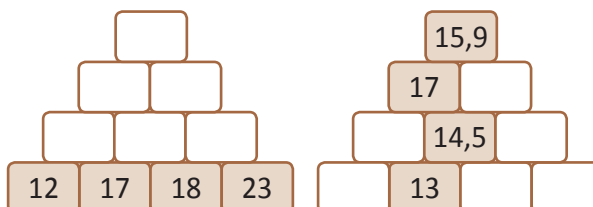
APLIC

Calculați media aritmetică a numerelor:

- a) 14 și 19; b) 5; 6; 7; 8; c) 1,2 și 3,8;
 d) 7; 12; 13; 19; e) 8; 6; 12; 9; 15; f) 8; 16; 21.

EXERSEZ

- Media aritmetică a două numere este 14,5. Aflați suma numerelor.
- Media aritmetică a două numere este 8,5, iar unul dintre numere este 7. Aflați celălalt număr.
- Media aritmetică a patru numere este 9,75, iar trei dintre ele au suma 23. Aflați cel de-al patrulea număr.
- Media aritmetică a patru numere consecutive este 7,5. Aflați numerele.
- Media aritmetică a două numere este 14, iar unul este de trei ori mai mare decât celălalt. Aflați cele două numere.
- Zidul mediei aritmetice.** Pe fiecare cărămidă se află media aritmetică a numerelor de pe cărămizile de sprijin. Completați locurile libere.



ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

7 Completați tabelul:

x	y	z	$m_a(x;y)$	$m_a(y;z)$	$m_a(x;z)$	$m_a(x;y;z;9)$
3	4	5				
5	8			9,5		
7		13	15,5			
	17	16			12,5	
28	15					14,5

8 Media aritmetică a trei numere este 14. Ce număr trebuie să considerăm pentru ca media să se mărească cu 3,25?

SUNT CAMPION

9 Vasile are două note la fizică și media lor este 6,50. Dacă mai primește două note, un 9 și un 8, ce medie va obține?

25.3 Împărțiri care au ca rezultate numere zecimale periodice

OBSERV

Împărțirile $23 : 6$ (sau $\frac{23}{6}$) și $25 : 9$ (sau $\frac{25}{9}$) nu pot avea rezultate numere zecimale cu număr finit de cifre.



Știu de ce: deoarece numitorii au divizori diferiți de 2 sau 5.

Asta nu înseamnă că fracțiile $\frac{23}{6}$ și $\frac{25}{9}$ nu pot fi scrise ca numere zecimale.



Dacă ne propunem să obținem un rezultat cu 4 zecimale exacte, punem de la început virgula la deîmpărțit și patru zerouri.

$$\begin{array}{r} 23,0000 \quad | \quad 6 \\ \underline{18} \\ =50 \\ \underline{48} \\ =20 \\ \underline{18} \\ =20 \\ \underline{18} \\ =20 \end{array}$$

Împărțirea lui 2 la 6 se continuă la nesfârșit.
 $3,8333... = 3,8(3)$ și se citește 3 virgulă 8 perioadă 3.

$$\begin{array}{r} 25,0000 \quad | \quad 9 \\ \underline{18} \\ =70 \\ \underline{63} \\ =70 \\ \underline{63} \\ =70 \\ \underline{63} \\ =70 \end{array}$$

Împărțirea lui 7 la 9 se continuă la nesfârșit.
 $2,777... = 2,(7)$ și se citește 2 virgulă perioadă 7.

ÎNȚELEG

Numerele $3,8(3)$ și $2,(7)$ sunt numere zecimale periodice cu perioada 3, respectiv 7.

Perioadă

O cifră sau un grup de cifre care se repetă la nesfârșit după virgulă se numește perioadă.

Numere zecimale periodice simple

Numerele zecimale periodice simple au perioada imediat după virgulă.

Exemple: $2,444... = 2,(4)$; $5,232323... = 5,(23)$.

Numere zecimale periodice mixte

Numerele zecimale periodice mixte au imediat după virgulă un număr finit de cifre urmate de perioadă.

Exemple: $3,4222... = 3,4(2)$; $5,23717171... = 5,23(71)$.



Dacă numitorul unei fracții ireductibile are numai divizori diferiți de 2 și de 5, atunci fracția reprezintă un **număr zecimal periodic simplu**.

Exemple: $\frac{2}{3} = 0,(6)$; $\frac{26}{11} = 2,(36)$.

Dacă numitorul unei fracții ireductibile se divide cu 2 sau 5, dar și cu alt număr prim (diferit de 2 sau 5), atunci fracția reprezintă un **număr zecimal periodic mixt**.

Exemple: $\frac{71}{30} = 2,3(6)$; $\frac{641}{300} = 2,13(6)$.

EXERSEZ

1 Aflați numerele zecimale periodice rezultate din: a) $22 : 3$; b) $17 : 9$; c) $104 : 7$; d) $52 : 21$.

2 Transformați în numere zecimale periodice fracțiile:

a) $\frac{17}{6}$; b) $\frac{53}{12}$; c) $\frac{62}{15}$; d) $\frac{75}{14}$; e) $\frac{125}{28}$; f) $\frac{257}{24}$.

4 Determinați a 99-a zecimală a numărului $\frac{9}{7}$.

5 Precizați felul numerelor zecimale reprezentate de:

a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{5}{6}$; c) $\frac{6}{15}$; d) $\frac{9}{13}$; e) $\frac{8}{75}$; f) $\frac{34}{21}$.

3 Rotunjiți la sutimi următoarele fracții:

a) $\frac{47}{15}$; b) $\frac{26}{3}$; c) $\frac{35}{6}$; d) $\frac{73}{30}$; e) $\frac{82}{35}$; f) $\frac{36}{13}$.

SUNT CAMPION

6 Determinați ultimele trei zecimale nenule ale numărului:

a) $\frac{1347}{2^{36}}$; b) $\frac{2426}{5^{47}}$.

25.4 Împărțirea unui număr zecimal cu un număr finit de zecimale nenule la un număr natural nenul

A. Împărțirea unui număr zecimal la 10^n , n număr natural

OBSERV

• O sută de cărămizi cântăresc 243,5 kg. Oare cât cântărește o cărămidă?

Rezolvare: $243,5 : 100 = ?$ sau $243,5 : 10^2 = ?$

$243,5 : 100 = \frac{2435}{10} : 100 = \frac{2435}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{2435}{1000} = 2,435$. Răspuns: 2,435 kg.

ÎNȚELEG

Pentru a împărți un număr zecimal cu 10, 100, 1 000, mutăm virgula spre stânga peste una, două, respectiv trei cifre.

Exemple: $27,3 : 10 = 2,73$

$276,8 : 100 = 2,768$

$32,5 : 100 = 0,325$

$46,3 : 1\,000 = 0,0463$

Ce deosebire este între înmulțirea și împărțirea numerelor zecimale la o putere a lui 10?

La înmulțirea cu 10^n , rezultatul se mărește și virgula se mută spre dreapta peste n cifre, iar la împărțirea cu 10^n , rezultatul se micșorează și virgula se mută spre stânga peste n cifre.



B. Împărțirea unui număr zecimal la un număr natural

OBSERV

Printr-un robinet cu debit constant curge în 4 ore o cantitate de 619,6 litri de apă. Ce cantitate de apă curge într-o oră?

$$\text{Rezolvare: } 619,6 : 4 = \frac{6196}{10} : 4 = \frac{6196}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1549}{10} = 154,9.$$

Răspuns: 154,9 litri pe oră.

$$\begin{array}{r} 619,6 \quad | \quad 4 \\ \underline{4} \\ 21 \\ \underline{20} \\ =19 \\ \underline{16} \\ =36 \\ \underline{36} \\ == \end{array}$$



ÎNȚELEG

Împărțim unui număr zecimal la un număr natural astfel:

- Pasul I. Împărțim partea întreagă la numărul dat și punem virgula la cât.
- Pasul II. Continuăm împărțirea ca la numere naturale, fără să ținem cont de virgula de la deîmpărțit.

Exemple:

Pasul I:

$$\begin{array}{r} 173,4 \quad | \quad 4 \\ \underline{16} \\ =13 \\ \underline{12} \\ =1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23,4 \quad | \quad 8 \\ \underline{16} \\ =7 \end{array}$$

Pasul II:

$$\begin{array}{r} 173,4 \quad | \quad 4 \\ \underline{16} \\ =13 \\ \underline{12} \\ =14 \\ \underline{12} \\ =20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23,4 \quad | \quad 8 \\ \underline{16} \\ =74 \\ \underline{72} \\ =20 \\ \underline{16} \\ =40 \\ \underline{40} \\ == \end{array}$$

APLIC

Calculați:

- a) $36,5 : 10$; b) $45,6 : 100$; c) $2,7 : 100$;
d) $8 : 100$; e) $5,72 : 1\,000$; f) $5,28 : 1\,000$.

EXERSEZ

1 Aflați numerele de 100 de ori mai mici decât: a) 20; b) 3,25; c) 473,5; d) 0,25.

2 Calculați:

- a) $15,8 : 2$; b) $17,5 : 2$; c) $43,5 : 4$;
d) $82,65 : 5$; e) $142,56 : 3$; f) $94,26 : 8$.

3 Calculați:

- a) $28,56 : 12$; b) $58,29 : 15$; c) $87,45 : 24$;
d) $32,34 : 14$; e) $68,04 : 28$.

4 Aflați câtul cu două zecimale exacte:

- a) $37,5 : 8$; b) $21,37 : 4$; c) $34,27 : 5$.

5 Zece stilouri costă 173,5 lei. Cât costă 65 de stilouri?

6 Aflați x din relațiile: a) $(1,8 + 0,2) \cdot x = 24,5$; b) $(3,6 + 1,4) \cdot x = 72,61$;

c) $(7,4 - 3,4) \cdot x = 42,3$; d) $(19,3 - 4,3) \cdot x = 45,72$.

7 Suma a două numere este 25,96, iar unul dintre ele este de 9 ori mai mic decât celălalt. Aflați cele două numere.

8 Perimetrul unui dreptunghi este 87,2 m, iar lățimea este de 7 ori mai mică decât lungimea. Aflați dimensiunile dreptunghiului.

25.5 Împărțirea a două numere zecimale finite

OBSERV

Să efectuăm operațiile și să facem proba: a) $4 \cdot 1,5$ și $4 \cdot 15$, b) $8 \cdot 0,25$ și $8 \cdot 25$.

Rezolvare: a) $4 \cdot 1,5 = 6$ și $4 \cdot 15 = 60$. *Proba:* $6 : 1,5 = 4$ și $60 : 15 = 4$;

b) $8 \cdot 0,25 = 2$ și $8 \cdot 25 = 200$. *Proba:* $2 : 0,25 = 8$ și $200 : 25 = 8$.



Putem să înmulțim atât deîmpărțitul cât și împărțitorul cu orice putere a lui 10 și câtul nu se schimbă.

- Cum împărțim $26,3 : 0,25$?

$$\text{Rezolvare: } 26,3 : 0,25 = \frac{263}{10} : \frac{25}{100} = \frac{263}{\cancel{10}^1} \cdot \frac{100}{25} = \frac{2630}{25} = 2630 : 25 = 105,2.$$

Alegem o putere a lui 10 astfel încât după înmulțire să obținem un împărțitor întreg cel mai mic.



ÎNȚELEG

Împărțim două numere zecimale care au un număr finit de cifre astfel:

Pasul I. Înmulțim atât deîmpărțitul, cât și împărțitorul cu aceeași putere a lui 10 pentru ca împărțitorul să devină număr natural.

Pasul II. Împărțim noile numere după regulile împărțirii cu împărțitor natural.



Practic, mutăm virgula spre dreapta peste același număr de cifre și la deîmpărțit, și la împărțitor.

Exemple:

$$\begin{array}{r} 12,6 : 0,4 \\ \underline{12} \quad | \quad \underline{4} \\ ==6 \quad | \quad 31,5 \\ \quad 4 \\ \underline{20} \\ \quad \underline{20} \\ == \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24,65 : 0,5 \\ \underline{246,5} \quad | \quad \underline{5} \\ =46 \quad | \quad 49,3 \\ \quad 45 \\ \underline{=15} \\ \quad \underline{15} \\ == \end{array}$$

Este suficient să mutăm virgula spre dreapta și la deîmpărțit, și la împărțitor peste atâtea cifre câte zecimale are împărțitorul.



EXERSEZ

1 Efectuați și verificați rezultatul:

- a) $42 : 0,5$; b) $23 : 0,4$; c) $15 : 0,25$;
d) $17 : 1,25$; e) $39 : 0,75$; f) $36 : 0,9$.

2 Calculați:

- a) $3,26 : 0,5$; b) $5,65 : 0,4$; c) $1,73 : 0,25$;
d) $2,394 : 1,25$; e) $6,543 : 0,75$.

3 227,5 kg de fructe se pun în lădițe de câte 3,25 kg. Câte lădițe sunt necesare?

4 Calculați cu două zecimale exacte și faceți proba.

- a) $5,3 : 0,7$; b) $2,5 : 0,6$; c) $76,3 : 1,2$.

5 Rotunjiți câtul până la o sutime.

- a) $2,95 : 0,4$; b) $7,261 : 0,5$; c) $8,27 : 0,3$.

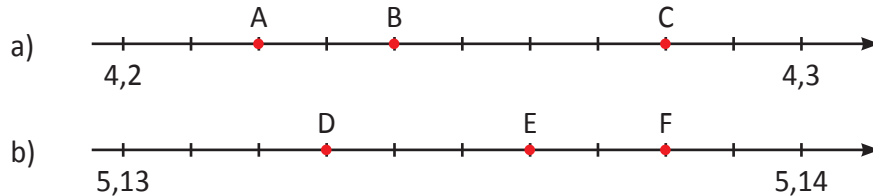
6 Suma a două numere este 17,15, iar unul din ele este de 2,5 ori mai mare decât celălalt. Aflați cele două numere.

7 Diferența a două numere este 15,75, iar unul din ele este de 3,5 ori mai mic decât celălalt. Aflați cele două numere.

1 Exprimați printr-un număr zecimal:

- a) $\frac{3}{25}$; b) $4\frac{5}{8}$; c) $\frac{20}{36}$; d) $\frac{26}{180}$.

2 Descoperiți numerele corespunzătoare punctelor A, B, C, D, E și F reprezentate pe axă:



3 Comparați numerele:

- a) $\frac{4}{13}$ și $0,(36)$; b) $\frac{2}{5}$ și $0,3(78)$.

4 Calculați mai simplu:

- a) $6,79 + 5,43 + 3,21 + 2,57$; b) $9,25 - 3,61 - 2,39 + 3,75$.



5 Estimați prin rotunjire până la o zecime:

- a) $4,31 + 2,72$; b) $3,42 \cdot 5,81$

și apreciați calitatea estimării cu rezultatul obținut prin calcul.

6 Media aritmetică a trei numere este 15. Ce număr trebuie adăugat pentru ca media să crească cu 4,25?

7 Efectuați calculele.

- a) $16 \cdot 10 + 73 : 10 - 40,86 : 2,5$; b) $(0,8)^2 + [(13,2 - 8) \cdot 0,25 + 25,7] : 4$.

8 Un dreptunghi are lungimea de 23,4 m, iar lățimea este de 4,5 ori mai mică decât lungimea. Calculați perimetrul dreptunghiului.

9 O firmă de construcții a livrat pieții un lot de apartamente în trei tranșe, astfel: în prima tranșă, jumătate din lot, în a doua tranșă, 36 de apartamente, iar în ultima tranșă, 0,125 din lot. Câte apartamente au fost livrate în total?

Punctaj:									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
10 p. (4 × 2,5 p.)	10 p. (2 × 5 p.)	10 p. (2 × 5 p.)	10 p. (2 × 5 p.)	10 p. (2 × 5 p.)	10 p. (2 × 5 p.)	10 p.	10 p. (2 × 5 p.)	10 p.	10 p.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Pentru a afla nota finală, rezultatul obținut se împarte la 10.									

26. Exprimarea unui număr zecimal periodic printr-o fracție ordinară

OBSERV



Cum se exprimă printr-o fracție ordinară numărul $x = 0,(7)$?

Înmulțim cu **10**

ambii membri ai egalității:

$$10 \cdot x = 7,(7); \quad 10x = 7 + 0,(7);$$

$$10x = 7 + x;$$

$$9x = 7, \text{ de unde } x = \frac{7}{9}, \quad 0,(7) = \frac{7}{9}.$$

- Exprimați printr-o fracție ordinară numărul $0,4(23)$.

$$\text{Rezolvare: } 0,4(23) = 4,(23) : 10 = \left(4 + \frac{23}{99}\right) \cdot \frac{1}{10} = \frac{4 \cdot 99 + 23}{990} = \frac{4 \cdot (100 - 1) + 23}{990} = \frac{423 - 4}{990}.$$

Dar $y = 0,(23)$?

Înmulțim cu **100**

ambii membri ai egalității.

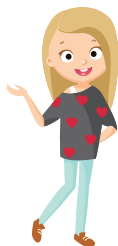
$$100y = 23,(23); \quad 100y = 23 + 0,(23);$$

$$100y = 23 + y;$$

$$99y = 23, \text{ de unde } y = \frac{23}{99}, \quad 0,(23) = \frac{23}{99}.$$



ÎNȚELEG



Am înțeles cum se scrie ca fracție ordinară un număr zecimal periodic cu partea întregă zero.

Perioada este o cifră sau un grup de cifre care se repetă la nesfârșit în scrierea unui număr zecimal periodic.

Un număr zecimal periodic simplu se exprimă prin suma dintre partea întregă și o fracție ordinară având la numărător perioada, iar la numitor un număr format din atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada.

$$\text{Exemple: } 3,(41) = 3 \frac{41}{99} = \frac{338}{99}$$

$$\text{altfel gândit: } 3,(41) = \frac{341 - 3}{99} = \frac{338}{99}$$

$$5,(26) = 5 \frac{26}{99} = \frac{521}{99}$$

$$\text{altfel gândit: } 5,(26) = \frac{526 - 5}{99} = \frac{521}{99}$$

Dacă partea întreagă este diferită de zero, atunci se scrie ca sumă dintre partea întreagă și un număr zecimal cu partea întregă zero.

Cifrele dintre virgulă și perioadă formează *neperioada* (partea care nu se repetă) părții zecimale a unui număr zecimal periodic.

Un număr zecimal periodic mixt se exprimă prin suma dintre partea întregă și o fracție ordinară, având la numărător diferența dintre numărul natural format din cifrele părții zecimale și numărul natural exprimat de neperioadă, iar la numitor un număr format din atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada și atâtea cifre de zero câte are neperioada.

$$\text{Exemplu: } 2,4(35) = 2 \frac{435 - 4}{990} = 2 \frac{431}{990}$$

$$\text{altfel gândit: } 2,4(35) = \frac{2435 - 24}{990} = \frac{2411}{990}$$



APLIC

Folosiți două moduri pentru transformare în fracții ordinare:

a) 3,(7); **b)** 41,(5); **c)** 4,0(7); **d)** 9,2(35); **e)** 57,(26); **f)** 8,32(4).

Model: $6,(7) = 6\frac{7}{9} = \frac{61}{9}$ sau $6,(7) = \frac{67-6}{9} = \frac{61}{9}$

$$3,4(8) = 3\frac{48-4}{90} = 3\frac{44}{90} = \frac{314}{90} \text{ sau } 3,4(8) = \frac{348-34}{90} = \frac{314}{90}$$

EXERSEZ

1 Exprimați prin fracții ordinare numerele:

a) 2,(3); b) 0,(36); c) 4,(23);
d) 5,(04); e) 7,(124); f) 13,(64).

2 Exprimați prin fracții ordinare numerele:

a) 0,3(4); b) 0,2(53); c) 1,3(2);
d) 4,35(6); e) 6,32(45); f) 2,41(536).

3 Aflați cifra x din egalitățile:

a) $0,\overline{(x)} = \frac{5}{9}$; b) $3,4\overline{(x)} = \frac{311}{90}$; c) $4,\overline{(x)} = 4\frac{1}{3}$; d) $5,\overline{(x)} = \frac{51}{9}$; e) $5,\overline{(x)} = 5\frac{12}{18}$.

4 Folosind, eventual, amplificarea, exprimați fracțiile prin numere zecimale periodice.

a) $\frac{5}{3}$; b) $\frac{7}{11}$; c) $\frac{8}{33}$; d) $\frac{14}{90}$; e) $\frac{37}{90}$; f) $\frac{126}{990}$; g) $\frac{102}{90}$; h) $\frac{124}{99}$; i) $\frac{1246}{999}$.

27. Număr rațional pozitiv. Ordinea efectuării operațiilor

A. Număr rațional pozitiv

ÎMI AMINTESC!



O fracție ordinară este echivalentă cu un număr nesfârșit de fracții ordinare.

Toate fracțiile echivalente au ca reprezentare pe axa numerelor același punct care corespunde unui număr pe care îl numim număr rațional (fracționar).



În acest fel, toate fracțiile echivalente sunt reprezentări ale aceluiași număr rațional.



ÎNȚELEG

- Un *număr rațional pozitiv* este un număr care poate fi exprimat printr-o fracție ordinară $\frac{a}{b}$ cu a și b numere naturale, $b \neq 0$.

- *Numărul rațional nul* se exprimă prin $\frac{0}{b}$, b număr natural nenul.

Numerele raționale pozitive sunt exprimate prin:

		Exemple:
Numere naturale	reprezentate prin $\frac{a}{b}$, a și b numere naturale, $b \neq 0$, $a : b$	$5 = \frac{10}{2}$
Numere zecimale cu un număr finit de cifre	reprezentate prin $\frac{a}{10^n}$, a și n numere naturale nenule, sau fracții echivalente cu $\frac{a}{10^n}$	$2,73 = \frac{273}{100}$ $3,5 = \frac{35}{10}$
Numere zecimale periodice simple	reprezentate prin fracții ireductibile cu numitori care au divizori diferiți de 2 și 5, sau prin fracții echivalente	$2,(5) = \frac{23}{9}$ $0,(3) = \frac{1}{3}$
Numere zecimale periodice mixte	reprezentate prin fracții ireductibile cu numitori care au printre divizori pe 2 sau 5 și cel puțin un divizor prim diferit de 2 și 5	$1,3(7) = \frac{62}{45}$ $1,2(7) = \frac{23}{18}$

B. Ordinea efectuării operațiilor

ÎMI AMINTESC!



Într-un exercițiu cu operații de același ordin, acestea se efectuează în ordinea scrierii (de la stânga la dreapta) sau folosind proprietăți ale operațiilor.

Într-un exercițiu cu operații de mai multe ordine se efectuează mai întâi operațiile de ordin III (ridicări la putere), apoi operațiile de ordin II (înmulțiri și împărțiri) și în final operațiile de ordin I (adunări și scăderi).



Dacă un exercițiu conține și paranteze, atunci se efectuează (după regulile amintite) mai întâi operațiile din parantezele rotunde, după care se desființează, iar parantezele drepte se consideră rotunde ș.a.m.d.

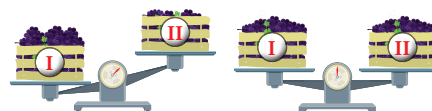
EXERSEZ

- Efectuați: a) $4,5 + 1,3 - 2,9 + 1,6$;
b) $3,7 + 2,8 + 1,3 - 0,8$;
c) $6 \cdot 0,8 + 7 : 2 - (1,2)^2 - 0,56$.
- Calculați: a) $3,75 \cdot 10 - 2,4 : 3 - 0,2$;
b) $7,5 - (0,2)^3 : (0,2)^2 \cdot 1,5 + 9 : 6$;
c) $0,(3) \cdot 10 + 0,7 + 6,(6) : 10$.
- Calculați:
a) $0,5 \cdot \left(7\frac{1}{2} - 0,62 : 0,2\right) + \frac{13}{2} : 1,3$;
b) $(0,6)^2 + \left(8,1 - 1,95 : \frac{1}{2}\right) \cdot 3,2 : 21$;
c) $\left(\frac{2}{3} + 0,4 \cdot 1,25\right) \cdot (1,23 : 0,3 - 2,9) + 16 : 10 \cdot 1,4$; d) $\left(5,4 - 4,725 \cdot \frac{2}{3}\right) : \left(4,3 - \frac{34}{15} : \frac{2}{3}\right) \cdot 3,4$.
- Efectuați calculele:
a) $0,8(3) \cdot \left[\frac{7}{6} + \left(4,25 - \frac{3}{8} : \frac{6}{4}\right) \cdot \frac{3}{8}\right] \cdot \frac{3}{5}$;
b) $0,9 : [2,4 - 3,5 : (4,3 + 5,4 : 2)] \cdot 0,(3)$.

28. Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții

Metoda balanței

• În două lădițe identice se află 12,6 kg de fructe. În prima lădiță se află cu 1,8 kg mai multe fructe decât în a doua lădiță. Ce cantitate de fructe se află în fiecare lădiță?



Rezolvare. 1) Dacă am completa a doua lădiță cu 1,8 kg de fructe (adică până se echilibrează balanța) am avea în total: $12,6 + 1,8 = 14,4$ kg.

2) Cantitativ, avem două lădițe de tip I, fiecare având: $14,4 : 2 = 7,2$ kg

3) În lădița inițială II erau $12,6 - 7,2 = 5,4$ kg

Răspuns: 7,2 kg în lădița I și 5,4 kg în lădița II.

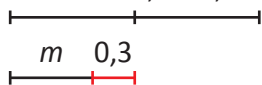
Observație: Se putea echilibra balanța golind lădița I cu 1,8 kg și se obțineau două lădițe egale tip II.

Metoda figurativă

• Alex și Mihai au cules împreună 11,4 kg de fructe de pădure, dar Mihai a cules cu 0,3 kg mai puțin decât jumătate din cât a cules Alex. Câte kg de fructe a cules fiecare?

Rezolvare:

1) Cele două desene reprezintă 3 jumătăți din cât a cules Alex: $11,4 + 0,3 = 11,7$ kg.



2) Jumătate din cât a cules Alex: $11,7 : 3 = 3,9$ kg.

3) Alex a cules: $3,9 \cdot 2 = 7,8$ kg.

4) Mihai a cules: $3,9 - 0,3 = 3,6$ kg.

Răspuns: Alex a cules 7,8 kg, Mihai a cules 3,6 kg.

Metoda comparației

• Pentru confecționarea a 4 bluze și 3 rochii s-au folosit 10,25 m de material, iar pentru 3 bluze și 5 rochii s-au folosit 12,5 m de material. Cât material s-a folosit pentru fiecare obiect?

Rezolvare:

1) Ordonăm: 4 bluze ... 3 rochii ... 10,25 m.
3 bluze ... 5 rochii ... 12,50 m.

2) Înmulțim cu 3 respectiv 4.

12 bluze ... 9 rochii ... $10,25 \cdot 3 = 30,75$ m.

12 bluze ... 20 rochii ... $12,50 \cdot 4 = 50$ m.

3) Pentru 11 rochii: $50 - 30,75 = 19,25$ m.

4) Pentru o rochie: $19,25 : 11 = 1,75$ m.

5) Pentru o bluză: $(10,25 - 3 \cdot 1,75) : 4 = (10,25 - 5,25) : 4 = 5 : 4 = 1,25$ m.

Răspuns: 1,25 m pentru o bluză și 1,75 m pentru o rochie.



Metoda mersului invers

• Andrei s-a gândit la un număr, l-a adunat cu $\frac{2}{3}$, suma a înmulțit-o cu $\frac{4}{13}$, produsul l-a micșorat cu $\frac{2}{5}$, diferența a împărțit-o la $\frac{6}{5}$, la cât a adăugat $\frac{7}{9}$ și a obținut 1. Ce număr a ales Andrei?

Rezolvare: Se observă că s-au efectuat 5 operații care au generat exercițiul:

$$\left[\left(x + \frac{2}{3} \right) \cdot \frac{4}{13} - \frac{2}{5} \right] : \frac{6}{5} + \frac{7}{9} = 1.$$

Operațiile în sens invers sunt:

a) $1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$;

b) $\frac{2}{9} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{18}$;

c) $\frac{4}{15} + \frac{2}{5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$;

d) $\frac{2}{3} : \frac{4}{13} = \frac{2}{3} \cdot \frac{13}{4} = \frac{13}{6}$;

e) $\frac{13}{6} - \frac{2}{3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Răspuns: $1\frac{1}{2}$.



Metoda falsei ipoteze

• Un comerciant a vândut 200 kg de fructe de calitate diferite cu 5,5 lei/kg respectiv 3,75 lei/kg, încasându-se în total 890 lei. Ce cantitate de fructe de fiecare fel a vândut comerciantul?

Rezolvare. Presupunem că marfa vândută este numai de calitate a II-a.

Suma încasată astfel: **1)** $200 \cdot 3,75 = 750$ lei.

Diferența dintre suma reală și cea presupusă: **2)** $890 - 750 = 140$ lei.

Diferența arată că s-au vândut și fructe de calitate I cu 5,5 lei/kg, fiind cauzată de diferența de preț pe kg dintre cele două calități.

3) $5,5 - 3,75 = 1,75$ lei

4) $140 : 1,75 = 80$ kg calitate I

5) $200 - 80 = 120$ kg calitate a II-a

Răspuns: 80 kg calitate I

120 kg calitate a II-a.

Metoda reducerii la unitate

• 3 aparate electrocasnice identice consumă în 3,6 ore de funcționare energie electrică în valoare de 13,5 lei. Ce valoare în lei are energia consumată numai de două dintre aceste aparate pe o perioadă de funcționare de 4,6 ore?

Rezolvare. Ordonăm datele problemei.

3 aparate 3,6 h 13,5 lei.

1 aparat 3,6 h $13,5 : 3 = 4,5$ lei.

1 aparat 1 h $4,5 : 3,6 = 1,25$ lei.

1 aparat 4,6 h $1,25 \cdot 4,6 = 5,75$ lei.

2 aparate 4,6 h $5,75 \cdot 2 = 11,50$ lei.

Probleme de mișcare

1) Sorin și fratele său George au hotărât să meargă la bunici cu bicicletele, având de parcurs un drum de 65 km. Sorin pleacă la ora 8⁰⁰ și merge cu o viteză de 14 km pe oră, iar George pleacă la ora 10⁰⁰ și merge cu o viteză de 25,2 km/h. Va reuși George să îl ajungă pe Sorin pe parcursul celor 65 km?

- Rezolvare.*
- După două ore, Sorin a parcurs: $14 \cdot 2 = 28$ km.
 - George se apropie de Sorin într-o oră cu: $25,2 - 14 = 11,2$ km.
 - George îl ajunge pe Sorin după: $28 : 11,2 = 2,5$ ore.
 - Distanța parcursă de cei doi până la întâlnire se calculează:
 - $25,2 \cdot 2,5 = 63$ km sau
 - $14 \cdot 4,5 = 63$ km

Răspuns: George îl ajunge pe Sorin după 63 km.

2) Cristina și Miruna locuiesc pe aceeași stradă la o distanță între locuințe de 1 620 m. Cele două prietene pleacă în același timp una spre cealaltă, Cristina mergând cu 65,5 m pe minut, iar Miruna cu 69,5 m pe minut. La ce distanță de locuința Cristinei se vor întâlni?

- Rezolvare.*
- În fiecare minut, cele două prietene parcurg împreună: $65,5 + 69,5 = 135$ m.
 - Ele se vor întâlni după: $1\ 620 : 135 = 12$ minute
 - Distanța parcursă de Cristina este: $12 \cdot 65,5 = 776$ m.

Răspuns: 776 m.

EXERSEZ

- Suma a trei numere este $9\frac{5}{12}$. Al doilea număr este de două ori mai mare decât primul și cu $\frac{3}{2}$ mai mic decât al treilea. Aflați cele trei numere.
- Tatăl lui Adrian a schimbat la bancă o sumă de 335 euro, pentru care a primit 1 514,20 lei. Câți lei ar fi primit dacă la același moment și la aceeași bancă ar fi schimbat 475 euro?
- Șase combine identice pot recolta grâu de pe o suprafață de 96,6 ha în 3,5 ore. În cât timp poate fi recoltat grâu de pe o suprafață de 57,5 ha, lucrând doar 5 combine?
- La un spectacol s-au vândut 248 de bilete cu prețul de 27,50 lei biletul, respectiv 45 lei biletul, încasându-se suma de 8 272,50 lei. Câte bilete din fiecare categorie au fost vândute?
- Mihai s-a gândit la un număr, l-a înmulțit cu $\frac{3}{2}$, produsul l-a micșorat cu $\frac{1}{3}$, diferența a împărțit-o la $\frac{13}{5}$, câtul l-a micșorat cu $\frac{1}{4}$, diferența a înmulțit-o cu 3, produsul l-a mărit cu $\frac{7}{4}$ și a obținut 2. Ce număr a ales Mihai?
- Prin trei robinete (cu același debit) curg 2 083,25 litri de apă în 6,5 ore. Câți litri de apă curg prin cinci robinete de același fel, dacă sunt deschise 4,5 ore?
- Trei calculatoare și patru imprimante costă 5 274,25 lei, iar două calculatoare costă cât trei imprimante. Cât costă fiecare obiect?

29. Probleme de organizare a datelor



- Organizarea datelor reprezintă un proces de ordonare, identificare, evaluare și măsurare a unor informații.
- Scopul organizării datelor îl reprezintă modul rapid de interpretare a datelor după diverse criterii într-un timp relativ mic.

OBSERV

La un test, un grup de elevi a obținut notele
7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10.

Aceste note se trec într-un tabel de date statistice astfel:

Media notelor este:

$$m = (2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 10) : 10 = 8,4$$

Nota	7	8	9	10
Frecvența	2	3	4	1
*E Frecvența procentuală	20%	30%	40%	10%

ÎNȚELEG

Frecvența este numărul de apariții ale unei valori (note).

*E **Frecvența procentuală** este cât la % din efectivul analizat reprezintă numărul de apariții ale unei valori (note).

Media setului de date

O informație importantă dintr-un set de date o reprezintă media setului (media aritmetică a tuturor valorilor variabilei statistice; în exemplul nostru, nota).

$$M = \frac{f_1 \cdot v_1 + f_2 \cdot v_2 + \dots + f_n \cdot v_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n},$$

unde $v_1, v_2 \dots v_n$ sunt valorile variabilei, iar $f_1, f_2 \dots f_n$, frecvențele lor.

Considerăm rezultatele unui grup de elevi la un concurs evaluat prin note:

4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7,
8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10.

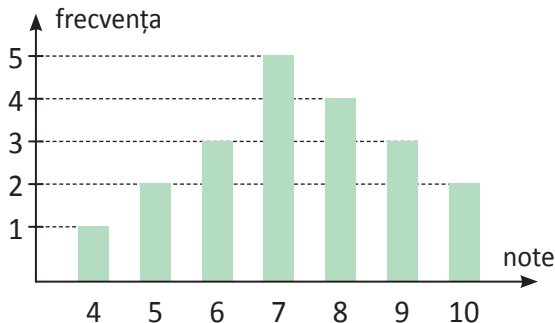
Aceste date le reprezentăm prin tabelul alăturat.

Note	4	5	6	7	8	9	10
Frecvența	1	2	3	5	4	3	2
*E Frecvența procentuală	5%	10%	15%	25%	20%	15%	10%

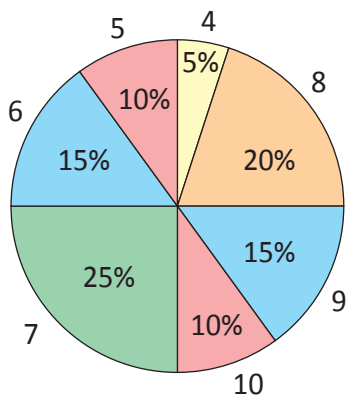
Interpretând tabelul, putem răspunde la întrebările:

- 1) Care este efectivul grupului considerat?
- 2) Câți elevi au obținut cel mult nota 9?
- 3) Câte note sunt mai mici decât 7?
- 4) Cât % din numărul elevilor au cel puțin nota 8?

Datele din tabel pot fi reprezentate grafic printr-un desen numit *diagramă*.



- 1) Câți elevi au participat la concurs?
- 2) Câți elevi au obținut note de 8 sau 9?
- 3) Câți elevi au obținut cel puțin nota 6?
- 4) Câți elevi au note de trecere?
- 5) Ce notă are frecvența cea mai mare?
- 6) Calculați media pe grup.



Un alt mod de reprezentare grafică a datelor este diagrama circulară. Aici apar exprimate procentual datele.

- 1) Cât % reprezintă notele de 4 și 10?
- 2) Ce note reprezintă cel mai mare procent?
- 3) Care note au procente egale?
- 4) Ce notă are cel mai mic procent?
- 5) Ce procent reprezintă notele mai mici decât 8?

APLIC

1) La o lucrare scrisă, elevii din clasa a V-a B au obținut notele:

4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10.

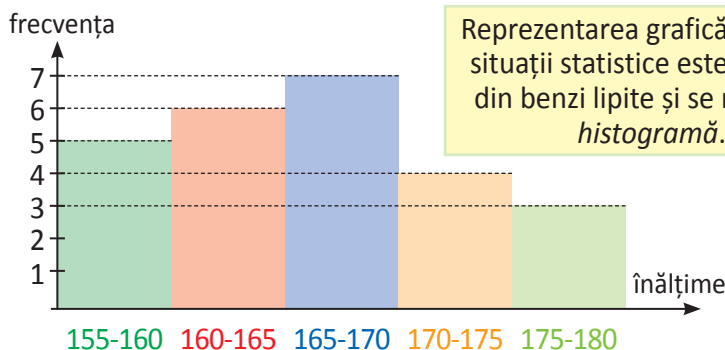
- a) Alcătuiți tabelul statistic cu frecvența simplă și frecvența procentuală.
- b) Reprezentați datele printr-o diagramă cu bare și una circulară.
- c) Răspundeți la toate întrebările formulate anterior.

2) Considerăm o situație statistică privind înălțimea elevilor unei clase de liceu (exprimată în cm).

a) Completați tabelul.

Înălțime	$155 \leq m < 160$	$160 \leq m < 165$	$165 \leq m < 170$	$170 \leq m < 175$	$175 \leq m \leq 180$
Frecvența	5	6	7	4	3
*E Frecvența procentuală	20%	?	?	?	?

- b) Ce categorie reprezintă coloana cea mai înaltă?
- c) Aflați din diagramă efectivul de elevi.
- d) Ce categorie este cea mai puțin numeroasă?
- e) Câți elevi au înălțimea mai mică decât 170 cm?



Reprezentarea grafică a acestei situații statistice este formată din benzi lipite și se numește *histogramă*.

3) Situația alăturată reprezintă mediile generale ale elevilor unei clase.

- a) Alcătuiți un tabel cu frecvența și frecvența procentuală.
- b) Reprezentați datele printr-o diagramă de tip histogramă.
- c) Răspundeți la întrebările:
 - 1) Câți elevi au media 8 sau peste 8?
 - 2) Câți elevi au medii mai mici decât 7?
 - 3) Care este efectivul de elevi al clasei?
 - 4) Cât % din elevi au cel puțin media 7?

- 6 elevi $\Rightarrow (5 \leq m < 6)$
- 4 elevi $\Rightarrow (6 \leq m < 7)$
- 6 elevi $\Rightarrow (7 \leq m < 8)$
- 7 elevi $\Rightarrow (8 \leq m < 9)$
- 2 elevi $\Rightarrow (9 \leq m < 10)$



30. Recapitulare

Operații cu numere zecimale



1 Completați, după model, tabelul:

Număr zecimal	Partea întreagă	Cifra zecimilor	Cifra sutimilor	Cifra miimilor	Numărul zecimilor	Numărul sutimilor	Numărul miimilor
46,238	48	2	3	8	462	4 623	46 238
273,569							

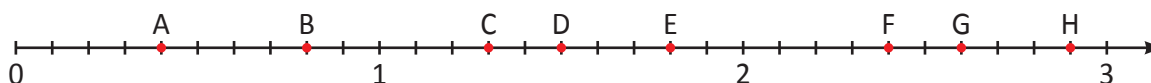
2 Transformați și echivalați o fracție ordinară cu un număr zecimal, completând tabelul:

Număr zecimal	2,42		0,025		32,5	
Fracție cu numitor putere a lui 10		$\frac{73}{10}$		$\frac{6}{1000}$		$\frac{458}{100}$

3 Completați tabelul cu aproximări și rotunjiri:

Număr	Aproximare prin lipsă până la:			Aproximare prin adaos până la:			Rotunjiri până la:		
	unitate	zecime	sutime	unitate	zecime	sutime	unitate	zecime	sutime
46,273	46	46,2	46,27	47	46,3	46,28	46	46,3	46,27
21,554	21	21,5	21,55	22	21,6	21,56	22	21,6	21,55
24,356									

4 Citiți și notați numerele zecimale reprezentate prin punctele A, B, C, D, E, F, G și H.



5 Exprimați suma $2,7 + 3,92$ și diferența $4,9 - 2,36$ printr-un număr zecimal:

- efectuând direct operațiile;
- folosind transformarea în fracții ordinare.

6 Ordonăți crescător numerele zecimale, pentru a confirma activitatea desfășurată:

4,13 **R** 2,35 **M** 4,103 **A** 1,4 **O** 1,38 **C** 2,4 **P** 5,3 **M** 5,27 **Ă**

7 Un muncitor sapă un șanț în 3 zile astfel: în prima zi sapă 14,64 m, a doua zi 16,36 m, iar a treia zi 18,5 m. Știind că pentru fiecare metru săpat primește 12,36 lei, calculați ce sumă primește muncitorul pentru întreaga lucrare.

8 Calculați media aritmetică a numerelor 17; 25, 32; 69.

- 1 Scrieți ca fracții ordinare ireductibile, numerele:
a) 3,775; b) 0,27(6).
- 2 Scrieți ca numere zecimale:
a) $\frac{15}{4}$; b) $\frac{6}{75}$; c) $\frac{97}{9}$; d) $\frac{311}{90}$.
- 3 Ordonăți crescător numerele: 0,33; 2(6); 0,(3); 1,6; 1,067; 2,(34); 2,345; 1,5; 1,9(6).
- 4 Suma a două numere este 4,3, iar unul din numere este cu 1,5 mai mic decât celălalt. Aflați cele două numere.
- 5 Calculați cu două zecimale exacte și faceți proba:
a) $53 : 4$; b) $8,7 : 7$.
- 6 Efectuați:
a) $2,35 - 1,4$; b) $0,95 : 0,3$.
- 7 Efectuați: $\{[0,(6) - 0,5] \cdot 18 - 0,75\} : (5,05 - 1,45)$.
- 8 Calculați media aritmetică a numerelor, 2,73, a și b , știind că media aritmetică a numerelor a și b este 7,7.
- 9 La un supermarket s-au vândut într-o zi 182,250 kg de fructe, a doua zi o cantitate de 1,2 ori mai mare, iar în a treia zi de 3 ori mai puțin decât în primele două zile. Ce cantitate de fructe s-a vândut în total în cele trei zile?



Punctaj:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
10 p. (2 × 5 p.)	10 p. (4 × 2,5 p.)	10 p.	10 p.	10 p. (2 × 5 p.)	10 p. (2 × 5 p.)	10 p.	10 p.	10 p.	

Se acordă 10 puncte din oficiu. Pentru a afla nota finală, rezultatul obținut se împarte la 10.

31. Punct, dreaptă, plan, semiplan, semidreaptă, segment

OBSERV



Ce reprezintă urma lăsată de un creion bine ascuțit cu care am atins o foaie de hârtie sau urma lăsată de un ac cu care am înțepat o foaie de hârtie?

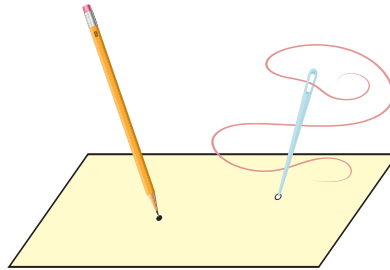


fig. 1

În figură este reprezentată obținerea a două **puncte**: cu ajutorul unui creion și cu ajutorul unui ac de cusut.



Dacă îmi imaginez că prelungesc muchia mesei, ce figură geometrică vom obține?

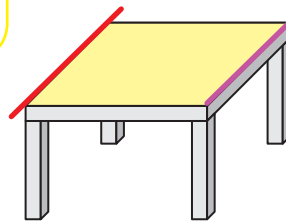


fig. 2

În figură este reprezentată o **dreaptă** obținută prin prelungirea imaginărilor a muchiei mesei, desenată cu roșu.



Ce reprezintă suprafața mesei, colorată cu galben? Dar muchia mesei, colorată cu mov?

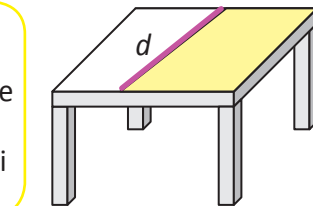


fig. 3

Suprafața mesei reprezintă un **plan**, iar muchia mesei reprezintă un **segment de dreaptă**.



Dacă pe suprafața mesei trasăm o dreaptă d se observă că aceasta împarte planul în două părți. Oricare dintre aceste părți formează un **semiplan**.

- Cuvântul **geometrie** este de origine greacă și este format din cuvintele *geo* = pământ și *metron* = măsură.
- Cuvântul **punct** este de origine latină: *punctum* = înțepătură.
- Cuvântul **plan** este de origine latină: *planus* = neted.



Să ne imaginăm o sfoară bine întinsă, nesfârșit de lungă. Aceasta este o **dreaptă**. Dacă tăiem într-un loc această sfoară se obțin două părți, fiecare dintre ele constituind o **semidreaptă**. Cele două semidrepte astfel formate sunt **semidrepte opuse**. Semidreapta este mărginită la un capăt, numit origine (unde sfoara a fost tăiată), și nemărginită la celălalt capăt.

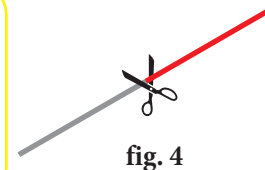


fig. 4



Dacă tăiem acea sfoară bine întinsă și nesfârșit de lungă în două locuri vom obține între cele două tăieturi o bucată mărginită din sfoară care se numește **segment**. Prin urmare, segmentul este o porțiune dintr-o dreaptă și este mărginit la ambele capete.

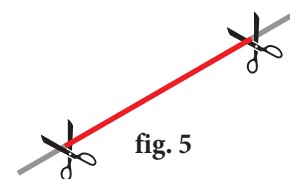


fig. 5



ÎNȚELEG

Punctul se notează cu o literă mare a alfabetului latin și se desenează astfel:



Observații:

- Punctul nu are dimensiuni.
- Privind spațiul înconjurător, ne putem imagina că reprezintă puncte: vârful ascuțit al unui creion sau compas, o stea noaptea pe cer sau o muscă pe un perete.
- Dacă punctele A și B sunt diferite, scriem $A \neq B$, dacă notăm cu C și D același punct, scriem $C = D$.



Dreapta (linia dreaptă) se notează cu o literă mică sau cu două litere mari ale alfabetului latin și se desenează astfel:

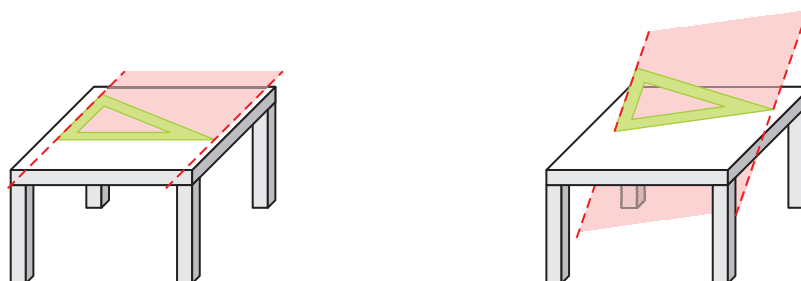


Observații:

- Dreapta este nemărginită, adică se poate prelungi în ambele părți la nesfârșit.
- Dreapta conține o infinitate de puncte.
- Dreptele se trasează cu ajutorul riglei.
- Nu putem desena decât o parte din dreaptă.

Planul se poate compara cu suprafața unui perete, a unei mese, a tablei de la clasă, a ușii etc.

La fel ca și dreapta, planul este nemărginit (nelimitat). Se poate spune că planul are două dimensiuni: lățime și lungime, nesfârșite în ambele sensuri. Desigur că nu putem desena decât o parte dintr-un plan, dar trebuie să ne imaginăm că planul este nesfârșit.



Observații:

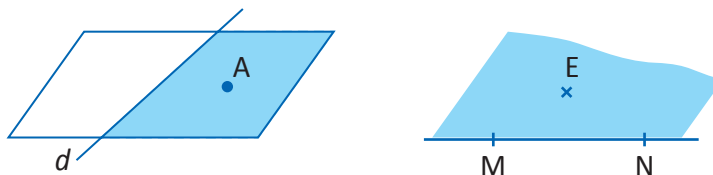
- Planul conține o *infinitate* de puncte.
- Dreapta care trece prin două puncte diferite dintr-un plan are toate punctele situate în acel plan.

Planul se poate reprezenta astfel:



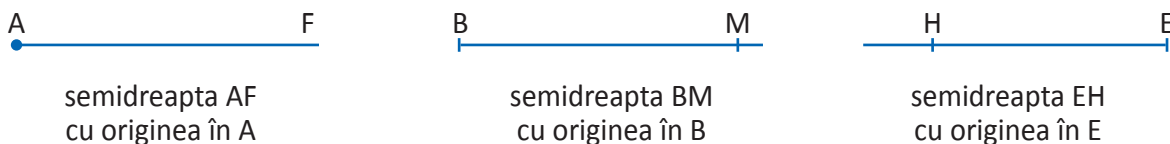
Semiplanul se obține trasând într-un plan o dreaptă și luând doar o parte a planului delimitată de acea dreaptă. Prin urmare, semiplanul este format din toate punctele dintr-un plan situate de aceeași parte a unei drepte din acel plan. Dreapta care delimitează semiplanul se mai numește **frontieră**.

Semiplanul se desenează astfel:



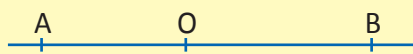
Semidreapta este o porțiune dintr-o dreaptă, mărginită într-o parte de un punct numit origine și nemărginită în cealaltă parte.

Semidreptele se desenează și se notează astfel:



Observație:

• Două semidrepte diferite care au aceeași origine și se găsesc pe aceeași dreaptă numită **dreaptă suport** sunt **semidrepte opuse**.



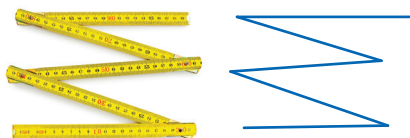
Semidreptele OA cu originea în O și OB cu originea în O (A, O, B coliniare) sunt semidrepte opuse.

Segmentul de dreaptă este o parte dintr-o dreaptă cuprinsă între două puncte numite extremități sau capete. Segmentul se desenează astfel:



Observații:

- **Linia frântă** este formată din două sau mai multe segmente care nu sunt situate pe aceeași dreaptă;
- Linia frântă poate fi **linie frântă deschisă** sau **linie frântă închisă**.



linie frântă deschisă



linie frântă închisă

EXERSEZ

- 1 Enumerați trei obiecte din jurul vostru care pot reprezenta puncte, drepte, respectiv plane.
- 2 Ionel povestește: „Am fost la Sinaia și am urcat până în vârful muntelui. Mai întâi am mers pe șoseaua în serpentine, apoi pe poteci. De acolo de sus, de pe platou, se vedea orașul cu casele ca niște cutii de chibrituri, iar oamenii abia se întrezăreau pe străzi“. Subliniați cuvintele care pot fi asociate cu unele figuri geometrice cunoscute de voi.
- 3 Priviți imaginea și identificați următoarele elemente geometrice: puncte, dreaptă, semidreaptă, segment, linii frânte sau curbe.
- 4 Asociați fiecărui desen din coloana A denumirea corespunzătoare din coloana B:



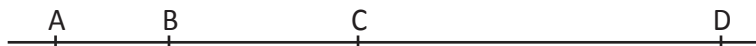
- | A | B |
|----|----------------|
| 1) | a) plan |
| 2) | b) semidreaptă |
| 3) | c) dreaptă |
| 4) | d) semiplan |
| 5) | e) segment |
| 6) | f) punct |

- 5 Stabiliți valoarea de adevăr pentru următoarele propoziții:
- a) Punctul are ca dimensiune raza cercului;
- b) Un segment AB conține doar două puncte;
- c) O dreaptă conține un număr nesfârșit de puncte;
- d) Dacă 4 puncte D, E, F și H sunt situate pe aceeași dreaptă, în această ordine, se poate spune că semidreapta HF (cu originea în H) este aceeași cu semidreapta HD (cu originea în H);
- e) Dacă 3 puncte A, B, C sunt situate pe aceeași dreaptă, în această ordine, se poate spune că dreptele AB și BC sunt diferite;
- f) Dacă 3 puncte A, B, C sunt situate pe aceeași dreaptă, în această ordine, se poate spune că punctul C face parte din segmentul AB.

- 6 Desenați:
- a) o dreaptă; b) un segment; c) un plan; d) un punct; e) o semidreaptă; f) un semiplan.

- 7 Scrieți: a) toate denumirile posibile pentru dreapta din figură;

- b) toate segmentele din figură;
- c) toate semidreptele din figură.



8 Desenați:

- două segmente AC și BD care să aibă un singur punct comun;
- două segmente EF și KL astfel încât punctul E să facă parte din ambele segmente.

9 Completați spațiile punctate astfel încât să se obțină propoziții adevărate:

- dacă două semidrepte diferite au aceeași dreaptă suport și aceeași origine, se numesc ...;
- originea semidreptei OB este punctul

10 Desenați:

- segmentele CD și EH astfel încât ele să nu aibă în comun segmentul ED;
- segmentele PA și PH astfel încât ele să aibă mai multe puncte comune;
- segmentele PA și PH astfel încât ele să coincidă;
- semidreptele OB și OE astfel încât ele să nu aibă aceeași dreaptă suport și să aibă un singur punct comun;
- semidreptele OB și OE astfel încât ele să fie semidrepte opuse.

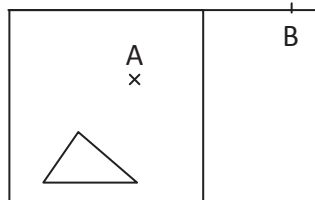
11 Alegeți varianta corectă. Dacă se știe că punctele A, B, C sunt situate, în această ordine, pe aceeași dreaptă, atunci:

- punctul C face parte din dreapta AB;
- dreapta BC nu coincide cu dreapta AB;
- semidreapta AB cu originea în A nu conține punctul C.

12 Relatați în cinci fraze o plimbare în parc folosind cuvinte care să evoce puncte, linii drepte, semidrepte, segmente, plane și semiplane.

13 În figura următoare, un punct A și un triunghi se găsesc într-un pătrat, iar punctul B este situat pe prelungirea unei laturi a pătratului.

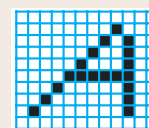
- Punctul A face parte din planul pătratului?
- Punctul A face parte din planul triunghiului?
- Punctul B face parte din planul triunghiului?
- Punctul B face parte din planul pătratului?



ACTIVITATE PRACTICĂ

Imaginea pe ecranul unui monitor de calculator este alcătuită din puncte numite *pixeli*. Ecranul este împărțit de linii drepte verticale și orizontale într-o rețea de pixeli. La intersecția unei linii drepte verticale cu una orizontală se obține un pixel. Dacă sunt, de exemplu, 800 de linii drepte verticale și 600 de linii orizontale spunem că rezoluția ecranului este 800 x 600 pixeli, adică numărul total de pixeli cu ajutorul cărora este afișată orice imagine pe ecran.

• Utilizați o coală de hârtie milimetrică pe care, prin marcarea cu creion sau cerneală a pixelilor necesari, să „scrieți” cuvintele PUNCT și PIXEL. Desenați apoi în mod asemănător trei linii drepte: o dreaptă orizontală, una verticală și una înclinată (oblică).



32. Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă; puncte coliniare; „prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una”

OBSERV

• Dacă se consideră o dreaptă m și un punct A , atunci există doar două posibilități:

punctul A situat pe dreapta m



punctul A situat în exteriorul dreptei m



• Să desenăm un punct E . Construim cu ajutorul riglei o dreaptă d_1 care să treacă prin punctul E . Construim o altă dreaptă d_2 care să treacă prin punctul E . Construim o a treia dreaptă d_3 care să treacă prin punctul E .

Prin urmare, **printr-un punct trece o infinitate de drepte.**

• Să desenăm două puncte A și B . Trasăm o dreaptă care să treacă prin punctele A și B . Construind o altă dreaptă care să treacă prin aceleași puncte A și B , observăm că aceasta coincide cu prima.

Prin urmare, **prin două puncte diferite trece o dreaptă și numai una.** Se mai poate spune că **două puncte diferite determină o singură dreaptă.**

ÎNȚELEG

Dacă prin trei sau mai multe puncte distincte trece o dreaptă și numai una, punctele se numesc **coliniare**.



fig. 1

Punctele A , B și C sunt coliniare.

Dacă prin trei sau mai multe puncte distincte nu se poate trasa o singură dreaptă care să le conțină, atunci aceste puncte sunt **necoliniare**.

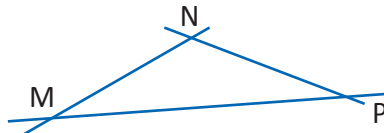


fig. 2

Punctele M , N și P sunt necoliniare.

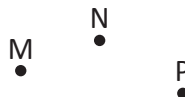
APLIC

Punctele A , B , C și D sunt coliniare?



Da, pentru că le pot uni printr-o dreaptă.

Punctele M , N , P sunt coliniare?



Nu, pentru că nu le pot uni printr-o singură dreaptă.

Dar punctele E și H sunt coliniare?



Da, pentru că le pot uni printr-o dreaptă.

EXERSEZ

1 Desenați o dreaptă f și două puncte A și O situate în poziții diferite față de dreapta f .

2 Alegeți răspunsul corect.

Printr-un punct pot trece:

- a) două drepte diferite;
- b) o infinitate de drepte;
- c) o singură dreaptă.

3 Alegeți răspunsul corect.

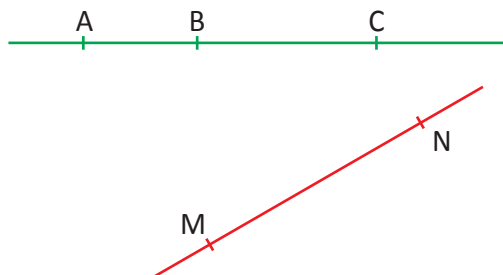
Prin două puncte diferite pot trece:

- a) două drepte diferite;
- b) o infinitate de drepte;
- c) o singură dreaptă.

4 Enumerați pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă.

5 Privind figura alăturată, Ionel face următoarele afirmații:

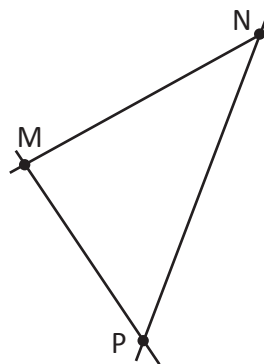
- a) Punctul A este situat pe dreapta AB;
- b) Punctul C nu este situat pe dreapta AB;
- c) Dreapta AC trece prin punctul B;
- d) Dreapta BC nu trece prin punctul A;
- e) Dreptele MN și AB se întâlnesc (se intersectează) într-un punct;
- f) Punctele A, B, C sunt coliniare;
- g) Punctele A și M sunt necoliniare.



Care dintre afirmațiile lui Ionel sunt adevărate și care false? De ce?

6 Priviți cu atenție figura alăturată, apoi completați tabelul:

Punctul și dreapta	Poziția relativă a punctului față de dreaptă
Punctul M, dreapta NP	Punctul M este situat în exteriorul dreptei NP
Punctul M, dreapta MP	?
Punctul N, dreapta NP	?
Punctul N, dreapta MN	?
Punctul P, dreapta MN	?
Punctul P, dreapta NP	?

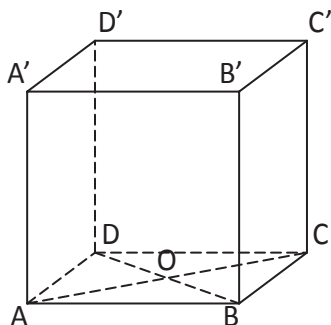


7 Desenați punctele A, B și C astfel încât semidreptele BA cu originea în B și BC cu originea în B să fie opuse, iar punctul D exterior dreptei AB. Stabiliți dacă:

- a) punctele B, C și D sunt coliniare;
- b) punctul C aparține dreptei AB;
- c) punctele B și D sunt coliniare.

8 În cubul din figura de mai jos găsiți și scrieți:

- un punct situat pe dreapta AB;
- o dreaptă care să treacă prin punctul B;
- trei puncte coliniare;
- patru puncte necoliniare.



9 Desenați și notați:

- trei puncte diferite necoliniare;
- patru puncte coliniare;
- două drepte diferite care să nu treacă printr-un punct dat A;
- două puncte diferite situate de o parte și de alta a unei drepte date d ;
- trei puncte distincte situate de aceeași parte a unei drepte date d .

10 Punctele P și Q sunt situate de o parte și de alta a dreptei d . Găsiți un punct R situat pe dreapta d astfel încât punctele P, Q și R să fie coliniare.

11 Completați spațiile punctate astfel încât să se obțină propoziții adevărate:

- Punctele care se găsesc pe aceeași dreaptă se numesc ... ;
- Două puncte nu pot fi ... ;
- Există minim ... puncte necoliniare.

12 a) 1 001 puncte pot fi situate pe aceeași dreaptă d ? Dar 10^{100} puncte? De ce?

b) Putem folosi expresia „două puncte sunt necoliniare”? Dar expresia „două puncte sunt coliniare”? De ce?

13 Desenați:

- două semidrepte diferite, cu aceeași origine și care să nu fie opuse;
- două segmente de dreaptă diferite, cu cel puțin două puncte comune;
- două drepte diferite, cu două puncte comune.

14 Se dau trei puncte distincte. Câte drepte obținem dacă unim punctele două câte două? Rezolvați o problemă asemănătoare pentru 4 puncte, apoi pentru 5 puncte. Analizați toate posibilitățile și desenați figurile corespunzătoare.

15 Punctele P și Q sunt situate de aceeași parte a dreptei d . Găsiți un punct R situat pe dreapta d astfel încât punctele P, Q și R să fie coliniare.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

16 Câte drepte trec prin trei puncte necoliniare? Dar prin patru puncte necoliniare trei câte trei? Formulați și rezolvați o problemă asemănătoare pentru 5, 6, 10 și 20 puncte.

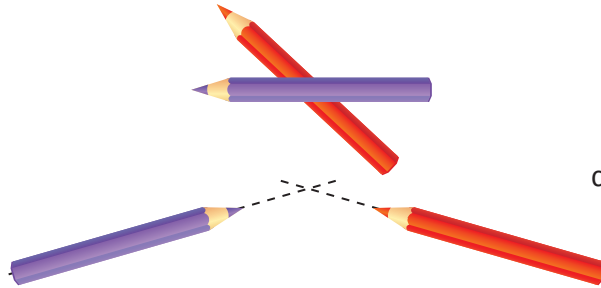
33. Pozițiile relative a două drepte: drepte concurente și drepte paralele

OBSERV

Dacă așezăm pe suprafața unei mese (în plan) două creioane (considerând că sunt două drepte), vom constata că acestea se vor găsi în una dintre următoarele poziții:



a) paralele

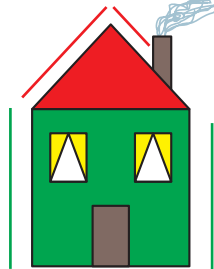


b) concurente (se intersectează)



c) confundate (suprapuse)

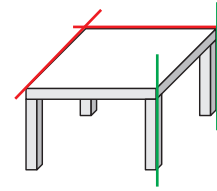
drepte concurente



drepte paralele

De asemenea, dacă privim în jurul nostru, vom descoperi drepte **paralele** și **concurente**. În desenele alăturate sunt prezentate astfel de poziții de drepte. Descoperiți și alte drepte paralele și concurente?

drepte concurente



drepte paralele

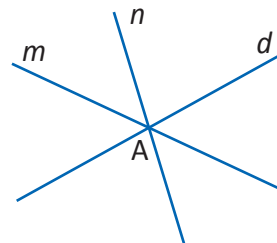
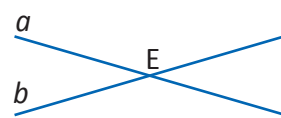
ÎNȚELEG

În plan, pozițiile a două drepte pot fi:

- **Drepte concurente** – drepte care se intersectează într-un punct, adică au un singur punct comun.



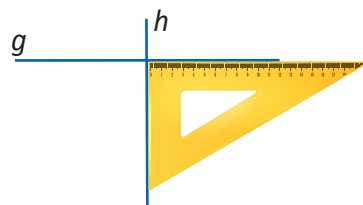
Dreptele a și b sunt concurente în punctul E .



Pot fi și mai multe drepte concurente. Dreptele m , n și d sunt concurente în punctul A .



Dacă două drepte concurente formează **unghi drept**, atunci spunem că dreptele sunt **perpendiculare**.



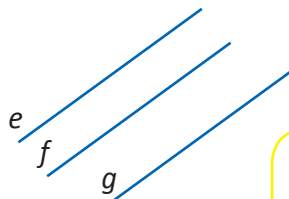
Dreptele g și h sunt perpendiculare (concurente perpendiculare).



• **Drepte paralele** – drepte situate în același plan, care nu se intersectează oricât le-am prelungi, adică nu au niciun punct comun.



Dreptele h și c sunt paralele.



Dreptele e, f și g sunt paralele.



• **Drepte confundate** (sau care **coincid**) – drepte identice, de fapt este una și aceeași dreaptă, notată cu două litere diferite.



Dreptele j și k coincid, adică sunt identice.

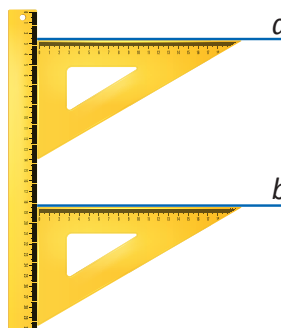


APLIC

Pentru a construi două drepte paralele folosim rigla și echerul și aplicăm metoda numită a „transportului paralel”, când deplasăm echerul prin lunecare de-a lungul riglei.

Construiți în acest fel pe o coală velină:

- trei drepte paralele;
- cinci drepte paralele „egal depărtate una de alta” (echidistante) – ca liniile caietului „dictando”. Încercați să aplicați aceeași metodă dar așezând echerul cu latura mai lungă (ipotenuza) de-a lungul riglei.



Dreptele a și b sunt paralele.



EXERSEZ

1 Completați spațiile punctate astfel încât să se obțină propoziții adevărate:

- Dacă două drepte nu se intersectează, oricât le-am prelungi, se numesc ...
- Dacă două drepte se intersectează se numesc ...
- Dacă două drepte au două puncte comune se numesc ...

2 Enumerați pozițiile relative a două drepte diferite situate în același plan.

3 Privind fig. 1, Dan face următoarele afirmații:

- Dreptele a și b sunt paralele;
- Dreptele a și CD nu sunt paralele;
- Dreptele AB și CD sunt paralele;
- Dreptele b și CD sunt concurente.

Care dintre afirmațiile lui Dan sunt adevărate și care false? De ce?

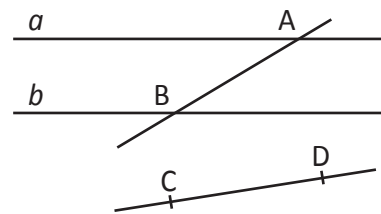


fig. 1

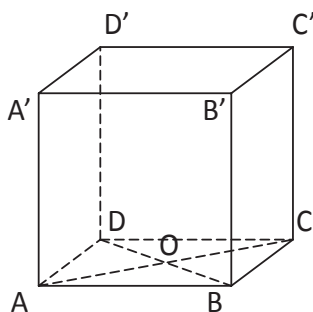


4 Desenați:

- trei drepte paralele;
- trei drepte concurente într-un punct A;
- trei drepte concurente două câte două care să nu aibă niciun punct comun toate trei;
- două drepte a și b dintre care numai una să fie paralelă cu o dreaptă dată d .

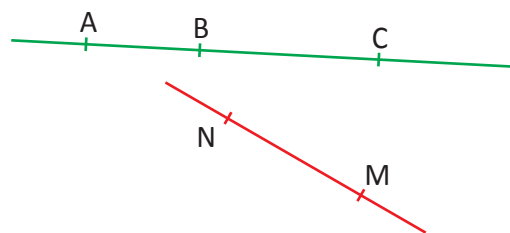
6 În cubul din figura de mai jos găsiți și scrieți:

- două drepte concurente în punctul C;
- trei drepte concurente în punctul D;
- trei drepte paralele cu dreapta BB' ;
- o dreaptă paralelă cu dreapta $A'C'$;
- trei drepte concurente în D.



8 Priviți figura alăturată și stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:

- Semidreapta BA cu originea în B se intersectează cu dreapta MN;
- Dreptele AB și MN sunt paralele;
- Dreptele BC și MN sunt concurente;
- Dreptele AB și BC sunt confundate;
- Semidreapta NM cu originea în N și semidreapta BC cu originea în B nu au niciun punct comun;
- Semidreapta AB cu originea în A și semidreapta MN cu originea în M se intersectează.



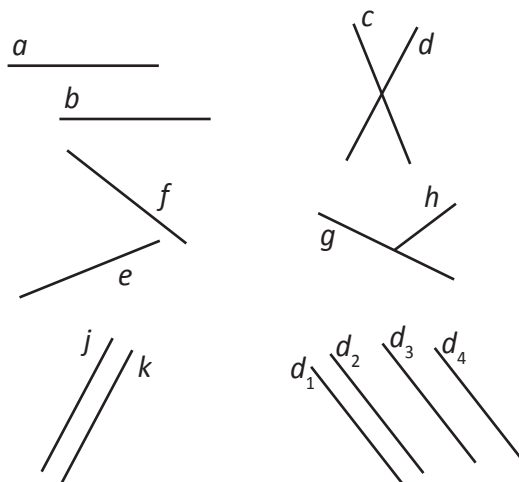
9 Desenați trei drepte concurente două câte două. Câte cazuri deosebiți? Câte puncte de intersecție a cel puțin două dintre ele se pot pune în evidență în fiecare caz?

10 Despre trei drepte distincte două câte două se știe că două sunt paralele și că alte două sunt concurente. Câte perechi de drepte sunt concurente?

5 Priviți figura 1 și completați tabelul:

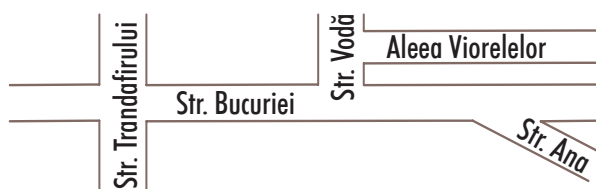
Dreptele	Poziția relativă a dreptelor
Dreptele a și b	Dreptele a și b sunt paralele
Dreptele b și CD	?
Dreptele AB și CD	?
Dreptele AB și b	?
Dreptele a și AB	?

7 Care dintre următoarele drepte sunt concurente și care dintre acestea sunt paralele?



11 Priviți următoarea hartă și stabiliți:

- Care sunt străzile paralele;
- Care sunt străzile perpendiculare.

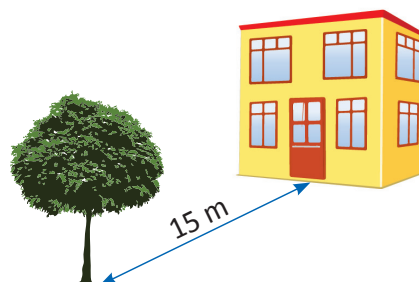
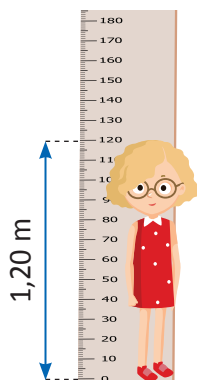


34. Distanța dintre două puncte; lungimea unui segment

OBSERV

• Înălțimea unui om poate fi considerată distanța dintre două puncte: distanța de la creștetul capului până la călcâi.

• Distanța de la pom la casă este distanța de la punctul unde se află pomul la punctul unde este intrarea în casă.



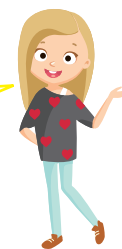
Dacă unim două puncte ce obținem?

Un segment!



Distanța dintre două puncte A și B se măsoară cu rigla sau cu ruleta. Lungimea unui segment AB este distanța măsurată între capetele segmentului A și B. Se notează AB.

Atenție! Cu AB notăm și dreapta dar, în funcție de context, ne dăm seama dacă este vorba despre o dreaptă sau o lungime a unui segment.



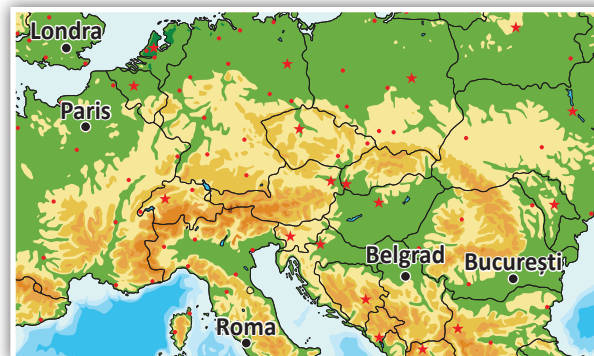
ÎNȚELEG

Distanța dintre două puncte A și B se notează $d(A, B)$ și avem relația $d(A, B) = AB$, citim „distanța dintre punctele A și B este egală cu lungimea segmentului AB”. Dacă lungimea segmentului AB este de 3 cm se scrie $AB = 3 \text{ cm}$. Scriem de asemenea $d(A, B) = 3 \text{ cm}$.

APLIC

Stabiliți valoarea de adevăr a afirmațiilor:

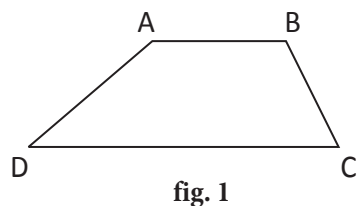
- distanța București – Paris este mai mică decât distanța București – Roma;
- distanța Paris – Londra este mai mare decât distanța București – Belgrad;
- distanța Paris – Londra este mai mică decât distanța București – Londra.



EXERSEZ

1 Măsurați în milimetri lungimile segmentelor din figura 1 și completați tabelul:

Segmentul	Rezultatul măsurării	Notația
AB	... mm	$AB = \dots \text{ mm}$
BC	?	?
CD	?	?
AD	?	?



2 Privind fig. 1, Ionel face următoarele afirmații:

- Segmentul AB are lungimea de 3 cm;
- Distanța dintre B și D este de aproximativ 6 cm;
- $AD > BC$;
- Cea mai mică distanță dintre două din punctele A, B, C și D este BC, iar cea mai mare este BD.

Care dintre afirmațiile lui Ionel sunt adevărate și care sunt false? De ce?

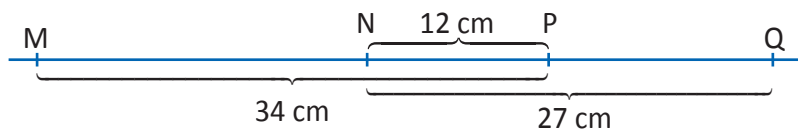
3 Luați o cutie de pastă de dinți sau alt ambalaj în formă de cuboid și măsurați în centimetri:

- dimensiunile cuboidului (lungimea, lățimea și înălțimea);
- diagonalele a trei fețe care au un vârf comun;
- estimați lungimea diagonalei cuboidului.

Găsiți o modalitate de a nota rezultatele obținute.

4 Pe semidreapta OA, cu originea în O, se reprezintă punctele P și Q astfel încât distanțele de la ele la originea semidreptei să fie egale, $d(P; O) = d(Q; O)$. Ce putem spune despre cele două puncte P și Q?

5 Pe o dreaptă se consideră punctele distincte M, N, P și Q în această ordine, astfel încât $MP = 34 \text{ cm}$, $NQ = 27 \text{ cm}$ și $NP = 12 \text{ cm}$. Aflați lungimile MN, PQ și MQ.



- 6 Desenați punctele A, B și C dacă:
- $AB = 5 \text{ cm}$; $BC = 2 \text{ cm}$; $AC = 7 \text{ cm}$;
 - $AB = 5 \text{ cm}$; $BC = 6 \text{ cm}$; $AC = 7 \text{ cm}$;
 - $AB = 7 \text{ cm}$; $BC = 2 \text{ cm}$; $AC = 4 \text{ cm}$.

În ce caz punctele sunt coliniare? Dar necoliniare? Punctele A, B și C se pot desena în toate cele trei cazuri? Puteți stabili o regulă?

OBSERV



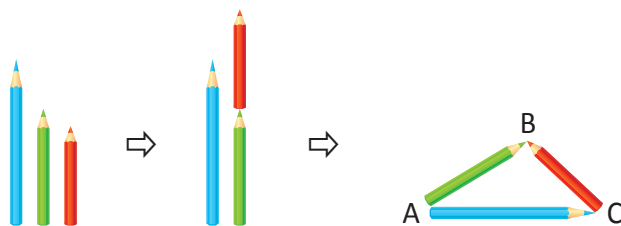
Dacă vrem să desenăm 3 puncte distincte A, B și C, având dimensiunile celor 3 segmente de dreaptă AB, BC și AC, vom obține una dintre cele două situații: punctele sunt coliniare sau necoliniare.

Să considerăm că cele 3 segmente sunt reprezentate prin lungimile a trei creioane. Hai să observăm ce situații ar putea să apară.

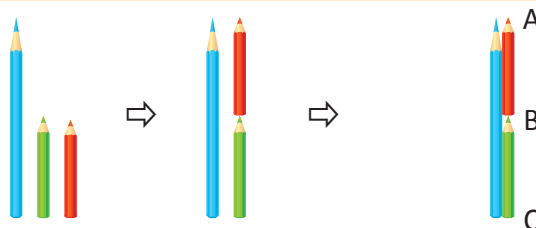




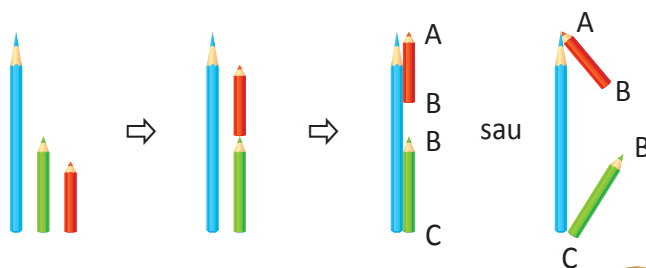
(1) Dacă suma a oricare două dintre cele 3 segmente este mai mare decât al treilea segment, cele 3 creioane pot forma un triunghi, deci punctele A, B și C vor fi necoliniare.



(2) Dacă suma a două dintre cele 3 segmente este egală cu al treilea segment, cele 3 creioane se vor suprapune, deci punctele A, B și C vor fi coliniare.



(3) Dacă suma a oricare două dintre cele 3 segmente este mai mică decât al treilea segment, cele 3 creioane nu pot forma un triunghi, dar punctele A, B și C nu pot fi nici coliniare, căci punctul B nu poate fi în două locuri deodată, deci această situație este imposibilă.



Prin urmare, în orice triunghi, suma oricăror două laturi este mai mare decât a treia latură și vârfurile triunghiului vor fi trei puncte necoliniare, iar dacă suma a două dintre cele 3 segmente este egală cu al treilea segment, cele 3 puncte vor fi coliniare.

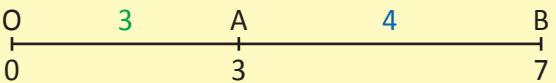


7 Stabiliți ordinea pe o dreaptă a punctelor A, B și C dacă:

- a) $AB = 56$ cm, $AC = 80$ cm, $BC = 24$ cm;
- b) $BC = 17$ cm, $CA = 20$ cm, $AB = 37$ cm;
- c) $AC = 24$ cm, $AB = 12$ cm, $BC = 36$ cm.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

8 Pe o axă a numerelor s-au reprezentat punctele A(3), B(7) și C(10). Dacă etalonul axei este centimetrul, calculați distanțele $d(A; B)$, $d(A; C)$ și $d(C; B)$. Rezolvați aceeași problemă dacă A(45), B(125) și C(348).

Indicație:  $A(3) \Rightarrow OA = 3$ $B(7) \Rightarrow OB = 7$ $\Rightarrow AB = 7 - 3 = 4$

9 Se consideră punctele coliniare A, B, C și D, astfel încât $AC + CD = AD$ și $CD - DB = CB$. Stabiliți ordinea punctelor pe dreaptă.

10 Se dau punctele coliniare A, O, C și B, în această ordine, astfel încât $AO = OB$. Arătați că $AC - 2 \cdot OC = 2 \cdot OB - AC$.

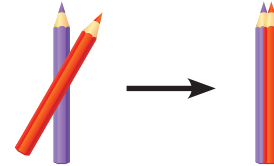
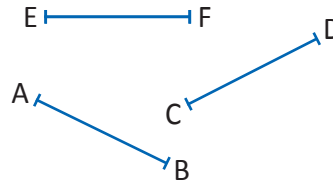
35. Segmente congruente (construcție); mijlocul unui segment; simetricul unui punct față de un alt punct

ÎMI AMINTESC!

- Cum se poate stabili dacă două segmente de dreaptă au lungimi egale?



Dacă două sau mai multe segmente coincid prin suprapunere înseamnă că ele au aceeași lungime.



Pentru a constata că două segmente au lungimi egale putem folosi o riglă negradată.

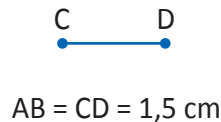
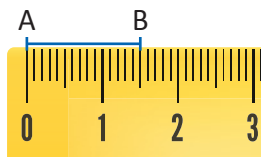


Așezăm capătul riglei negradate în punctul K și marcăm cu creionul pe riglă punctul L. Apoi așezăm rigla cu capătul în punctul M și dacă punctul N este în dreptul semnului de pe riglă corespunzător punctului L, atunci segmentele sunt congruente.

$$KL = MN$$



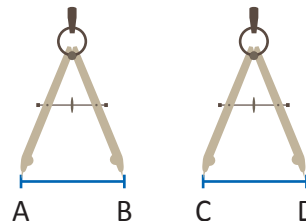
Pentru a constata că două segmente au lungimi egale putem folosi și o riglă gradată.



$$AB = CD = 1,5 \text{ cm}$$

Putem folosi și compasul.

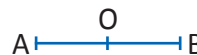
$$AB = CD$$



Dacă un punct O este situat pe un segment AB la egală depărtare de capetele segmentului, adică $AO = OB$, spunem că punctul O este **mijlocul segmentului AB**.

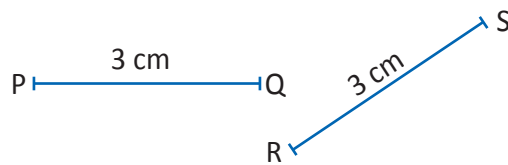


Dacă unim un punct A cu un alt punct O, apoi prelungim segmentul AO cu segmentul OB, astfel încât $AO = OB$, putem spune că punctul B este **simetricul punctului A față de punctul O**.



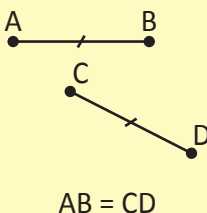
ÎNȚELEG

Segmentele congruente sunt segmente de dreaptă care au aceeași lungime. Segmentele PQ și RS din figură au lungimile egale și se notează $PQ = RS = 3 \text{ cm}$.

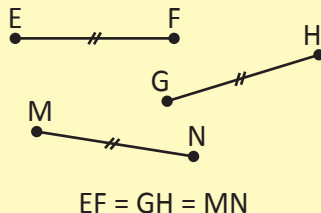


Observație:

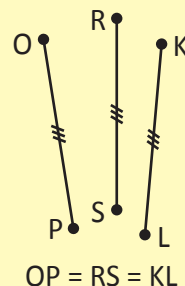
În desen, segmentele congruente se pot nota astfel:



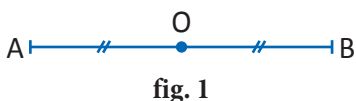
sau



sau



Mijlocul unui segment este punctul (situat pe segment) care împarte segmentul în două segmente congruente.



A, O, B coliniare
 $AO = OB$

O este mijlocul segmentului AB

Simetricul unui punct față de alt punct

În fig. 1, se poate spune că punctul B este simetricul punctului A față de punctul O.

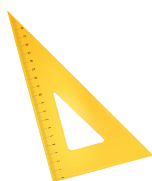
APLIC

Reprezentați pe o axă a numerelor naturale punctele $A(a)$ și $B(b)$ ale căror numere sunt date în tabelul alăturat. Dacă punctul $M(m)$ este mijlocul segmentului AB, aflați numărul m corespunzător punctului M. Găsiți o formulă (regulă) de obținere a lui m și verificați dacă poate fi folosită și pentru alte numere.

a	1	2	3	8	0
b	3	4	7	10	8
m	?	?	?	?	?

EXERSEZ

1 Asociați fiecărui instrument pentru măsurarea lungimilor denumirea corespunzătoare.



1)
a) metrul tâmplarului



2)
b) metrul de croitorie



3)
c) rigla gradată



4)
d) rigla negrată



5)
e) ruleta



6)
f) echerul



7)
g) compasul

- 2 Desenați și notați: a) un segment de 5 cm;
 b) două puncte, dacă distanța dintre ele este de 6,5 cm;
 c) trei puncte astfel încât distanțele dintre oricare două din ele să fie de 4 cm;
 d) patru puncte astfel încât distanțele dintre oricare două puncte din cele patru să nu fie egale;
 e) trei puncte coliniare astfel încât unul să fie situat la jumătatea distanței dintre celelalte două.
- 3 Vlad a scris: a) $AB = BC = 3$ cm; b) $OA = OB = OC = OD = OE = 3$ cm; c) $AB = 4$ cm și $AP = BP$, P nefiind situat pe dreapta AB; d) $AB = 4$ cm și $AP = BP$, P fiind situat pe dreapta AB. Reprezentați într-un desen situațiile notate de Vlad.

- 4 Desenați punctele coliniare distincte E, F, G și H dacă $EH = GF = 3$ cm, iar $HG = 2$ cm. Câte cazuri deosebiți?

- 5 Privind figura 2, Maria face următoarele afirmații:

- a) Segmentele AB și CD sunt congruente;
 b) Segmentele AD și BC nu sunt congruente;
 c) Segmentele AC și BD sunt congruente;
 d) Segmentele AD și BC sunt congruente.
 Care afirmații sunt adevărate și care false? De ce?

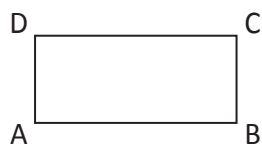


fig. 2

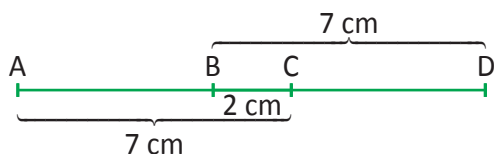
- 6 Construiți două segmente AB și CD cu același mijloc dacă:

- a) $AB = 6$ cm și $CD = 4$ cm și punctele A, B, C și D sunt coliniare;
 b) $AB = 7$ cm și $CD = 5$ cm și punctele A, B, C și D sunt necoliniare.

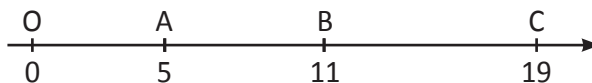
- 7 Construiți simetricul P' al unui punct P față de punctul O dacă P este situat la distanța de 5 cm de O. Considerați apoi un alt punct Q necolinar cu O și P, $OQ = 7$ cm, și construiți simetricul său Q' față de O. Verificați dacă mijloacele segmentelor PQ și $P'Q'$ sunt simetrice față de O.

- 8 Pe o dreaptă se consideră punctele A, B, C și D, distincte două câte două în această ordine, astfel încât $AB = CD = 4$ cm și $BC = 3$ cm. Arătați că $AC = BD$ și că segmentele AD și BC au același mijloc.

- 9 Pe o dreaptă se consideră punctele A, B, C și D, distincte două câte două în această ordine, astfel încât $AC = BD = 7$ cm și $BC = 2$ cm. Arătați că segmentele AD și BC au același mijloc și $AB = CD$.



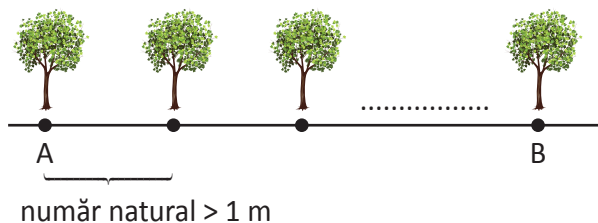
- 10 Se dau punctele A(5), B(11) și C(19) pe axa Ox a numerelor naturale. Aflați lungimile $OC - OA$ și $AC + BC$. Ce coordonată are punctul situat la egală depărtare de capetele segmentului AB?



- 11 Pe axa Ox se dau punctele A(4), B(10), C(2), D(12), M(m) și N(n), unde m și n sunt numere naturale, astfel încât $MA = MB$ și $NC = ND$. Aflați m și n. Arătați apoi că $OA + OB = OC + OD$ și aflați m și n dacă A(29), B(93), C(15), D(107).

- 12 Punctul M este mijlocul segmentului AB, iar N este un punct oarecare pe dreapta AB, exterior segmentului AB. Demonstrați că $2 \cdot MN = NA + NB$.

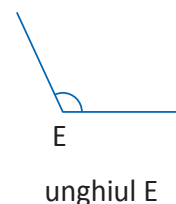
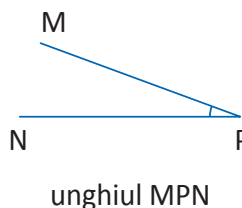
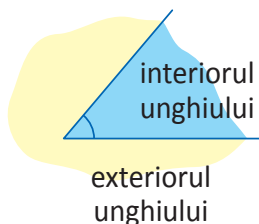
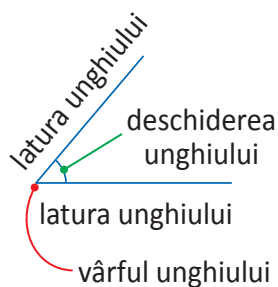
13 Pe marginea unei străzi, se plantează pomi începând din punctul A până în punctul B, la distanțe egale. Se știe că distanța AB este de 51 de metri. Dacă distanța dintre doi pomi consecutivi trebuie să fie un număr natural mai mare de un metru, aflați care este numărul maxim de pomi care se pot planta începând din punctul A până în punctul B inclusiv.



14 Mergând cu mașina pe autostradă, Ionuț privește bornele kilometrice și notează numerele lor: 23, 37, 116 și 238. Ce distanță a parcurs Ionuț între prima bornă și ultima? Apoi el se întreabă: ce distanță este între bornele situate la jumătatea distanței dintre primele două și ultimele două borne?

36. Unghi: definiție, notații, elemente, interiorul unui unghi, exteriorul unui unghi

ÎMI AMINTESC!



ÎNȚELEG

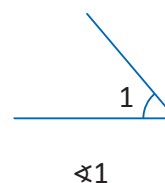
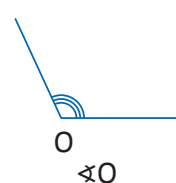
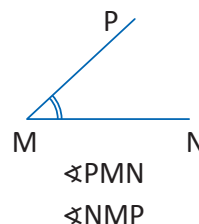
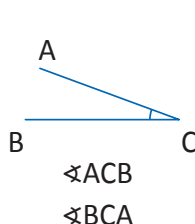
Unghiul este figura geometrică formată din două semidrepte care au aceeași origine.

Vârful unghiului este originea celor două semidrepte care formează unghiul.

Laturile unghiului sunt cele două semidrepte care formează unghiul.



Cum marcăm și notăm unghiurile?



Observații:

- Un unghi se poate scrie folosind trei litere mari, vârful unghiului fiind întotdeauna la mijloc (de exemplu: \widehat{BCA}).
- Un unghi se poate scrie folosind o singură literă mare, care este vârful unghiului (de exemplu: $\sphericalangle ACB$ se mai poate scrie și $\sphericalangle C$ sau \widehat{C}).

• Cuvântul **unghi** este de origine latină: *angulus* = colț.

EXERSEZ

1 Completați afirmațiile. În fig. 1:

- unghiul marcat cu un arc se scrie folosind 3 litere: ...;
- unghiul marcat cu două arce se scrie folosind 3 litere: ...;
- unghiul marcat cu trei arce se scrie folosind 3 litere: ...;
- laturile \sphericalangle DCO sunt semidreptele: ... și ...;

- vârful \sphericalangle OCB este ...;
- vârful \sphericalangle ADO este ...;
- laturile \sphericalangle ADC sunt semidreptele: ... și ...

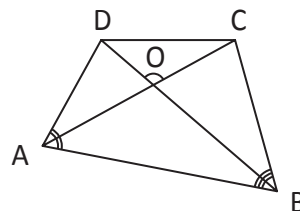


fig. 1

2 Privind fig. 1, stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:

- punctul O este situat pe o latură a unghiului DBA;
- punctul O este vârful unghiului DOC;
- punctul C este vârful unghiului CDO;
- punctul A este vârful unghiului DAC;
- punctul D este vârful unghiului DAB;
- punctul A este situat pe o latură a unghiului BCA;
- punctul O este situat în interiorul unghiului ABC;
- punctul D este situat în exteriorul unghiului ACB;
- punctul D este situat în exteriorul unghiului ABC.

3 Ce se poate spune despre unghiurile TOC, ROC, POR, TOM, COR, TOP, ROM și POT din fig. 2?

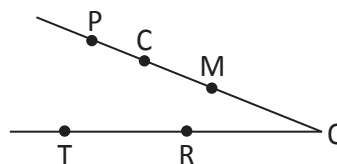


fig. 2

4 Priviți fig. 3 și alegeți varianta corectă:

- În exteriorul \sphericalangle KAB sunt situate punctele:

F, G și E	H, C, G și F	K, H și C
-----------	--------------	-----------
- În interiorul \sphericalangle KAC sunt situate punctele:

F și G	K, H și C	B și E
--------	-----------	--------
- În interiorul \sphericalangle BAC sunt situate punctele:

E, F, G și K	B, H și C	A, B, H și C
--------------	-----------	--------------
- \sphericalangle BAC și \sphericalangle HAB sunt:

diferite	identice
----------	----------
- \sphericalangle FAB și \sphericalangle FBA sunt:

diferite	identice
----------	----------

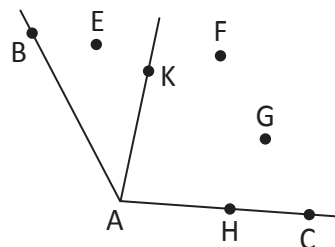


fig. 3

5 Desenați și notați corespunzător următoarele unghiuri:

- \sphericalangle MAC;
- \sphericalangle NOR;
- \sphericalangle QBD;
- \sphericalangle HIP.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

6 Desenați pe caiete fig. 2, apoi adăugați:

- unghiul TCR și marcați-l cu un arc;
- unghiul MPR și marcați-l cu două arce;
- unghiul MTO și marcați-l cu trei arce.



7 Stabiliți câte unghiuri cu vârful în punctul B sunt desenate în fig. 4 și denumiți-le folosind trei litere.

8 Privind fig. 4 specificați:

- a) care este vârful $\sphericalangle ABE$;
- b) care sunt laturile $\sphericalangle ABE$;
- c) care este vârful $\sphericalangle BAE$;
- d) care este vârful $\sphericalangle DBE$;
- e) care sunt laturile $\sphericalangle CBD$;
- f) care este vârful $\sphericalangle BED$;
- g) care sunt laturile $\sphericalangle BED$.

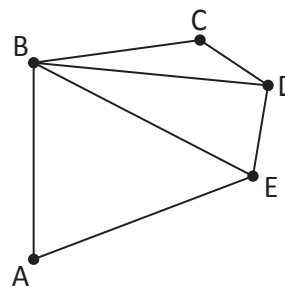
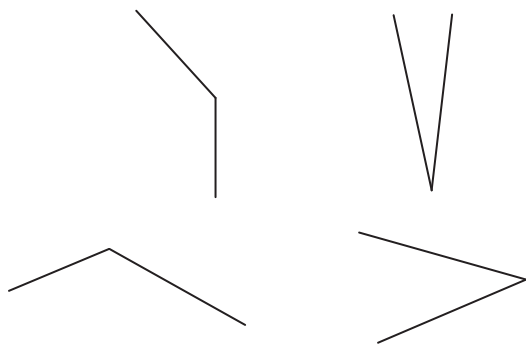


fig. 4

9 a) Desenați următoarele unghiuri pe caiet. Notați fiecare unghi folosind câte 3 litere (în fiecare dintre cele patru desene folosiți alte litere), apoi scrieți și citiți unghiurile.



b) La primele două unghiuri hașurați interiorul fiecărui unghi, iar la ultimele două unghiuri hașurați exteriorul fiecărui unghi.

10 Potriveți corespunzător unghiurile scrise în prima coloană cu desenele din a doua coloană.

$\sphericalangle ABC$	
$\sphericalangle ACB$	
$\sphericalangle CAB$	
$\sphericalangle CBA$	
$\sphericalangle BAC$	

POT MAI MULT

11 Fie punctele coliniare A, B, C, D, E în această ordine, iar punctele F, G și K de aceeași parte a dreptei AB, astfel încât B, F și G sunt coliniare, punctul F fiind situat pe segmentul BG, iar punctul K este situat în interiorul unghiului GFD. Realizați un desen corespunzător și apoi aflați:

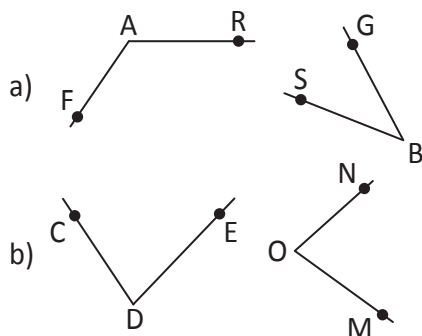
- a) partea comună dintre unghiul BFD și dreapta AB;
- b) partea comună dintre unghiul BDF și dreapta FD;
- c) partea comună dintre unghiul BDE și dreapta CK;
- d) partea comună dintre interiorul unghiului BFD și dreapta FG;
- e) partea comună dintre interiorul unghiului BFD și dreapta CE;
- f) partea comună dintre exteriorul unghiului BFD și dreapta BC;
- g) partea comună dintre interiorul unghiului GFD și dreapta AB;
- h) partea comună dintre exteriorul unghiului DFG și dreapta DE.

37. Măsura unui unghi, unghiuri congruente (măsurarea și construcția cu raportorul)

OBSERV



Cum îmi pot da seama care dintre cele două unghiuri din fiecare pereche este mai mare sau dacă sunt egale?



Exact! Înseamnă că unghiurile din cazul b) sunt egale! Se spune că unghiurile sunt congruente!

În ambele cazuri, pot copia unul dintre unghiuri pe hârtie transparentă, apoi suprapun peste celălalt unghi, vârfurile celor două unghiuri și una dintre laturi.

În cazul a) suprapun vârful B peste vârful A și latura BG peste latura AF. Observ că $\sphericalangle FAR$ este mai mare decât $\sphericalangle GBS$.

În cazul b) suprapun vârful O peste vârful D și latura ON peste latura DC. De această dată, cele două unghiuri s-au suprapus exact. Prin suprapunere ele coincid.



ÎNȚELEG

Măsura unui unghi este dată de măsura deschiderii dintre laturile sale.

Gradul este unitatea de măsură pentru măsurarea unghiurilor. Scriem 1° și citim un grad. Un submultiplu al gradului este minutul. Scriem $1'$ și citim un minut. Relația dintre grade și minute este următoarea: $1^\circ = 60'$. Unghiurile se măsoară în grade sexagesimale.

Raportorul este instrumentul cu ajutorul căruia se măsoară unghiurile.

Unghiurile congruente sunt unghiurile care coincid prin suprapunere. Unghiurile congruente au măsurile egale.

• Cuvântul **sexagesimal** este de origine latină: *sexagesimus = al șazecilea, un întreg fiind împărțit în 60 de părți egale.*

Observație:

• notația pentru congruent este \equiv .

APLIC

Cum se măsoară unghiurile cu raportorul:

Pentru a măsura unghiul AOB din fig. 1, se așază centrul raportorului în punctul O astfel încât semidreapta OB să fie în dreptul gradației de 0° de pe raportor. Dacă cealaltă latură a unghiului (semidreapta OA) se găsește în dreptul gradației de 70° de pe raportor, $\sphericalangle AOB$ este de 70° .

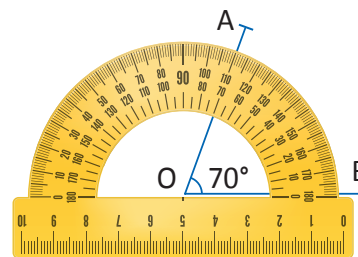
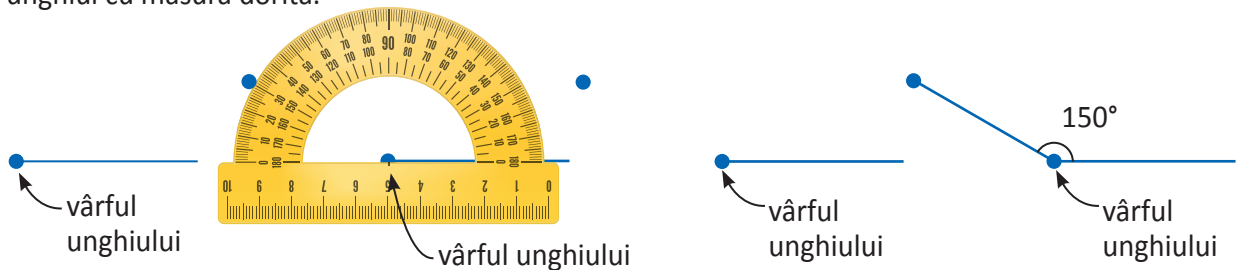


fig. 1



Cum se poate construi un unghi cu o măsură dată:

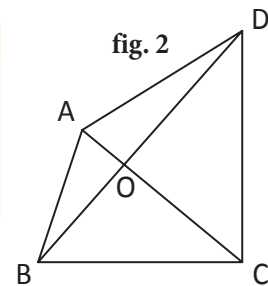
- Alegem vârful unghiului și trasăm una dintre laturile unghiului.
- Așezăm centrul raportorului în vârful unghiului și cu gradația 0° pe latura desenată.
- În dreptul gradației dorite marcăm un punct.
- Îndepărtăm raportorul și unim vârful unghiului cu punctul marcat anterior și astfel obținem unghiul cu măsura dorită.



EXERSEZ

1 a) Măsurați cu ajutorul raportorului unghiurile din fig. 2 și completați tabelul alăturat cu măsurile lor.

Unghiul	Măsura
$\sphericalangle ABO$?
$\sphericalangle BAD$?
$\sphericalangle OCD$?
$\sphericalangle AOB$?



b) Completați corespunzător spațiile cu „>”, „<” sau „=”.

$\sphericalangle ABO$? 90° ; $\sphericalangle BAD$? 90° ; $\sphericalangle OCD$? 90° ;
 $\sphericalangle AOB$? 90° ; $\sphericalangle OBC$? 90° ; $\sphericalangle BCD$? 90° .

- c) Care unghiuri din tabelul de la punctul a sunt congruente?
 d) Câte unghiuri D sunt desenate în fig. 2? Care sunt acestea și ce măsură are fiecare?

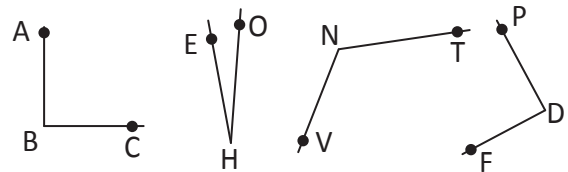
2 Privind fig. 2, George face următoarele afirmații:

- a) Unghiurile BCA și OCB coincid; b) Unghiurile BCA și OCB au vârful în B;
 c) Unghiurile BOC și AOC sunt congruente; d) Unghiul BOD are măsura de 180° .

Care dintre afirmațiile lui George sunt adevărate și care false? De ce?

3 Ordonăți crescător unghiurile alăturate, folosind: a) echerul;

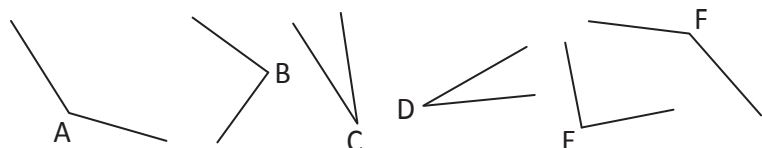
- b) o foaie de calc (hârtie transparentă);
 c) raportorul.



4 Folosind raportorul, construiți unghiuri cu măsurile de: 98° , 40° , 30° , 60° , 100° , 35° , 120° , 15° .

5 Desenați, fără a folosi raportorul, unghiuri cu măsurile de 20° , 180° , 50° , 70° . Verificați cu raportorul estimările făcute.

6 Stabiliți care dintre unghiurile alăturate sunt congruente. Cum ați procedat?



38. Clasificări de unghiuri: unghi drept, unghi ascuțit, unghi obtuz, unghi nul, unghi alungit

ÎMI AMINTESC!

unghi drept unghi ascuțit unghi obtuz

Unghiul drept este precum colțul cărții, al riglei sau unghiul mai mare al echerului.

Unghiul ascuțit are deschiderea mai mică decât unghiul drept, iar unghiul obtuz are deschiderea mai mare decât unghiul drept.

Dacă privim în jurul nostru, în sala de clasă sau în curtea școlii, observăm multe astfel de unghiuri: colțul geamului, colțul ușii, al băncii etc.

unghiuri drepte unghi obtuz
unghi ascuțit

ÎNȚELEG

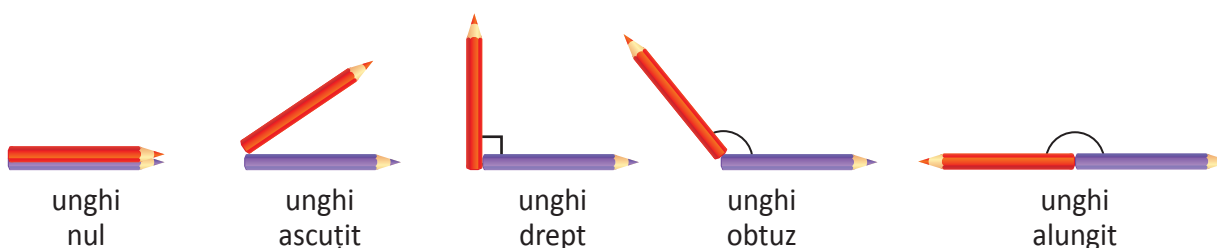
Unghiul drept este unghiul cu măsura de 90° ; se desenează și se marchează astfel:

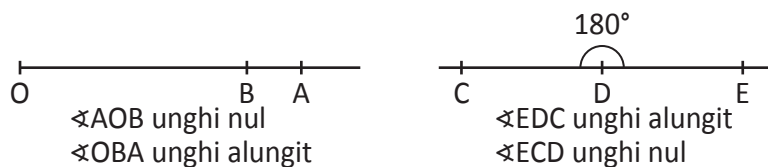
Unghiul ascuțit este unghiul cu măsura mai mică de 90° (dar mai mare de 0°).

Unghiul obtuz este unghiul cu măsura mai mare de 90° (dar mai mică de 180°).

Unghiul nul este unghiul cu măsura de 0° .

Unghiul alungit este unghiul cu măsura de 180° . Unghiul alungit are laturile una în prelungirea celeilalte, fiind format din două semidrepte opuse.



**Observații:**

- Marcajul unui unghi „cu colț” în loc de arc este specifică doar unghiului drept.
- Două drepte concurente care formează unghi drept se numesc **drepte perpendiculare**.
- Unghiul alungit sau unghiul cu laturile una în prelungirea celeilalte devine de fapt o dreaptă.
- Unghiul nul devine de fapt o semidreaptă.

EXERSEZ

1 Găsiți corespondențele dintre măsurile unghiurilor și tipul lor. Desenați apoi unghiurile folosind raportorul.

180°

20°

60°

90°

103°

0°

16°

91°

unghi drept

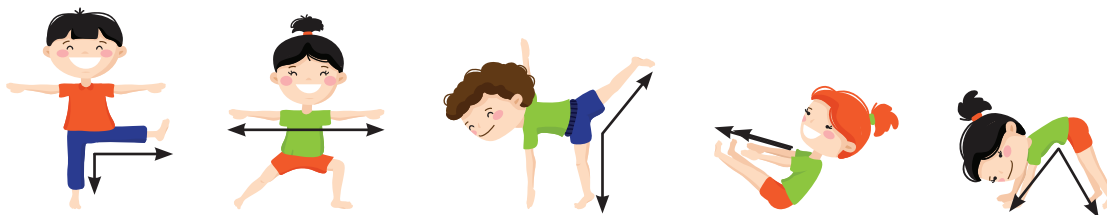
unghi alungit

unghi obtuz

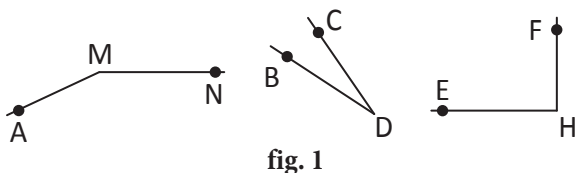
unghi ascuțit

unghi nul

2 Observați unghiurile sugerate de mișcările gimnaștilor din imagine și stabiliți ce fel de unghi descrie fiecare dintre ei.



3 Estimați tipul fiecărui unghi (drept, obtuz, ascuțit) din fig. 1. Măsurați cu raportorul și verificați.



4 Desenați cu ajutorul raportorului:

- a) un unghi drept; b) un unghi obtuz;
c) un unghi ascuțit; d) un unghi alungit;
e) un unghi nul.

Scrieți unghiurile folosind 3 litere și notați măsurile fiecărui unghi.

5 a) Care este măsura unghiului descris de acele unui ceas care indică ora 9:00? Alegeți varianta corectă.

A. 45°

B. 0°

C. 90°

D. 180°

b) Care este măsura unghiului descris de acele unui ceas care indică ora 18:00? Alegeți varianta corectă.

A. 45°

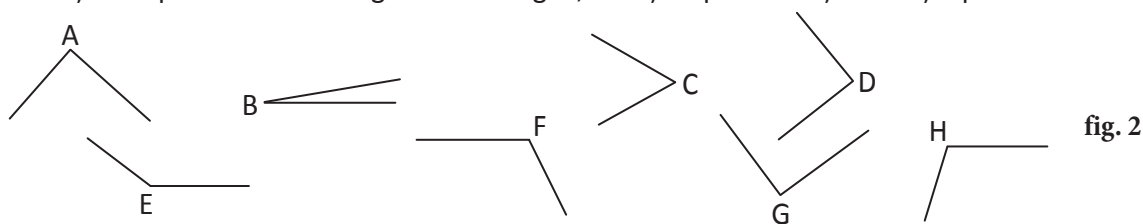
B. 0°

C. 90°

D. 180°



- 6 a) Folosiți colțul drept al echerului pentru a descoperi care dintre unghiurile din fig. 2 sunt unghiuri drepte și marcați-le corespunzător.
b) Măsurați cu raportorul toate unghiurile din fig. 2, notați-le pe caiete și stabiliți tipul fiecăruia.



- 7 Ioana face următoarele afirmații:

- a) Dacă unghiul AOB este alungit, atunci măsura unghiului BAO este unghi nul;
b) Dacă unghiul AOB este alungit, atunci punctele A, B și O sunt necoliniare;
c) Unghiul alungit are 0° ;
d) Dacă unghiurile ABM și MBC sunt unghiuri drepte, atunci unghiul ABC este alungit sau nul;
e) Dacă unghiul ABC are 180° , atunci triunghiul ABC nu există.

Care dintre afirmațiile Ioanei sunt adevărate și care false? De ce?

- 8 a) Ce fel de unghi descriu acele unui ceas care indică ora 14:15? Alegeți varianta corectă.

A. obtuz B. drept C. ascuțit D. alungit E. nul

- b) Ce fel de unghi descriu acele unui ceas care indică ora 15:00? Alegeți varianta corectă.

A. obtuz B. drept C. ascuțit D. alungit E. nul

- c) Ce fel de unghi descriu acele unui ceas care indică ora 16:30? Alegeți varianta corectă.

A. obtuz B. drept C. ascuțit D. alungit E. nul

- d) Ce fel de unghi descriu acele unui ceas care indică ora 18:05? Alegeți varianta corectă.

A. obtuz B. drept C. ascuțit D. alungit E. nul

- e) Ce fel de unghi descriu acele unui ceas care indică ora 12:00? Alegeți varianta corectă.

A. obtuz B. drept C. ascuțit D. alungit E. nul

- 9 Realizați desenul din fig. 3 pe caiete, folosindu-vă de liniatura caietului de matematică și uniți 3 puncte astfel încât să formeze:

- a) un unghi drept; b) un unghi alungit;
c) un unghi obtuz; d) un unghi ascuțit.

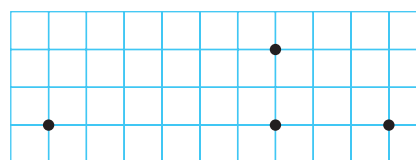


fig. 3

- 10 Desenați punctele A, B, C, E, astfel încât A, B, C sunt coliniare, C în mijlocul segmentului AB, $AC = 4$ cm, iar măsura unghiului ECB este de 30° . Aflați măsurile unghiurilor ECA, ACB, BAC, precum și lungimea segmentului AB.

- 11 Punctele E și F sunt situate de-o parte și de alta a dreptei AB, astfel încât $\sphericalangle ABE$ are 20° , iar $\sphericalangle ABF$ are 160° . Demonstrați că punctele E, B și F sunt coliniare.

39. Calcule cu măsuri de unghiuri exprimate în grade și minute sexagesimale

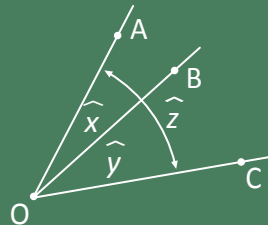
OBSERV



Observ de ce are sens să adun sau să scad măsurile de unghiuri între ele!

Dacă notăm:

$$\begin{aligned}\sphericalangle AOB &= \widehat{x} \\ \sphericalangle BOC &= \widehat{y} \\ \sphericalangle AOC &= \widehat{z}\end{aligned}$$



Observăm că:

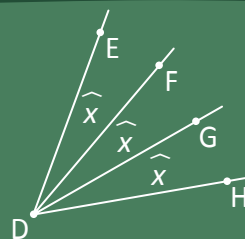
$$\begin{aligned}\widehat{x} + \widehat{y} &= \widehat{z} \\ \widehat{z} - \widehat{x} &= \widehat{y} \\ \widehat{z} - \widehat{y} &= \widehat{x}\end{aligned}$$



Observ de ce are sens să înmulțesc sau să împart o măsură a unui unghi cu un număr natural!

Dacă notăm:

$$\begin{aligned}\sphericalangle EDF &= \sphericalangle FDG = \\ &= \sphericalangle GDH = \widehat{x}\end{aligned}$$



Observăm că:

$$\begin{aligned}\widehat{x} + \widehat{x} + \widehat{x} &= \sphericalangle EDH \\ \sphericalangle EDH &= 3 \cdot \widehat{x} \\ \sphericalangle EDH : 3 &= \widehat{x}\end{aligned}$$

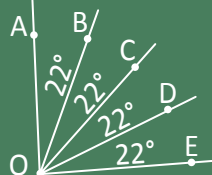
Are sens să înmulțesc măsurile de unghiuri între ele?

Nu! Dar are sens să împart o măsură a unui unghi la măsura altui unghi!



De exemplu:

$$\sphericalangle AOE = 4 \cdot 22^\circ = 88^\circ$$



Atunci îmi pot pune problema: în câte unghiuri congruente a câte 22° pot împărți un unghi cu măsura de 88° ?

$$88^\circ : 22^\circ = 4 \quad (\text{deci în 4 unghiuri})$$



ÎNȚELEG

Adunarea a două măsuri de unghiuri se face adunând grade cu grade și minute cu minute. Dacă se obțin mai mult de 60 de minute, atunci transformăm minutele în grade. (ținând cont că $1^\circ = 60'$)

Exemple: a) $37^\circ 21' + 54^\circ 38' = 91^\circ 59'$ b) $56^\circ 53' + 29^\circ 49' = 85^\circ 102' = 86^\circ 42'$
 $37^\circ + 54^\circ = 91^\circ$ și $21' + 38' = 59'$ $102' - 60' = 42'$; $60' = 1^\circ$

Scăderea a două măsuri de unghiuri se face scăzând grade din grade și minute din minute. Dacă nu avem suficiente minute la descăzut, ne împrumutăm cu un grad.

Exemple: a) $82^\circ 35' - 23^\circ 17' = 59^\circ 18'$
 $82^\circ - 23^\circ = 59^\circ$ și $35' - 17' = 18'$

b) $63^\circ 21' - 15^\circ 43' = 62^\circ 81' - 15^\circ 43' = 47^\circ 38'$
 Pentru că din $21'$ nu pot să scad $43'$, se ia 1° din 63° , se transformă în $60'$ și se adaugă la cele $21'$ ($60' + 21' = 81'$), astfel fiind posibilă efectuarea scăderii.

Înmulțirea cu un număr natural a măsurii unui unghi se face înmulțind cu acel număr atât gradele, cât și minutele. Dacă se obțin mai mult de 60 de minute, atunci transformăm minutele în grade.

Exemple: a) $32^{\circ}14' \cdot 3 = 96^{\circ}42'$

b) $27^{\circ}38' \cdot 2 = 54^{\circ}76' = 55^{\circ}16'$

Din $76'$ se scot $60' = 1^{\circ}$ și se adaugă 1° la cele 54° , iar minutele rămân $76' - 60' = 16'$.

Împărțirea la un număr natural a măsurii unui unghi se face împărțind la acel număr atât gradele, cât și minutele. Dacă rămâne rest (la împărțirea gradelor la acel număr), acesta se transformă în minute și se adaugă la minutele deja existente, apoi împărțim minutele la numărul respectiv.

Exemple:

a) $78^{\circ}21' : 3 = 26^{\circ}7'$

$78^{\circ} : 3 = 26^{\circ}$ și $21' : 3 = 7'$

b) $107^{\circ}42' : 2 = 53^{\circ}51'$

$107^{\circ} : 2 = 53^{\circ}$ rest 1°

Restul de $1^{\circ} = 60'$ se adaugă la minutele deja existente, apoi împărțim minutele la 2.

$60' + 42' = 102'$

$102' : 2 = 51'$

c) $129^{\circ} : 5 = 25^{\circ}48'$

$129^{\circ} : 5 = 25^{\circ}$ rest 4°

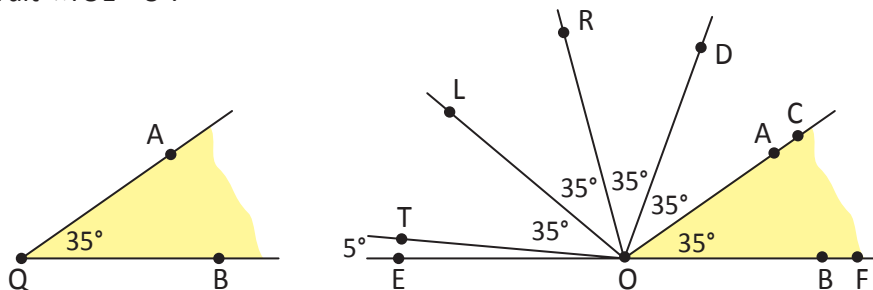
Restul de $4^{\circ} = 4 \cdot 60' = 240'$ se împarte la 5 pentru că nu avem minute deja existente.

$240' : 5 = 48'$

APLIC

Fiind dat un unghi AQB de 35° , cum putem construi un unghi de 5° , folosind doar o riglă?

Se desenează un unghi alungit EOF . Se observă că: $180^{\circ} : 35^{\circ} = 5$ rest 5° . Decupez unghiul dat AQB cu măsura de 35° (o suprafață inclusă în interiorul unghiului AQB), așez latura QB peste semidreapta OF și desenez unghiul FOC de 35° . Analog, în același semiplan se desenează alte 4 unghiuri COD , DOR , ROL și LOT , fiecare cu măsurile de 35° . Vom obține $\sphericalangle TOF = 5 \cdot 35^{\circ} = 175^{\circ}$ și $\sphericalangle TOE = 180^{\circ} - 175^{\circ} = 5^{\circ}$. Astfel s-a construit $\sphericalangle TOE = 5^{\circ}$.



EXERSEZ

1 Completați tabelul următor.

Grade	30°		103°	41°		18°	52°	12°	
Minute	$1\ 800'$	$1\ 740'$			$2\ 220'$				$3\ 660'$

2 Calculați:

a) $103^{\circ}18' + 37^{\circ}$;

b) $27^{\circ}48' + 59^{\circ}53'$;

c) $56^{\circ}18' + 39^{\circ}47'$;

d) $23^{\circ} + 15^{\circ}28'$.

3 Calculați:

a) $39^{\circ}43' - 15^{\circ}29'$;

b) $130^{\circ}12' - 47^{\circ}53'$;

c) $53^{\circ} - 41^{\circ}27'$;

d) $31^{\circ} - 19^{\circ}53'$.

4 Calculați:

a) $18^{\circ}15' \cdot 3$;

b) $13^{\circ}52' \cdot 4$;

c) $4^{\circ}54' \cdot 19$;

d) $23^{\circ}13' \cdot 4$.

5 Calculați:

a) $46^{\circ}36' : 2$;

b) $29^{\circ}32' : 4$;

c) $151^{\circ}05' : 7$;

d) $73^{\circ}15' : 5$.

6 Aproximați cu o eroare de 1° prin lipsă, respectiv prin adaos, măsurile:

a) $21^{\circ}03'$; b) $78^{\circ}52'$; c) $109^{\circ}38'$.

7 Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate, folosind fig. 1.

a) $\sphericalangle DEC + \sphericalangle CEB = \sphericalangle \dots$

h) $\sphericalangle BDC = \sphericalangle EDC - \sphericalangle \dots - \sphericalangle \dots$

b) $\sphericalangle AEB + \sphericalangle BEC + \sphericalangle CED = \sphericalangle \dots$

i) $\sphericalangle EBC - \sphericalangle \dots = \sphericalangle CBD$

c) $\sphericalangle EDC = \sphericalangle \dots + \sphericalangle \dots + \sphericalangle \dots$

j) $\sphericalangle EAB = \sphericalangle \dots + \sphericalangle \dots + \sphericalangle \dots$

d) $\sphericalangle ADC = \sphericalangle \dots + \sphericalangle \dots$

k) $\sphericalangle DAC = \sphericalangle EAC - \sphericalangle \dots$

e) $\sphericalangle DCB - \sphericalangle ECD - \sphericalangle ACB = \sphericalangle \dots$

l) $\sphericalangle DAC = \sphericalangle \dots - \sphericalangle CAB$

f) $\sphericalangle BDC = \sphericalangle ADC - \sphericalangle \dots$

m) $\sphericalangle DAC = \sphericalangle \dots - \sphericalangle \dots - \sphericalangle \dots$

g) $\sphericalangle BDC = \sphericalangle EDC - \sphericalangle \dots$

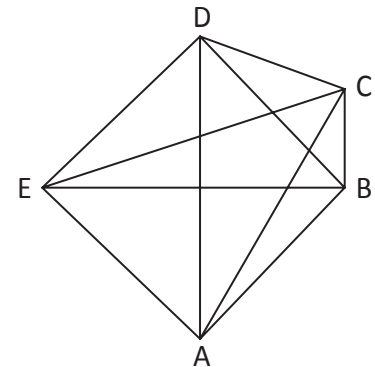


fig. 1

8 În fig. 2 unghiul EDC este drept, iar unghiul DCE are măsura de 60° . Se știe că unghiul EDM este o doime din unghiul EDC, unghiul BDM este o pătrime din unghiul EDC, unghiul DCB are măsura de 135° , unghiul CBD are măsura de $22^{\circ}30'$, unghiurile MBN și MDC sunt congruente, iar unghiurile DMB și NMB sunt congruente cu unghiul CDE.

a) Aflați măsurile unghiurilor: EDM, MDB, CDB și ECB;

b) Demonstrați că D, M, N sunt coliniare;

c) Dacă unghiurile NBC și DCB sunt congruente, aflați măsura unghiului DBM.

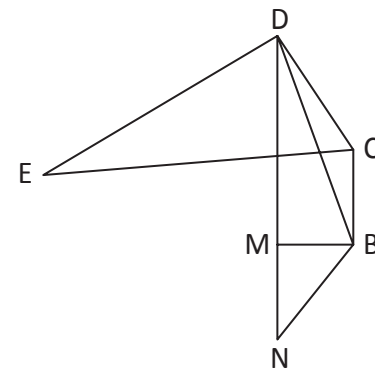


fig. 2

9 Se dă un unghi AOB cu măsura de $66^{\circ}25'$. În câte unghiuri congruente cu măsurile de $13^{\circ}17'$ se poate împărți?

10 Se dă un unghi cu măsura de $152^{\circ}29'$. În câte unghiuri congruente cu măsurile de $21^{\circ}47'$ se poate împărți?

11 Fie unghiul MNP cu măsura de $73^{\circ}08'$. Câte semidrepte trebuie construite în interiorul unghiului MNP pentru a-l împărți în unghiuri congruente, a câte $18^{\circ}17'$?

SUNT CAMPION

12 Semidreptele OE și OF sunt opuse, iar semidreptele OA, OB, OC și OD se găsesc în același semiplan determinat de dreapta EF, astfel încât punctul A este în interiorul unghiului EOC, punctul C este în interiorul unghiului AOB, punctul B este în interiorul unghiului COD, iar punctul D este în interiorul unghiului BOF. Dacă unghiurile EOA, AOC, COB, BOD și DOF sunt exprimate în grade, care reprezintă numere naturale consecutive, aflați măsura unghiului COD.

40. Figuri congruente; axa de simetrie

ÎMI AMINTESC!






fig. 1

Perechile de desene din fig. 1, fig. 2 și fig. 3 coincid prin suprapunere.

fig. 2

În fig. 2, cele două desene sunt simetrice, iar dreapta d este axă de simetrie.

fig. 3

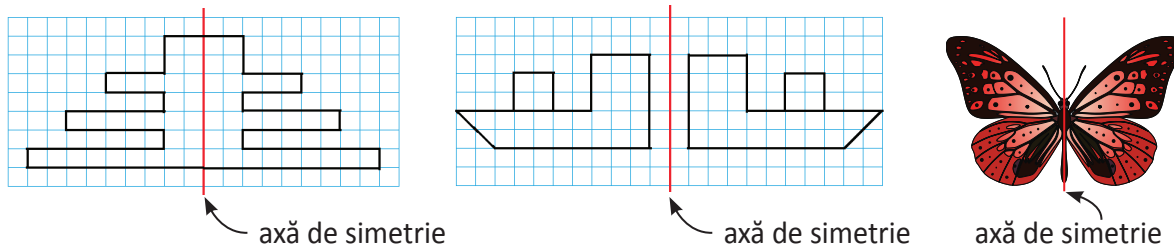
Desenele din fig. 3 nu sunt obținute prin simetrie.

ÎNȚELEG

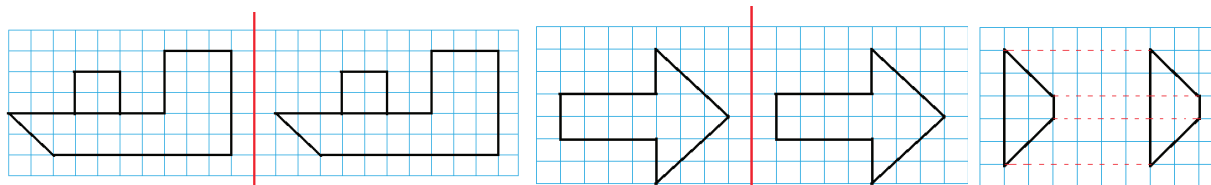
Figurile congruente sunt figurile care coincid prin suprapunere.

Două figuri sunt **simetrice** dacă se poate trasa o dreaptă astfel încât, îndoid foaia după acea dreaptă, numită axă de simetrie, cele două figuri vor coincide prin suprapunere. Figurile simetrice se văd ca în oglindă.

Axa de simetrie este dreapta care împarte figura în două părți care coincid, prin suprapunere, îndoid foaia de-a lungul ei.

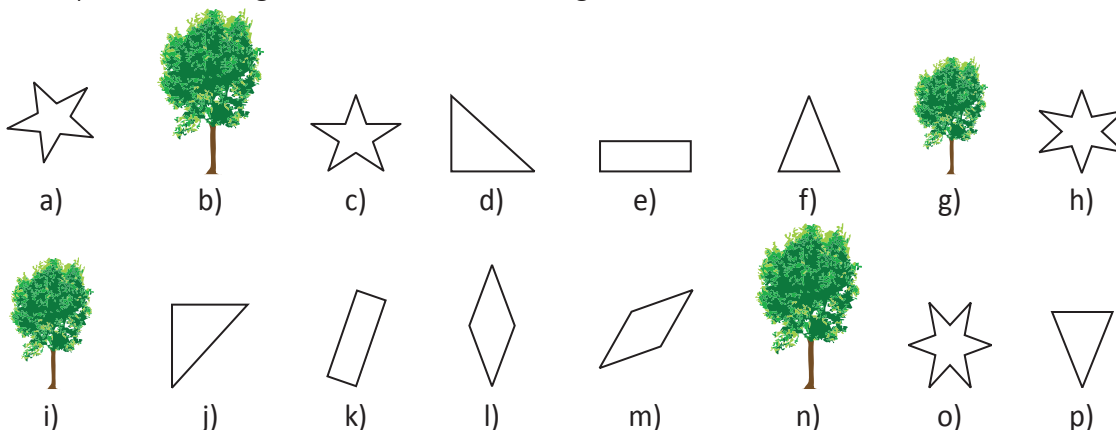


Dacă punctele unei figuri se deplasează în același sens și în aceeași direcție cu aceeași distanță, spunem că a avut loc o mișcare de **translație**.



EXERSEZ

1 Stabiliți care dintre figurile următoare sunt congruente.

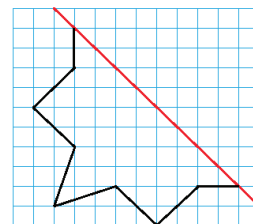
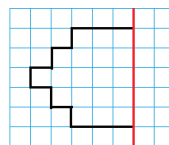
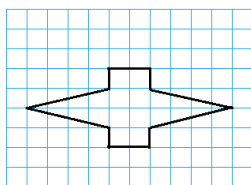
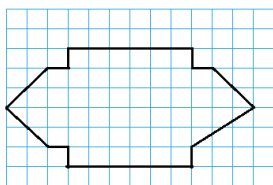


2 Triunghiul ABC are $AC = 7$ cm, $AB = 2$ cm și perimetrul de 15 cm, iar triunghiul MNP are $MN = 6$ cm, $MP = 2$ cm și $PN = 7$ cm. Stabiliți dacă triunghiurile ABC și MNP sunt congruente.

3 ABCD este un dreptunghi, intersecția diagonalelor lui fiind notată cu O. Realizați un desen corespunzător și stabiliți dacă găsiți figuri congruente. Dacă da, care sunt acestea?

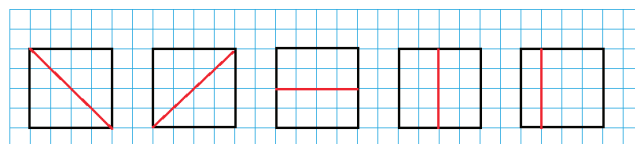
4 a) Desenați următoarele reprezentări pe caiete, folosindu-vă de liniatura caietului de matematică, apoi trasați-le axele de simetrie, dacă există.

b) Câte axe de simetrie găsiți pentru fiecare figură?



6 a) La următoarele pătrate, dreptele de culoare roșie sunt axe de simetrie?

b) Câte axe de simetrie are pătratul?



ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

7 Desenați un dreptunghi și toate axele lui de simetrie. Câte axe de simetrie are dreptunghiul? Dacă un dreptunghi se decupează după o diagonală a sa, cele două triunghiuri astfel formate sunt congruente? (luați o coală A4 sau o foaie de caiet și exemplificați cu ajutorul ei)

8 Realizați pe caiet translația următoarelor figuri, astfel încât vârful A să ajungă în A_1 și vârful N să ajungă în N_1 . (vezi fig. 4)

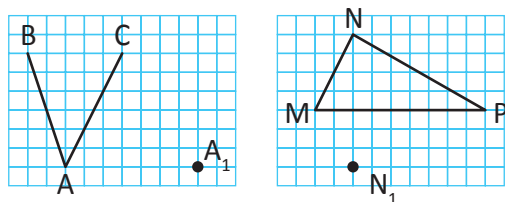


fig. 4

9 Translați reprezentările din fig. 5 după dreapta roșie.

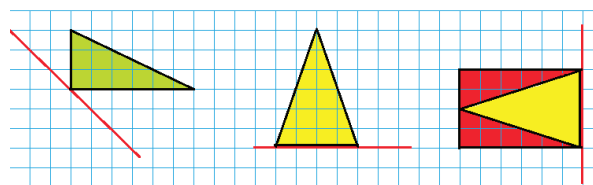


fig. 5

10 Priviți fig. 6 și stabiliți unde figurile sunt simetrice și unde a avut loc o translație.

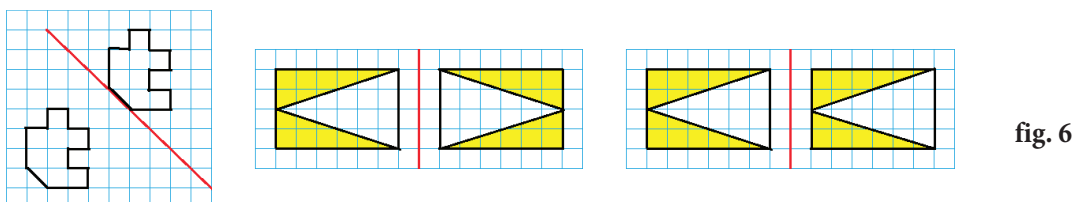


fig. 6

11 Stabiliți valoarea de adevăr:

- Un triunghi cu toate laturile congruente admite trei axe de simetrie.
- Un triunghi cu două laturi congruente admite două axe de simetrie.
- Un segment are două axe de simetrie.
- Un dreptunghi are patru axe de simetrie.
- Un cerc are o infinitate de axe de simetrie.

12 Triunghiul DEF are $DE = 2,75$ cm, $DF = 4,05$ cm și perimetrul de 14,8 cm, iar triunghiul OQR are $OQ = 2,75$ cm, $OR = 4,05$ cm și $QR = 8$ cm.

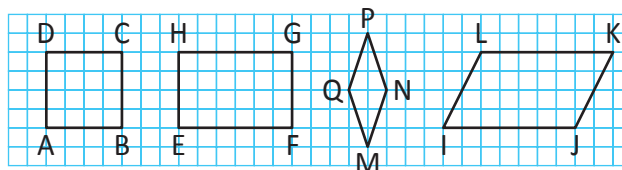
- Demonstrați că triunghiurile DEF și OQR sunt congruente.
- Problema este formulată greșit. Găsiți greșeala și modificați problema astfel încât aceasta să fie corectă.

13 a) Desenați pe caiete figurile geometrice prezentate mai jos și scrieți denumirile lor.

b) Stabiliți pentru fiecare figură geometrică dacă admite axe de simetrie și specificați care sunt acestea.

c) Trasați diagonalele fiecărei figuri geometrice și marcați intersecțiile acestora cu O, R, S și respectiv T, apoi stabiliți ce figuri congruente s-au obținut.

d) După trasarea diagonalelor, stabiliți care sunt segmentele congruente și care sunt unghiurile congruente.



14 Există litere ale alfabetului limbii române care să fie simetrice? Care sunt acestea? Câte axe de simetrie au? Scrieți literele simetrice cu axele lor de simetrie.

15 Există cifre din sistemul zecimal care să fie simetrice? Care sunt acestea? Câte axe de simetrie au? Scrieți cifrele simetrice cu axele lor de simetrie.

41. Unități de măsură pentru lungime, transformări; aplicație: perimetre

ÎMI AMINTESC!

- Prin convenție internațională, unitatea de măsură principală pentru lungimi este **metrul (m)**.

Unitățile de măsură mai mari decât metrul – **multiplii metrului**:

kilometrul (km)

hectometrul (hm)

decametrul (dam)

$$1 \text{ km} = 10 \text{ hm} = 100 \text{ dam} = 1\,000 \text{ m}$$

$$1 \text{ hm} = 10 \text{ dam} = 100 \text{ m}$$

$$1 \text{ dam} = 10 \text{ m}$$

Unitățile de măsură mai mici decât metrul – **submultiplii metrului**:

decimetrul (dm)

centimetrul (cm)

milimetrul (mm)

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1\,000 \text{ mm}$$

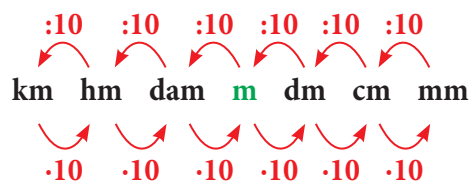
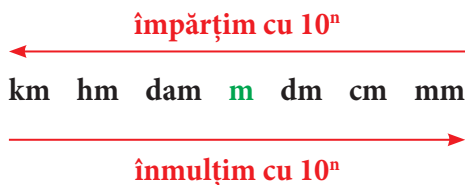
$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} = 100 \text{ mm}$$

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$$

- **Perimetrul** este suma lungimilor laturilor unei figuri geometrice.

OBSERV

- $1 \text{ km} = 10 \text{ hm} = 100 \text{ dam} = 1\,000 \text{ m} = 10\,000 \text{ dm} = 100\,000 \text{ cm} = 1\,000\,000 \text{ mm}$
- Dacă scriem unitățile de măsură pentru lungimi în ordinea șirului de egalități de mai sus, observăm că:



ÎNȚELEG

- Când avem exerciții sau probleme în care apar calcule cu lungimi (de exemplu, adunarea sau scăderea unor lungimi), acestea trebuie exprimate în aceeași unitate de măsură și apoi se efectuează calculul respectiv. E indicat ca anumite lungimi să le exprimăm cât mai potrivit, de exemplu, distanța de la Pământ la Soare o exprimăm în km, iar grosimea unui carton în mm.

- Pentru a efectua transformarea unei unități de măsură a lungimii în altă unitate de măsură procedez astfel:

- Știu șirul unităților de măsură pentru lungime: km; hm; dam; m; dm; cm; mm.

- Dacă vreau să transform un număr de km în dam, observ că dam se află cu două poziții în dreapta și numărul se înmulțește cu $10^2 = 100$.

- Dacă vreau să transform un număr de cm în hm, observ că hm se află cu patru poziții în stânga și numărul se împarte cu $10^4 = 10\,000$.

Exemple: km hm dam m dm cm mm

0, 3 7 hm = 3,7 dam

km hm dam m dm cm mm

1 5 mm = 0,015 m

Atenție!
Nu există numere de două sau mai multe cifre cu prima cifră zero.

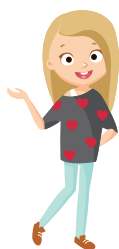


ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

Cine estimează cel mai bine? Se alcătuiesc trei echipe.

Echipele vor estima diferite lungimi, apoi echipa 2 măsoară lungimile respective.

Ambele echipe vor trece datele obținute în tabel, iar echipa 3 va calcula erorile, adică diferențele dintre valorile estimate și cele măsurate.



Obiect măsurat	Estimare	Măsurare	Eroare
lățimea ferestrei	... cm	... cm	... cm
lățimea unui tablou	... cm	... cm	... cm
înălțimea ușii	... cm	... cm	... cm
lungimea sălii de clasă	... m	... m	... m
lungimea catedrei	... cm	... cm	... cm
lățimea unui dulap	... cm	... cm	... cm



ACTIVITATE PRACTICĂ

Măsurați dimensiunile terenului de sport și ale sălii de sport. Comparați perimetrele lor.

EXERSEZ

1 Efectuați următoarele transformări:

- a) 3,81 hm = dm; b) 570 m = hm; c) 68 km = dam; d) 7mm = dam;
e) 5,7 dm = cm; f) 7,8 dam = dm; g) 3 m = hm; h) 9,72 cm = mm;
i) 300 mm = dam; j) 3,8 dm = hm; k) 200 km = hm; l) 0,0004 km = cm.

2 Transformați în metri:

- a) 0,0053 km; b) 670 mm; c) 48 dm; d) 1,7 hm;
e) 3,87 dam; f) 3 cm.

3 Exprimați în hectometri:

- a) 5 km; b) 895 000 mm; c) 48 dm;
d) 32,7 m; e) 78 dam; f) 3 cm.

4 Completați spațiile punctate:

- a) 1 m 82 cm = ... m; b) 3 m 20 cm = ... m; c) 4 m 7 dm = ... m; d) ... m ... cm = 5,28 m.

5 Comparați:

- a) 43 m cu 4 300 cm; b) 650 hm cu 65 000 dm; c) 3 200 hm cu 32 km; d) 9 dm cu 1 m.





6 Asociați lungimile cu unitatea de măsură cea mai potrivită.

înălțimea unui om	mm
lungimea unui pix	km
înălțimea unui bloc	m
lungimea vârfului unui creion	cm
distanța dintre două orașe	dm

9 Calculați perimetrul unui dreptunghi care are dimensiunile (lungime și lățime) egale cu:

a) $L = 2,3 \text{ dm}$, $l = 40 \text{ mm}$;

b) $L = 3 \text{ km}$, $l = 410 \text{ 000 mm}$.

11 Alegeți unitatea de măsură și calculați: $2,3 \text{ km} + 7 \text{ 000 dm} + 6 \text{ hm}$.

12 Alegeți varianta corectă pentru rezultatul calculului: $321 \text{ cm} + 24 \text{ m}$.

A. 345 cm

B. 345 m

C. 27,21 m

D. 561 cm

13 Calculați perimetrul unui triunghi MNP cu $MN = 60 \text{ mm}$, $MP = 0,00008 \text{ km}$, iar $NP = 0,1 \text{ m}$. Exprimați rezultatul în cm.

14 Completați corespunzător casetele:

a) $0,513 \text{ m } 37 \text{ mm} = \boxed{?} \text{ cm}$;

b) $23 \text{ dam} = 0,23 \boxed{?}$;

c) $4,53 \text{ mm} = 0,0453 \boxed{?}$;

d) $0,281 \text{ hm } 0,039 \text{ km} = \boxed{?} \text{ m}$;

e) $63 \text{ dam } 2 \text{ 000 dm} = \boxed{?} \text{ dam}$.

15 Un triunghi echilateral (triunghi cu toate laturile congruente) are o latură congruentă cu latura unui pătrat cu perimetrul de 13 cm. Aflați perimetrul triunghiului.

16 Triunghiul ABC isoscel (triunghi cu două laturi congruente) are $AB = AC = 20 \text{ mm}$ și $BC = 10 \text{ cm}$. Aflați perimetrul triunghiului.

a) Găsiți greșeala care s-a strecurat în datele problemei.

b) Modificați datele problemei astfel încât problema să fie corect formulată.

17 Triunghiul ABC isoscel (triunghi cu două laturi congruente) are $AC = 0,05 \text{ m}$ și $AB = 8 \text{ cm}$. Aflați perimetrul triunghiului.

18 Un teren agricol în formă de dreptunghi cu perimetrul de 7,2 km are lungimea de 5 ori mai mare decât lățimea. Aflați dimensiunile terenului agricol.

7 Stabiliți valoarea de adevăr:

a) $\boxed{?} 37 \text{ cm} = 370 \text{ dm}$;

b) $\boxed{?} 14 \text{ hm} = 14 \text{ 000 m}$;

c) $\boxed{?} 35,2 \text{ dm} = 3,52 \text{ m}$;

d) $\boxed{?} 31,82 \text{ dam} = 0,3182 \text{ km}$.

8 Aflați perimetrul unui pătrat cu latura de:

a) 5,3 cm;

b) 0,6 hm.

10 Calculați:

a) $5 \cdot 1,2 \text{ hm} + 7 \cdot 9 \text{ dam} - 98 \text{ 710 cm} = \boxed{?} \text{ dam}$

b) $57 \text{ 000 mm} - 210 \text{ dm} = \boxed{?} \text{ m}$

c) $5 \cdot 1,03 \text{ dm} + 1,3 \text{ cm} \cdot 10 - 0,06 \text{ dam} = \boxed{?} \text{ mm}$

SUNT CAMPION

19 O parcare în formă de dreptunghi are lungimea de 15 dam și lățimea de 750 dm. Parcarea este împrejmuită din 25 în 25 de metri cu stâlpi de iluminat. Aflați câți stâlpi de iluminat s-au folosit în total. Dar pentru o lățime a parcii?

42. Unități de măsură pentru arie, transformări; aplicații: aria pătratului și dreptunghiului

ÎMI AMINTESC!



Să considerăm că un pătrățel are latura de 1 cm. Din câte astfel de pătrățele este formată figura colorată?

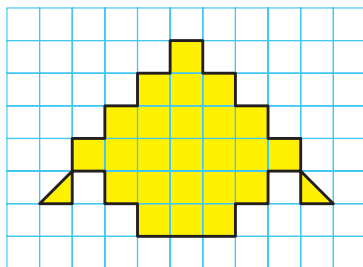


fig. 1

Figura colorată este formată din 25 de pătrate cu latura de 1 cm.

Prin urmare, aria figurii colorate este de 25 de pătrate cu latura de 1 cm.



ÎNȚELEG

• Deoarece unitatea principală pentru lungime este metrul, pentru măsurarea unei suprafețe se folosește pătratul cu latura de un metru, deci unitatea de măsură principală pentru arie este **metrul pătrat (m²)**.

Unitățile de măsură mai mari decât metrul pătrat – **multiplii metrului pătrat**:

kilometrul pătrat (km²)

hectometrul pătrat (hm²)

decametrul pătrat (dam²)

$$1 \text{ km}^2 = 10^2 \text{ hm}^2 = 10^4 \text{ dam}^2 = 10^6 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ hm}^2 = 10^2 \text{ dam}^2 = 10^4 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ dam}^2 = 10^2 \text{ m}^2$$

Unitățile de măsură mai mici decât metrul pătrat – **submultiplii metrului pătrat**:

decimetrul pătrat (dm²)

centimetrul pătrat (cm²)

milimetrul pătrat (mm²)

$$1 \text{ m}^2 = 10^2 \text{ dm}^2 = 10^4 \text{ cm}^2 = 10^6 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ dm}^2 = 10^2 \text{ cm}^2 = 10^4 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ cm}^2 = 10^2 \text{ mm}^2$$

OBSERV

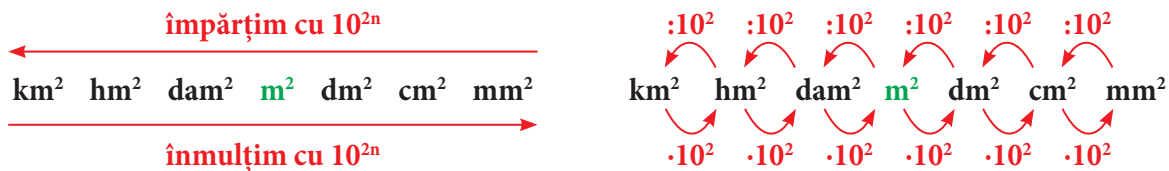


În fig. 1, dacă un pătrățel are latura de 1 cm, aria unui astfel de pătrățel este de 1 cm². Cum figura colorată este formată din 25 de pătrate cu latura de 1 cm, înseamnă că aria figurii colorate este de 25 cm².

Atunci când unitatea de lungime se înmulțește cu 10, unitatea de arie se înmulțește cu 10² = 100, iar când unitatea de lungime se împarte cu 10, unitatea de arie se împarte cu 10² = 100.



- $1 \text{ km}^2 = 10^2 \text{ hm}^2 = 10^4 \text{ dam}^2 = 10^6 \text{ m}^2 = 10^8 \text{ dm}^2 = 10^{10} \text{ cm}^2 = 10^{12} \text{ mm}^2$
- Dacă scriem unitățile de măsură pentru arii în ordinea șirului de egalități de mai sus, observăm că:



Dreptunghiul din fig. 2 are lungimea de 5 cm și lățimea de 2 cm. Dacă îl acoperim cu pătrate cu latura de 1 cm, obținem 10 pătrate de arie 1 cm^2 , deci aria dreptunghiului este de 10 cm^2 .

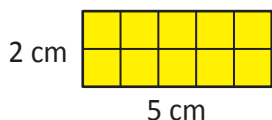


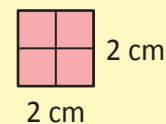
fig. 2

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

Cum lungimea dreptunghiului este de 5 cm și lățimea lui de 2 cm și $5 \cdot 2 = 10$, se observă că **aria dreptunghiului este egală cu produsul dintre lungimea și lățimea dreptunghiului.**



Pătratul este un dreptunghi cu lungimea egală cu lățimea, deci pătratul este un dreptunghi ale cărui laturi au aceeași lungime. Prin urmare, **aria pătratului este egală cu produsul dintre două laturi ale sale.**



ÎNȚELEG

- Pentru determinarea ariilor nu se folosesc instrumente de măsură specifice, ci se măsoară anumite lungimi ale figurilor geometrice, iar aria se calculează cu ajutorul acestora.
- Dacă efectuăm calcule cu arii, acestea trebuie să fie exprimate în aceeași unitate de măsură.
- Se mai folosesc pentru măsurarea suprafețelor și următoarele unități de măsură:

1 ha (hectar) = 1 hm² și **1 a (ar) = 1 dam²**

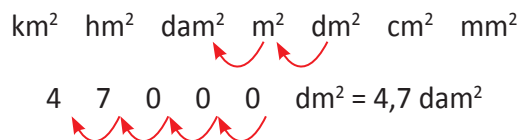
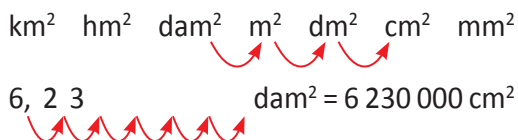
• **Aria dreptunghiului** este egală cu $L \cdot l$, unde L este lungimea dreptunghiului, iar l lățimea dreptunghiului.

• **Aria pătratului** este egală cu $l \cdot l = l^2$, unde l este latura pătratului.

$A_{\square} = L \cdot l$

$A_{\square} = l \cdot l = l^2$

Exemple de transformare a unei unități de măsură pentru arie în altă unitate de măsură:



ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

Cine estimează cel mai bine? Se alcătuiesc trei echipe.

Echipa 1 estimează ariile diferitelor suprafețe, apoi echipa 2 măsoară ariile respective.

Ambele echipe vor trece datele obținute în tabel, iar echipa 3 va calcula erorile, adică diferențele dintre valorile estimate și cele măsurate.



Obiect măsurat	Estimare	Măsurare	Eroare
aria ferestrei	... cm ²	... cm ²	... cm ²
aria unui tablou	... cm ²	... cm ²	... cm ²
aria ușii	... cm ²	... cm ²	... cm ²
aria podelei sălii de clasă	... m ²	... m ²	... m ²
aria blatului catedrei	... cm ²	... cm ²	... cm ²
aria unei suprafețe laterale a unui dulap	... cm ²	... cm ²	... cm ²



APLIC

Măsurați aria terenului de sport și a sălii de sport. Treceți datele într-un tabel și comparați ariile lor.

EXERSEZ

1 Efectuați următoarele transformări:

a) $29,8 \text{ m}^2 = \boxed{?} \text{ dm}^2$;

b) $0,0032 \text{ hm}^2 = \boxed{?} \text{ dam}^2$;

c) $52 \text{ mm}^2 = \boxed{?} \text{ dm}^2$;

d) $700 \text{ cm}^2 = \boxed{?} \text{ dam}^2$;

e) $5,7 \text{ dm}^2 = \boxed{?} \text{ cm}^2$;

f) $7,8 \text{ dam}^2 = \boxed{?} \text{ dm}^2$;

g) $3 \text{ m}^2 = \boxed{?} \text{ hm}^2$;

h) $8,6 \text{ ha} = \boxed{?} \text{ ari}$;

i) $3,4 \text{ ari} = \boxed{?} \text{ dm}^2$.

2 Aflați aria unui pătrat cu latura de: a) 3,2 dm; b) 0,01 km; c) 3,5 cm.

3 Stabiliți valoarea de adevăr: a) $\boxed{?} 5\,237,468 \text{ m}^2 = 523\,746,8 \text{ dm}^2$; b) $\boxed{?} 27,3 \text{ hm}^2 = 27,3 \text{ ha}$;

c) $\boxed{?} 50 \text{ mm}^2 = 5 \text{ m}^2$;

d) $\boxed{?} 0,3 \text{ ari} < 0,7 \text{ m}^2$;

e) $\boxed{?} 0,035 \text{ km}^2 > 2 \text{ hm}^2$.

4 Comparați:

a) 100 m^2 cu 1 ar ;

b) $4,7 \text{ hm}^2$ cu 47 ha ;

c) $32,8 \text{ hm}^2$ cu $3,28 \text{ km}^2$;

d) $6,4 \text{ m}^2$ cu 200 dm^2 ;

e) $4,52 \text{ cm}^2$ cu $45,2 \text{ mm}^2$;

f) $0,005 \text{ ha}$ cu 5 m^2 ;

g) $0,000246 \text{ ari}$ cu 247 cm^2 .

5 Asociați ariile cu unitatea de măsură cea mai potrivită.

coperta unei cărți

mm²

teren de sport

km²

teren agricol

m²

ocean

cm²

buton de sonerie

ha



6 Perimetrul unui pătrat este de 50 cm. Aflați aria pătratului.

7 În fig. 3, ABCD, DEFG și GHIC sunt pătrate cu ariile de 36 cm^2 , 100 cm^2 și, respectiv, 64 cm^2 .

a) Aflați perimetrul triunghiului DCG;

b) Este adevărat că: $DC^2 + CG^2 = DG^2$?

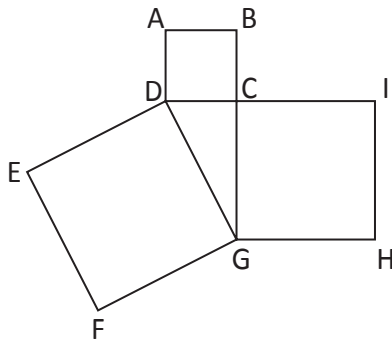


fig. 3

8 Alegeți varianta corectă pentru rezultatul calculului: $21,3 \text{ ha} - 2 \text{ dam}^2$.

A. $21,1 \text{ ha}$ B. $21,28 \text{ hm}^2$

C. 212 dam^2 D. $19,3 \text{ dam}^2$

9 Calculați:

a) $9 \cdot 2 \text{ m}^2 - 1\,200 \text{ dm}^2 = ? \text{ dm}^2$

b) $0,5 \cdot 10^3 \text{ ha} - 0,5 \cdot 10^8 \text{ dm}^2 = ? \text{ km}^2$

c) $0,00031 \text{ ari} - 70 \text{ cm}^2 = ? \text{ dm}^2$

d) $2,57 \text{ ha} + 0,50 \text{ ari} - 25\,749 \text{ m}^2 = ? \text{ m}^2$

e) $0,0008 \text{ km}^2 - 0,0799 \text{ ha} = ? \text{ m}^2$

f) $0,06 \text{ dm}^2 + 1 \text{ cm}^2 - 47 \text{ mm}^2 = ? \text{ cm}^2$

10 Un dreptunghi are dimensiunile de $0,9 \text{ dm}$ și 60 mm . Aflați cu cât trebuie micșorate lățimea și lungimea pentru a obține un pătrat cu aria de 25 cm^2 .

11 Un dreptunghi are lungimea de $1,8 \text{ dm}$, iar lățimea este $\frac{1}{6}$ din lungime. Aflați aria dreptunghiului, exprimând rezultatul în cm^2 .

12 Un dreptunghi are o latură de $1,5 \text{ m}$, iar perimetrul este de 34 dm . Aflați aria dreptunghiului.

13 Aflați suprafața Pământului, dacă suprafața Oceanului Atlantic este de aproximativ $102\,000\,000 \text{ km}^2$ și reprezintă aproape 20% din suprafața Pământului.

SUNT CAMPION

14 În fig. 4 sunt reprezentate un living și spațiul de depozitare. Podeaua livingului și cea a spațiului de depozitare sunt acoperite cu plăci de gresie în formă de pătrat cu latura de 3 dm . Se știe că plăcile de gresie se vând în cutii a câte 18 plăci, iar prețul unei cutii este de $51,15 \text{ lei}$. Aflați:

a) suprafața livingului și a suprafeței de depozitare;

b) câte plăci de gresie s-au folosit;

c) câte cutii de gresie s-au cumpărat și cât au costat acestea.

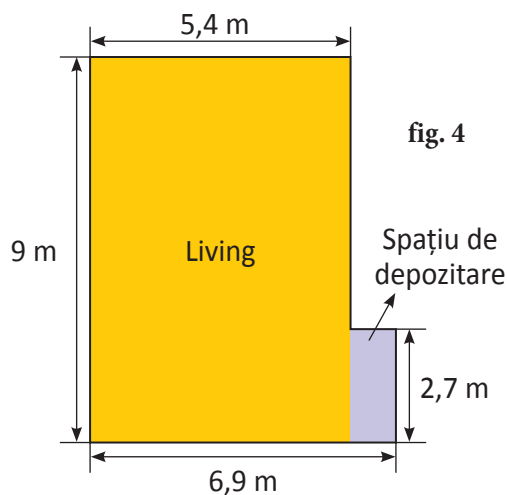
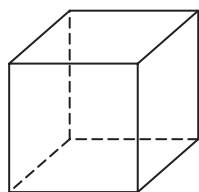


fig. 4

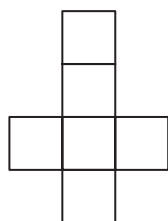
43. Unități de măsură pentru volum, transformări; aplicații: volumul cubului și paralelipipedului dreptunghic

ÎMI AMINTESC!

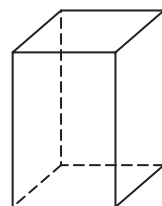
Toate fețele unui cub sunt pătrate de aceeași latură. Latura unuia dintre pătrate este muchia cubului.



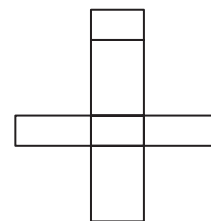
cub



cub desfășurat



paralelipiped dreptunghic

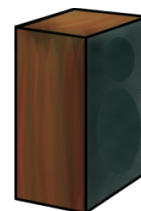


paralelipiped dreptunghic desfășurat

Toate fețele unui paralelipiped dreptunghic sunt dreptunghiuri. Paralelipipedul dreptunghic se mai numește și cuboid.

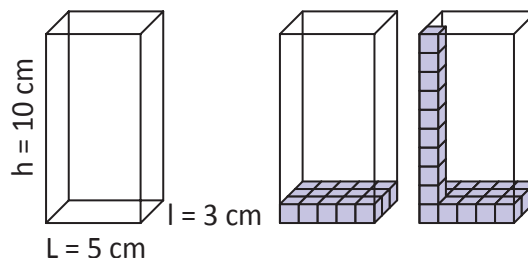
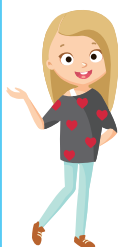


Care dintre obiecte are formă de cub? Dar de paralelipiped dreptunghic?



OBSERV

Dacă un metru pătrat reprezintă un pătrat cu latura de 1 metru, atunci un metru cub reprezintă un cub cu latura de 1 metru.



Dacă un paralelipiped dreptunghic (cuboid) are dimensiunile de $L = 5$ cm (lungimea), $l = 3$ cm (lățimea) și $h = 10$ cm (înălțimea), se observă că baza inferioară se poate umple cu 15 cuburi cu muchia de 1 cm ($5 \cdot 3 = 15$), iar pe înălțimea paralelipipedului se pot așeza 10 cuburi cu muchia de 1 cm, deci paralelipipedul se poate umple cu 10 straturi a câte 15 cuburi. Astfel obținem volumul paralelipipedului dreptunghic de $5 \cdot 3 \cdot 10 = 150$ (cm³).



ÎNȚELEG

- Spațiul ocupat de un corp reprezintă **volumul** acestuia.
- Unitatea de măsură principală pentru **volum** este **metrul cub (m^3)**.

Unitățile de măsură mai mari decât metrul cub – **multiplii metrului cub**:

kilometrul cub (km^3)

hectometrul cub (hm^3)

decametrul cub (dam^3)

$$1 \text{ km}^3 = 10^3 \text{ hm}^3 = 10^{3 \cdot 2} \text{ dam}^3 = 10^{3 \cdot 3} \text{ m}^3$$

$$1 \text{ hm}^3 = 10^3 \text{ dam}^3 = 10^{3 \cdot 2} \text{ m}^3$$

$$1 \text{ dam}^3 = 10^3 \text{ m}^3$$

Unitățile de măsură mai mici decât metrul cub – **submultiplii metrului cub**:

decimetrul cub (dm^3)

centimetrul cub (cm^3)

milimetrul cub (mm^3)

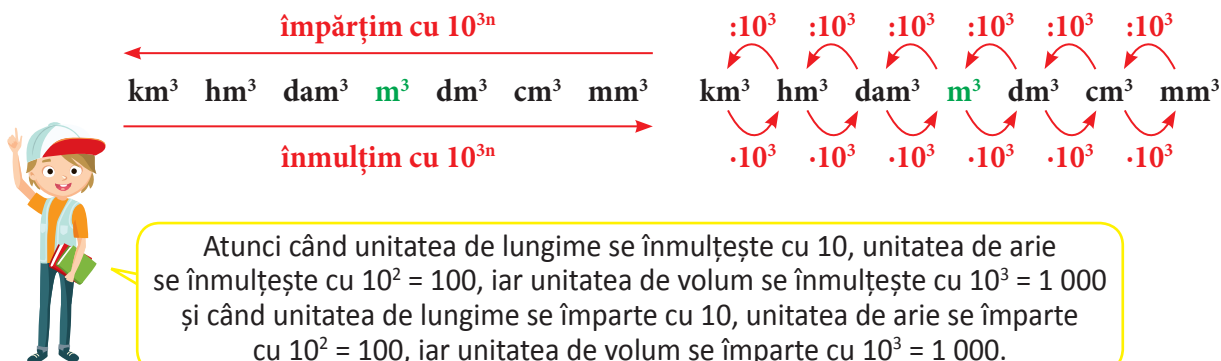
$$1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ dm}^3 = 10^{3 \cdot 2} \text{ cm}^3 = 10^{3 \cdot 3} \text{ mm}^3$$

$$1 \text{ dm}^3 = 10^3 \text{ cm}^3 = 10^{3 \cdot 2} \text{ mm}^3$$

$$1 \text{ cm}^3 = 10^3 \text{ mm}^3$$

OBSERV

- $1 \text{ km}^3 = 10^3 \text{ hm}^3 = 10^{3 \cdot 2} \text{ dam}^3 = 10^{3 \cdot 3} \text{ m}^3 = 10^{3 \cdot 4} \text{ dm}^3 = 10^{3 \cdot 5} \text{ cm}^3 = 10^{3 \cdot 6} \text{ mm}^3$
- Dacă scriem unitățile de măsură pentru volume în ordinea șirului de egalități de mai sus, observăm că:



ÎMI AMINTESC!

- Unitatea de măsură principală pentru volumul lichidelor (pentru măsurarea capacității vaselor) este **litrul (l)**.

Unitățile de măsură mai mari decât litrul – **multiplii litrului**:

kilolitrul (kl)

$$1 \text{ kl} = 10 \text{ hl} = 100 \text{ dal} = 1\ 000 \text{ l}$$

hectolitrul (hl)

$$1 \text{ hl} = 10 \text{ dal} = 100 \text{ l}$$

decalitrul (dal)

$$1 \text{ dal} = 10 \text{ l}$$

Unitățile de măsură mai mici decât litrul – **submultiplii litrului**:

decilitrul (dl)

centilitrul (cl)

mililitrul (ml)

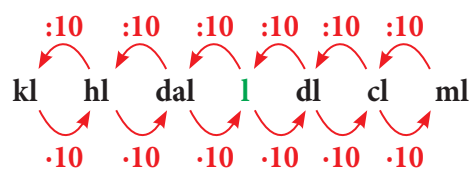
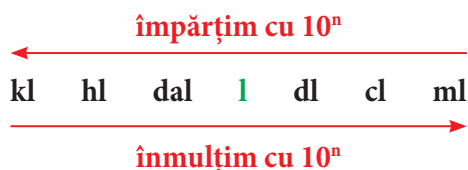
$$1 \text{ l} = 10 \text{ dl} = 100 \text{ cl} = 1\,000 \text{ ml}$$

$$1 \text{ dl} = 10 \text{ cl} = 100 \text{ ml}$$

$$1 \text{ cl} = 10 \text{ ml}$$

- $1 \text{ kl} = 10 \text{ hl} = 100 \text{ dal} = 1000 \text{ l} = 10\,000 \text{ dl} = 100\,000 \text{ cl} = 1\,000\,000 \text{ ml}$

• Dacă scriem unitățile de măsură pentru volumul lichidelor (pentru capacități) în ordinea șirului de egalități de mai sus, observăm că:



ÎNȚELEG

- Pentru determinarea volumelor nu se folosesc instrumente de măsură specifice, ci se măsoară anumite lungimi ale corpurilor geometrice, iar volumul lor se calculează cu ajutorul acestora.

- Dacă efectuăm calcule cu volume, acestea trebuie să fie exprimate în aceeași unitate de măsură.

Exemple de transformare a unei unități de măsură pentru volum în altă unitate de măsură:

km³ hm³ dam³ m³ dm³ cm³ mm³

$$0,000041 \text{ dam}^3 = 41 \text{ dm}^3$$

km³ hm³ dam³ m³ dm³ cm³ mm³

$$5,680 \text{ mm}^3 = 5,68 \text{ dam}^3$$

- **Volumul paralelipipedului dreptunghic** este $V = L \cdot l \cdot h$, unde V este volumul, l este lățimea, L este lungimea și h este înălțimea.

- **Volumul cubului** este $V = l \cdot l \cdot l = l^3$, unde V este volumul și l este muchia cubului.

- Litrul este echivalent cu decimetrul cub, adică $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$.

Alte exemple de transformări:

a) $0,000067 \text{ hm}^3 = ? \text{ l}$

$$0,000067 \text{ hm}^3 = 67\,000 \text{ dm}^3 = 67\,000 \text{ l}$$

b) $7,2 \text{ dal} = ? \text{ cm}^3$

$$7,2 \text{ dal} = 72 \text{ l} = 72 \text{ dm}^3 = 72\,000 \text{ cm}^3$$

APLIC

1) Măsurați lungimea, lățimea și înălțimea unui dulap din sala de clasă, apoi calculați volumul dulapului. Treceți datele într-un tabel.

2) Estimați câte portocale încap într-o cutie cubică imagină cu latura de 100 de metri.

ACTIVITATE ÎN ECHIPĂ

Estimați capacitatea unei căni prin raportare la capacitatea unei sticle de 1 litru. (Indicație: umpleți cana cu apă și turnați apa în sticla de 1 litru; repetați operațiunea și constatați câte căni de apă intră în sticlă.)

EXERSEZ

1 Efectuați următoarele transformări:

- a) $7\,000\text{ cm}^3 = \boxed{?}\text{ m}^3$; b) $7\,000\text{ dam}^3 = \boxed{?}\text{ hm}^3$; c) $7,9\text{ km}^3 = \boxed{?}\text{ hm}^3$;
 d) $3,81\text{ cm}^3 = \boxed{?}\text{ mm}^3$; e) $41\,000\text{ dam}^3 = \boxed{?}\text{ hm}^3$; f) $500\text{ m}^3 = \boxed{?}\text{ hm}^3$.

2 Efectuați următoarele transformări:

- a) $5\,270\text{ cl} = \boxed{?}\text{ dal}$; b) $5,3\text{ kl} = \boxed{?}\text{ hl}$; c) $58\,000\text{ ml} = \boxed{?}\text{ dal}$;
 d) $0,39\text{ dal} = \boxed{?}\text{ l}$; e) $7,8\text{ dal} = \boxed{?}\text{ dl}$; f) $57,2\text{ ml} = \boxed{?}\text{ cl}$.

3 Comparați:

- a) 2 dm^3 cu $0,002\text{ cm}^3$; b) 260 mm^3 cu $0,000028\text{ m}^3$;
 c) 3 l cu 3 dm^3 ; d) 48 hl cu $0,48\text{ kl}$.

4 Exprimați în cm^3 volumul unui cub cu muchia de 4 dm .

5 Exprimați în dam^3 volumul unui paralelipiped dreptunghic care are dimensiunile: $L = 0,5\text{ hm}$, $l = 0,042\text{ km}$, $h = 200\text{ dm}$.

6 Completați spațiul punctat alegând varianta corectă: $27,3\text{ dam}^3 = 27\,300 \dots$

A. cm^3

B. m^3

C. l

D. km^3

7 Calculați.

- a) $500\text{ dm}^3 + 0,003\text{ dam}^3 - 20\,000\text{ cm}^3 = \boxed{?}\text{ m}^3$
 b) $328\text{ cm}^3 + 23\,000\text{ mm}^3 = \boxed{?}\text{ dm}^3$
 c) $0,0003\text{ km}^3 - 3,1\text{ m}^3 - 996\,900\text{ dm}^3 = \boxed{?}\text{ dam}^3$
 d) $29 \cdot 10^5\text{ dm}^3 + 0,00241\text{ hm}^3 - 107\text{ m}^3 = \boxed{?}\text{ dam}^3$
 e) $2,3 \cdot 10^4\text{ mm}^3 + 0,471\text{ hl} - 123\text{ cm}^3 = \boxed{?}\text{ l}$

8 Efectuați următoarele transformări:

- a) $3,7\text{ l} = \boxed{?}\text{ cm}^3$; b) $29,6\text{ dm}^3 = \boxed{?}\text{ l}$;
 c) $8,1\text{ l} = \boxed{?}\text{ cm}^3$; d) $5\text{ l} = \boxed{?}\text{ m}^3$;
 e) $5,2\text{ cl} = \boxed{?}\text{ mm}^3$; f) $375\text{ ml} = \boxed{?}\text{ cm}^3$;
 g) $1\,300\text{ cm}^3 = \boxed{?}\text{ dl}$; h) $8,6\text{ ml} = \boxed{?}\text{ mm}^3$;
 i) $51,8 \cdot 10^{11}\text{ l} = \boxed{?}\text{ km}^3$.

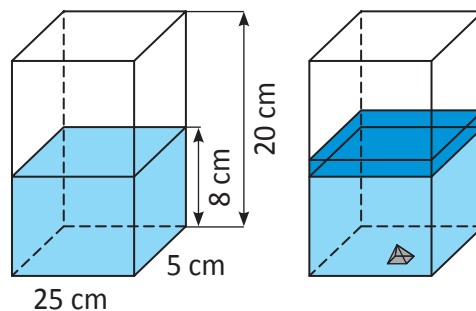
9 Calculați lungimea laturii unui cub care are volumul egal cu: a) 27 cm^3 ; b) $0,008\text{ m}^3$; c) 64 dm^3 .

10 Aflați dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic cu volumul de 154 dm^3 dacă dimensiunile paralelipipedului sunt exprimate prin numere naturale.

SUNT CAMPION

11 Un vas în formă de paralelipiped dreptunghic cu $L = 25\text{ cm}$, $l = 5\text{ cm}$ și $h = 20\text{ cm}$ este plin cu apă până la înălțimea de 8 cm . După ce se scufundă în vas o piramidă confecționată din plumb, nivelul apei din vas se ridică cu $0,008\text{ cm}$. Aflați:

- a) volumul vasului;
 b) câți litri de apă sunt în vas;
 c) volumul piramidei.



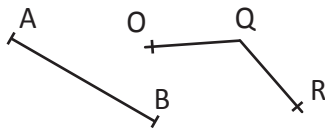


44. Recapitulare

Elemente de geometrie și unități de măsură



- Măsurați dimensiunile unei ferestre din sala de clasă și aflați perimetrul acesteia.
- Construiți și notați corespunzător două segmente congruente AB și EF , notați cu M mijlocul segmentului AB , apoi construiți simetricul lui M față de punctul E .
- Construiți un triunghi ABC , dacă $AB = 6$ cm, măsura unghiului CAB este de 30° , iar $AC = 2$ cm.
- Construiți simetricile A' , B' și C' a trei puncte coliniare A , B și C față de un punct O . Considerați două cazuri: a) Punctul O este situat pe dreapta AB și b) Punctul O nu este situat pe dreapta AB . Ce observați?
- Construiți un segment EF congruent cu segmentul dat AB și un unghi MNP congruent cu unghiul dat OQR .
- Desenați și notați corespunzător:
 - dreptele paralele d și FH ;
 - două drepte perpendiculare m și g ;
 - unghiul MNP cu măsura de 20° ;
 - două unghiuri obtuze congruente ABC și OQS ;
 - punctele coliniare N , D , E și P ;
 - unghiul alungit TVR ;
 - dreptele concurente n și x care să nu fie perpendiculare;
 - segmentele congruente GJ și KL .



7 În figura 1 se știe că punctele F , A , M , B și H sunt coliniare, măsura unghiului EAF este de 45° , măsura unghiului MBC este de 135° , segmentul AM este congruent cu segmentul MB , segmentul FA este congruent cu segmentul BH , măsura unghiului AMD este de 90° și $EA = BC$.

- Stabiliți valoarea de adevăr:
 - dreapta DM este perpendiculară pe dreapta AB ;
 - punctul M este mijlocul segmentului FH ;
 - unghiul BAM este alungit.
- Aflați măsura unghiului EAM , măsura unghiului HBC și măsura unghiului DMB .
- Completați corespunzător spațiile punctate:
 - $\sphericalangle EAM$ este congruent cu $\sphericalangle \dots$;
 - $\sphericalangle CBH$ este congruent cu $\sphericalangle \dots$;
 - $\sphericalangle AMB$ este un unghi ...
- Alegeți varianta corectă. Punctul M face parte din ...
 - semidreapta BH cu originea în B ;
 - semidreapta FA cu originea în F ;
 - semiplanul determinat de dreapta BC și punctul H .
- Dacă în fig. 1 configurația geometrică $EABCD$ are axă de simetrie, stabiliți care este aceasta.

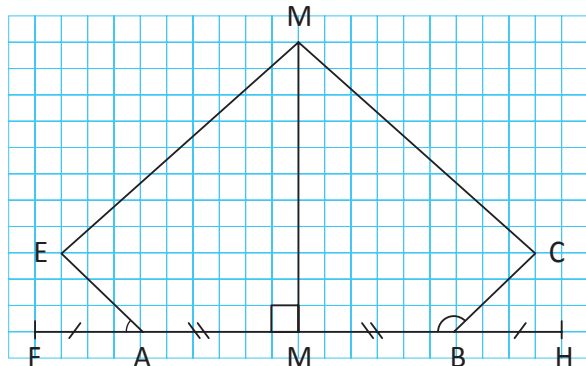


fig. 1

8 Completați spațiul punctat: $24 \text{ hm } 5\,000 \text{ cm} = \dots \text{ hm}$.

9 Efectuați următoarele transformări:

- a) $2,34 \text{ dm} = \boxed{?} \text{ km}$; b) $2,34 \text{ dm} = \boxed{?} \text{ mm}$;
 c) $8,72 \text{ cm}^2 = \boxed{?} \text{ mm}^2$; d) $50\,000 \text{ mm}^2 = \boxed{?} \text{ ari}$;
 e) $30 \text{ ha} = \boxed{?} \text{ km}^2$; f) $500 \text{ m}^3 = \boxed{?} \text{ dam}^3$;
 g) $2,3 \text{ cm}^3 = \boxed{?} \text{ l}$; h) $6,1 \text{ cm}^3 = \boxed{?} \text{ cl}$.

11 Alegeți varianta corectă. O figură geometrică are:

- A. arie B. volum C. arie și perimetru
 D. arie și volum E. arie, perimetru și volum

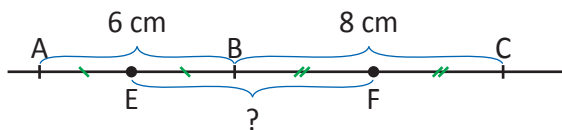
12 Alegeți varianta corectă. Un corp geometric are:

- A. arie B. volum C. arie și volum

13 Completați corespunzător următorul tabel:

Mărime	Unitatea de măsură principală (denumire)	Unitatea de măsură principală (prescurtare)
Lungime		
Volum		
Arie		
Capacitate		

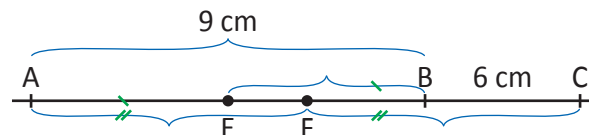
14 Punctele A, B și C sunt coliniare în această ordine. Aflați distanța dintre mijloacele segmentelor AB, respectiv BC, dacă $AB = 6 \text{ cm}$ și $BC = 8 \text{ cm}$.



10 Găsiți corespondențele potrivite dintre mărimile caracteristice ale unor obiecte din mediul înconjurător, din coloana A, cu unitatea de măsură potrivită, din coloana B.

A	B
lungime	ore (h)
masă	metru (m)
preț	metru pătrat (m^2)
arie	metru cub (m^3)
volum	lei
perimetru	kilogram (kg)
timp	litru (l)
capacitate	

15 Punctele A, B și C sunt coliniare în această ordine. Aflați distanța dintre mijloacele segmentelor AB, respectiv AC, dacă: $AC = 9 \text{ cm}$ și $BC = 6 \text{ cm}$.



- 16 Calculați: a) $0,3 \text{ hm} - 9,72 \text{ m} - 381 \text{ mm} = \boxed{?} \text{ dm}$;
 b) $0,004 \text{ m}^2 + 26 \text{ cm}^2 + 0,41 \text{ dm}^2 = \boxed{?} \text{ cm}^2$;
 c) $3\,920 \text{ cm}^3 - 0,00092 \text{ m}^3 + 14 \cdot 10^5 \text{ mm}^3 = \boxed{?} \text{ dm}^3$.

17 Pardoseala unei bucătării în formă de dreptunghi, cu aria de $10,08 \text{ m}^2$, este realizată din 112 plăci de gresie în formă de pătrat. Aflați aria unei plăci de gresie, exprimată în cm^2 .

18 Dacă densitatea unui corp (ρ) se măsoară în grame pe centimetri cubi (g/cm^3), deduceți formula densității.

19 **Indicele de masă corporală (IMC)** este un indicator statistic al masei unei persoane raportată la înălțimea persoanei respective. IMC este o măsură care poate indica dacă o persoană are o greutate sănătoasă pentru înălțimea sa, însă nu se potrivește copiilor, oamenilor în vârstă sau în cazul unui corp athletic (mușchii cântărind mai mult în comparație cu depozitele de grăsime). Calculați-vă indicele de masă corporală (IMC), după ce v-ați cântărit și v-ați măsurat înălțimea.

20 Din 4 morcovi s-au obțin 150 ml de suc. Câți mm^3 ocupă în vas cei 150 ml de suc?

21 Alegeți varianta corectă pentru rezultatul calculului: $5,8 \text{ km} - 28 \text{ m}$.

A. 577 200 cm

B. 22,2 km

C. 5,52 km

D. 552 m

22 Dacă viteza se măsoară în kilometri pe oră (km/h), deduceți formula vitezei.

23 Transformați viteza de 120 km/h (kilometri pe oră) în m/s (metri pe secundă).

24 Calculați lungimile laturilor unui triunghi, știind că ele, exprimate în cm, sunt numere naturale consecutive, iar perimetrul este de 2,4 dm.

25 a) Completați corespunzător următorul tabel.

b) Scrieți numele mărilor din tabel în ordinea descrescătoare a adâncimii lor maxime.

c) Scrieți numele mărilor din tabel în ordinea crescătoare a volumului lor de apă.

d) Care dintre mările prezentate în tabel are cea mai mare suprafață (arie)?

e) Care dintre mările prezentate în tabel are cea mai mică suprafață (arie)?

Denumire	Adâncime maximă	Suprafață	Volum apă
Marea Neagră	2,211 km = ... m	42 348 800 hm^2 = ... km^2	$537 \cdot 10^9 \text{ dam}^3$ = ... km^3
Marea Nordului	7 000 dm = ... m	$75 \cdot 10^8 \text{ dam}^2$ = ... km^2	94 000 000 hm^3 = ... km^3
Marea Adriatică	146 dam = ... m	13 860 000 ha = ... km^2	$35 \cdot 10^{12} \text{ m}^3$ = ... km^3
Marea Japoniei	37,42 hm = ... m	$978 \cdot 10^5 \text{ hm}^2$ = ... km^2	1 731 000 hm^3 = ... km^3
Marea Moartă	0,306 km = ... m	6 000 000 ari = ... km^2	$147 \cdot 10^{12} \text{ litri}$ = ... km^3

26 Un corp de zinc cântărește 355 g. Ce masă are o placă de sticlă cu același volum? Se știe că densitatea zincului este $\rho_{\text{zinc}} = 7,1 \text{ g/cm}^3$ și densitatea sticlei este $\rho_{\text{sticlă}} = 2,5 \text{ g/cm}^3$.

SUNT CAMPION

27 Mihai a constatat că la subsolul casei sale s-a produs o fisură la țeava de alimentare cu apă. Până să vină o echipă de meseriași care să repare avaria, Mihai așază, în dreptul fisurii, un vas în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de $L = 20 \text{ cm}$, $l = 10 \text{ cm}$ și $h = 15 \text{ cm}$ și observă că într-o oră se strâng în vas 5 dl de apă. În cât timp se va umple vasul?

28 Se știe că lungimea unui dreptunghi este 83,(3)% din perimetrul unui pătrat. Dacă lățimea dreptunghiului este cu 0,3 dm mai mică decât lungimea dreptunghiului, aflați latura pătratului și perimetrul dreptunghiului, știind că lungimea dreptunghiului este de 0,01 dam. Exprimați rezultatele în cm.



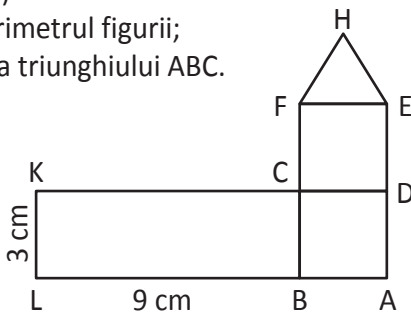
Partea I La următoarele exerciții scrieți numai rezultatele.

- 1 Desenați și notați corespunzător: a) o dreaptă n ; b) un segment EH; c) un unghi MPN; d) o semidreaptă TV cu originea în T.
- 2 Câte axe de simetrie are un cerc?
- 3 Desenați un cub ABCDA'B'C'D'.
 - a) Câte vârfuri are cubul?;
 - b) Scrieți două perechi de drepte paralele;
 - c) Scrieți două perechi de drepte concurente;
 - d) Scrieți două perechi de drepte perpendiculare.
- 4 Efectuați următoarele transformări:
 - a) $2,3 \text{ m } 52 \text{ cm} = \boxed{?} \text{ mm}$;
 - b) $0,5 \text{ dm}^2 = \boxed{?} \text{ m}^2$;
 - c) $3,2 \cdot 10^4 \text{ dm}^2 = \boxed{?} \text{ ha}$;
 - d) $0,0062 \text{ cm}^3 = \boxed{?} \text{ mm}^3$.
- 5 Comparați: 5,213 ha cu 520,3 ari.
- 6 În ce unitate de măsură trebuie dat rezultatul calculului: $0,009 \text{ m} + 1,2 \text{ cm}$ pentru ca acesta să fie un număr natural? Alegeți varianta corectă.

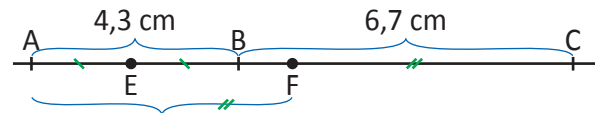
A. km B. dm C. mm D. hm

Partea a II-a La următoarele exerciții scrieți rezolvările complete.

- 1 În figura următoare ABCD și CDEF sunt pătrate, BCKL este dreptunghi, iar EFH este triunghi echilateral (triunghi cu toate laturile congruente).
 - a) Aflați perimetrul figurii;
 - b) Aflați aria triunghiului ABC.



- 2 Punctele A, B și C sunt coliniare în această ordine. Aflați distanța dintre mijloacele segmentelor AB respectiv AC dacă: $AB = 4,3 \text{ cm}$ și $BC = 6,7 \text{ cm}$.



- 3 Într-un vas în formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 1,8 dm, lățimea de 4 cm și înălțimea de 20 cm se toarnă un litru de apă. Aflați până la ce înălțime se ridică apa în vas.

Punctaj acordat							
	1	2	3	4	5	6	Total
Partea I (45 p.)	10 p. (4 × 2,5 p.)	5 p.	10 p. (4 × 2,5 p.)	10 p. (4 × 2,5 p.)	5 p.	5 p.	
Partea a II-a (45 p.)	10 p. (2 × 5 p.)	15 p.	20 p.	-	-	-	
Se acordă 10 puncte din oficiu. Pentru a afla nota finală, rezultatul obținut se împarte la 10.							



45. Recapitulare finală

45.1 Numere naturale



- 1 Aflați un număr cu: a) 560 mai mic decât cel mai mic număr de 4 cifre;
b) 4 560 mai mic decât cel mai mare număr de 4 cifre diferite.

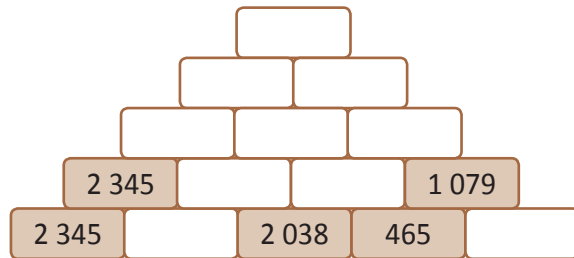
- 2 Câte numere cuprinse între 58 și 78 sunt:
a) approximate prin adaos la zeci de 70;

b) rotunjite la zeci de 60? Dar de 70?

- 3 Care dintre afirmații sunt adevărate (A) și care sunt false (F)?

- a) $29 \cdot 312 = 312 \cdot 29$;
b) $2\,019 \cdot 2\,039 < 2\,019 \cdot 2\,038$;
c) $1 \cdot 71 = 71 \cdot 1$;
d) $(834 \cdot 129) \cdot 556 = 834 \cdot (129 \cdot 556)$;
e) $1 \cdot 679 < 679 \cdot 0$;
f) $2017 \cdot 2037 = 2035 \cdot 2019$;
g) $(145 \cdot 55) \cdot 75 > 145 \cdot (55 \cdot 75)$.

- 4 Completați piramida aritmetică știind că valoarea unei cărămizi este egală cu suma cărămizilor pe care se sprijină.



- 5 Completați tabelul:

a	b	c	ab	ba	$ac + bc$	$c \cdot (a + b)$
60	40	12				
325	675	300				
150	325	20 000				
272	498	567				
396	74	3				
182	304	696				

- 6 Dacă distanța Brașov – Sibiu este de 145 km, estimați cu ajutorul unei hărți distanțele: București – Cluj, Brașov – Iași, Giurgiu – Baia-Mare, Timișoara – Brăila și Constanța – Craiova.

- 7 Ioana a cumpărat 3 caiete și 2 cărți cheltuind 64 lei. Dacă o carte este mai scumpă cu 17 lei decât un caiet, cât costă un caiet? Dar o carte?

- 8 Scrieți ca putere:

- a) $11^{65} : 11^{13}$; b) $10^{16} \cdot 10^{37}$;
c) $(13^2)^8$; d) $7^{26} \cdot 3^{26}$.

- 9 Efectuați:

- a) $9^4 \cdot (3^2 \cdot 3^4)^2 : 9^8$;
b) $10^4 : \{559 + (7 \cdot 3)^3 : [(4 \cdot 5^2)^2 : 500 + 1]\}$.

- 10 Calculați sumele:

- a) $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$;
b) $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 28$;
c) $3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 42 + 45$.

- 11 Determinați:

- a) divizorii comuni ai numerelor 40 și 32;
b) numerele de forma $\overline{a7a}$ divizibile cu 3.
c) numărul mai mare dintre 2^{70} și $3^{24} + 3^{35}$. Justificați!

45.2 Frații ordinare. Frații zecimale

1 Ordonează crescător numerele raționale:

1	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{9}{10}$
---	---------------	---------------	----------------	----------------	---------------	---------------	----------------	----------------	----------------

2 Apreciați prin adevărat (A) sau fals (F) egalitățile:

a) (30; 40) = 5; b) (18; 24) = 6;

c) (32; 72) = 8; d) (42; 28) = 7.

3 Cărțile dintr-o bibliotecă pot fi așezate câte 6, câte 9 sau câte 12 pe raft. Câte cărți sunt în bibliotecă, dacă numărul cărților este cuprins între 200 și 230?

4 Aflați cele mai mici 3 numere naturale x , pentru care:

a) (24; x) = 6; b) (63; x) = 9.

5 Aflați câte 3 numere naturale $x \neq 48$ și $y \neq 60$ pentru care:

a) [16; x] = 48; b) [30; y] = 60.

6 Scrieți toate fracțiile care se obțin prin simplificarea fracției $\frac{48}{72}$.

7 Efectuați:

a) $2\frac{1}{4} + 3\frac{2}{5}$; b) $5\frac{2}{9} - 2\frac{5}{9}$;

c) $6\frac{7}{8} - 2\frac{3}{4}$; d) $4\frac{1}{4} - 1\frac{5}{6}$.

8 Simplificați până la o fracție ireductibilă:

a) $\frac{60}{84}$; b) $\frac{64}{80}$; c) $\frac{120}{192}$; d) $\frac{108}{180}$.

9 Efectuați: a) $25,3 - 7,25 + 16,25 - 4,3$; b) $(2,5 \cdot 3,2 + 0,75 : 0,5) : 0,25$.

10 Media aritmetică a trei numere este 3,7, iar media aritmetică a două din ele este 7,5. Aflați al treilea număr.

11 Scrieți numerele zecimale periodice simple sub formă de fracție ordinară ireductibilă:

a) 5,(6); b) 2,(35); c) 4,(18);
d) 3,(432).

12 Scrieți numerele zecimale periodice mixte sub formă de fracție ordinară ireductibilă:

a) 2,5(3); b) 3,2(36); c) 1,23(6);
d) 4,35(45).

13 Rotunjiți numerele: a) 16,75 până la zecime; b) 2,635 până la sutime.

14 Rezultatele unui grup de elevi la un test au fost:

5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10.

- Alcătuieți tabelul de date statistice;
- Reprezentați prin diagramă rezultatele testului;
- Calculați media testului;
- Cât la % din elevi au obținut cel puțin nota 8?



45.3 Elemente de geometrie și unități de măsură

1 Măsurăți lungimea și lățimea sălii de clasă, aflați perimetrul și aria acesteia. Treceți datele într-un tabel și realizați planul sălii de clasă.

2 Efectuați următoarele transformări:

- a) $1\ 300\ \text{mm} = \boxed{?}\ \text{m}$; b) $1,42\ \text{hm} = \boxed{?}\ \text{dam}$; c) $35\ \text{mm}^2 = \boxed{?}\ \text{dm}^2$; d) $0,0025\ \text{km}^2 = \boxed{?}\ \text{ari}$;
 e) $4,1\ \text{ari} = \boxed{?}\ \text{ha}$; f) $87\ 000\ \text{m}^3 = \boxed{?}\ \text{hm}^3$; g) $50\ \text{l} = \boxed{?}\ \text{m}^3$; h) $0,003\ \text{kl} = \boxed{?}\ \text{cm}^3$.

3 Un cub are muchia de 1,1 cm. Aflați aria unei fețe și volumul cubului.

4 În fig.1 este reprezentat un paralelipiped dreptunghic ABCDA'B'C'D' cu $AB = 8\ \text{cm}$, $BC = 2\ \text{cm}$ și $CC' = 9\ \text{cm}$.

a) Completați spațiile punctate alegând varianta corectă: ADD'A' este un ...

- A. pătrat B. dreptunghi C. paralelogram D. romb

b) Aflați perimetrul patrulaterului BCC'B';

c) Aflați aria patrulaterului ABCD;

d) Aflați volumul paralelipipedului dreptunghic;

e) Încapă în paralelipiped un litru de apă? Justificați.

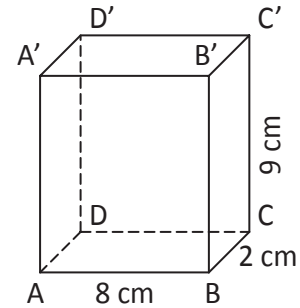


fig. 1

5 Calculați:

- a) $59\ \text{cm} + 0,02\ \text{m} - 6\ \text{dm} = \boxed{?}\ \text{mm}$; b) $0,0029\ \text{m}^2 - 41\ \text{mm}^2 = \boxed{?}\ \text{cm}^2$;
 c) $5,2 \cdot 10^8\ \text{m}^3 + 0,0026\ \text{hm}^3 = \boxed{?}\ \text{dam}^3$.

6 În fig. 2 se știe că $d(A,B) = 6\ \text{cm}$, $AC = 12\ \text{cm}$, măsura unghiului ACB este de 30° , unghiurile BCA și CBD sunt congruente, iar măsura unghiului ABD este de 120° .

a) Construiți punctul E, simetricul punctului A față de B, și aflați AE;

b) Demonstrați că AB și BC sunt perpendiculare;

c) Aflați măsura unghiului DBE;

d) Ce dată a problemei este în plus?

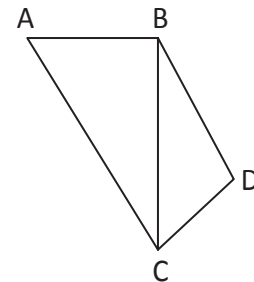


fig. 2

7 O rodie conține 465 de semințe și din 4 rodii se obțin 372 ml de suc. Dacă se consideră că fiecare rodie conține același număr de semințe și din fiecare rodie se obține aceeași cantitate de suc, aflați:

a) cantitatea de suc ce se obține de la o sămânță de rodie;

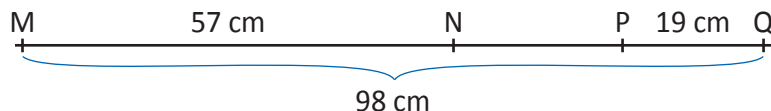
b) câți litri de suc se obțin din 10 rodii.

Partea I La următoarele exerciții scrieți numai rezultatele.

- 1 Rezultatul calculului $8\ 542\ 301 - 2\ 176\ 142$ este:
- 2 Numărul 1 470 este divizibil cu următoarele numere prime:
- 3 Calculați: $\frac{5}{6} - \frac{3}{8}$.
- 4 Alegeți varianta corectă. Un volum se poate măsura în:
 A. m B. m² C. m³
- 5 Transformați următoarele fracții zecimale în fracții ordinare ireductibile:
a) 0,02; b) 0,(3); c) 1,12(3); d) 23,5(15).
- 6 Comparați: 4 000 m² cu 400 ari.

Partea a II-a La următoarele exerciții scrieți rezolvările complete.

- 1 La un magazin s-au adus computere, telefoane mobile și laptopuri, în total 255. Numărul telefoanelor mobile este cu 19 mai mare decât al computerelor, iar laptopuri sunt cu 143 mai multe decât computere. Aflați câte computere, câte telefoane mobile și câte laptopuri s-au adus la acel magazin.
- 2 Un grup de turiști parcurge un traseu cu lungimea de 9,6 km în trei zile, astfel: în prima zi 0,25 din lungimea traseului, a doua zi 0,5 din rest și încă 1,5 km, iar a treia zi, restul. Aflați câți km parcurge grupul în fiecare zi.
- 3 Pe o dreaptă se consideră punctele distincte M, N, P și Q în această ordine, astfel încât $MQ = 98$ cm, $PQ = 19$ cm și $MN = 57$ cm. Aflați lungimile NP, MP și NQ.



Punctaj acordat:							
	1	2	3	4	5	6	Total
Partea I (45 p.)	10 p.	10 p.	5 p.	5 p.	10 p.	5 p.	
Partea a II-a (45 p.)	10 p.	15 p.	20 p.	-	-	-	
Se acordă 10 puncte din oficiu. Pentru a afla nota finală, rezultatul obținut se împarte la 10.							

TEST DE EVALUARE FINALĂ

Testul 2

Ce știi? Cum știi? Cât știi?

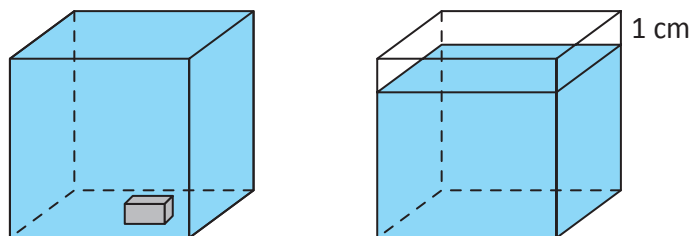
Partea I La următoarele exerciții scrieți numai rezultatele.

- Un număr de bomboane se împarte la 3 copii în mod egal. Câte bomboane pot rămâne?
- Scrieți următoarele numere în ordine crescătoare: 693, 593, 871, 839.
- Dacă un număr natural împărțit la 2 dă câtul 7 și restul 1, atunci rezultatul acestei împărțiri scris ca fracție zecimală este
- Alegeți varianta corectă. O arie se poate măsura în:

A. m B. m² C. m³
- Comparați: 2,05 km² cu 20 500 dam².
- Aflați cel mai mare divizor comun al numerelor 56 și 60.

Partea a II-a La următoarele exerciții scrieți rezolvările complete.

- Aflați toate numerele de forma \overline{abc} , știind că sunt divizibile cu 5 și au suma cifrelor egală cu 19.
- Efectuați: $0,5 \cdot [0, (2) + 1, (18) + 0,3 (27) - \frac{227}{495}]$.
- Un vas, plin cu apă, în formă de cub cu capacitatea de un litru conține un paralelipiped dreptunghic din fier. După ce se scoate paralelipipedul din vas, apa scade cu 1 cm.
 - Aflați lungimea laturii cubului exprimată în cm;
 - Determinați volumul paralelipipedului.



Punctaj acordat:							
	1	2	3	4	5	6	Total
Partea I (45 p.)	10 p.	5 p.	5 p.	5 p.	10 p.	10 p.	
Partea a II-a (45 p.)	15 p.	10 p.	20 p.	-	-	-	

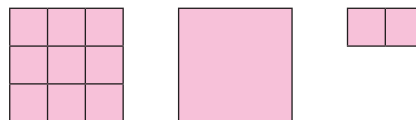
Se acordă 10 puncte din oficiu. Pentru a afla nota finală, rezultatul obținut se împarte la 10.

Partea I La următoarele exerciții scrieți numai rezultatele.

1 Găsiți corespondențele potrivite dintre numerele scrise în coloana A cu categoria din care fac parte acestea, din coloana B.

A	B
(1) 1730	(a) număr prim
(2) 1	(b) număr compus
(3) 0	(c) număr nici prim, nici compus
(4) 23	
(5) 171	

2 Cele trei desene împreună reprezintă fracția ordinară



3 Scrieți numărul $\frac{7}{4}$ ca fracție zecimală.

4 Alegeți varianta corectă. O lungime se poate măsura în:

A. m

B. m^2

C. m^3

5 Calculați: $0,00003 \text{ hm} + 0,5 \text{ cm} - 2,7 \text{ mm}$.

Partea a II-a La următoarele exerciții scrieți rezolvările complete.

1 Calculați: $(0,3^3 + 0,001^2 + 0,2^4) \cdot 10^6$.

2 Comparați: $a = 4^{25} \cdot (2^{30})^5$ cu $b = 6^{80}$.

3 Trei copii au împreună 72 lei. Aflați câți lei are fiecare copil știind că primul are cât ceilalți doi împreună, iar al doilea cu 11 lei mai mult decât al treilea.

4 Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt exprimate prin numere naturale multipli consecutivi ai lui 4, iar suma tuturor muchiilor sale este egală cu 192 cm. Aflați volumul paralelipipedului dreptunghic.

Punctaj acordat:						
	1	2	3	4	5	Total
Partea I (45 p.)	10 p.	10 p.	10 p.	5 p.	10 p.	
Partea a II-a (45 p.)	10 p.	15 p.	10 p.	10 p.	-	
Se acordă 10 puncte din oficiu. Pentru a afla nota finală, rezultatul obținut se împarte la 10.						

ANEXA

Tabel cu numerele prime până la 1 000

2	61	149	239	347	443	563	659	773	883
3	67	151	241	349	449	569	661	787	887
5	71	157	251	353	457	571	673	797	907
7	73	163	257	359	461	577	677	809	911
11	79	167	263	367	463	587	683	811	919
13	83	173	269	373	467	593	691	821	929
17	89	179	271	379	479	599	701	823	937
19	97	181	277	383	487	601	709	827	941
23	101	191	281	389	491	607	719	829	947
29	103	193	283	397	499	613	727	839	953
31	107	197	293	401	503	617	733	853	967
37	109	199	307	409	509	619	739	857	971
41	113	211	311	419	521	631	743	859	977
43	127	223	313	421	523	641	751	863	983
47	131	227	317	431	541	643	757	877	991
53	137	229	331	433	547	647	761	881	997
59	139	233	337	439	557	653	769		

Tabel cu numerele pătrate perfecte până la 1 000

$0 = 0^2$	$16 = 4^2$	$64 = 8^2$	$144 = 12^2$	$256 = 16^2$	$400 = 20^2$	$576 = 24^2$	$784 = 28^2$
$1 = 1^2$	$25 = 5^2$	$81 = 9^2$	$169 = 13^2$	$289 = 17^2$	$441 = 21^2$	$625 = 25^2$	$841 = 29^2$
$4 = 2^2$	$36 = 6^2$	$100 = 10^2$	$196 = 14^2$	$324 = 18^2$	$484 = 22^2$	$676 = 26^2$	$900 = 30^2$
$9 = 3^2$	$49 = 7^2$	$121 = 11^2$	$225 = 15^2$	$361 = 19^2$	$529 = 23^2$	$729 = 27^2$	$961 = 31^2$

Unități de măsură uzuale

Unitatea de măsură principală pentru **lungime** este metrul (**m**)

Unitatea de măsură principală pentru **arie** este metrul pătrat (**m²**)

Unitatea de măsură principală pentru **volum** este metrul cub (**m³**) sau litrul (**l**)

Unitatea de măsură principală pentru **masă** este kilogramul (**kg**)

Unitățile de măsură pentru lungime: km; hm; dam; m; dm; cm; mm

Unitățile de măsură pentru arie: km²; hm²; dam²; m²; dm²; cm²; mm²

Unitățile de măsură pentru volum: km³; hm³; dam³; m³; dm³; cm³; mm³

Unitățile de măsură pentru capacitate (volumul lichidelor): kl; hl; dal; l; dl; cl; ml

Unitățile de măsură pentru masă: v; t; q; *; kg; hg; dag; g; dg; cg; mg

1 v (vagon) = 10 t (tone)	1 l (litru) = 1 dm ³
1 t (tonă) = 1000 kg	1 a (ar) = 1 dam ²
1 q (chintal) = 100 kg	1 ha (hectar) = 1 hm ²

Arii, perimetre și volume

Aria pătratului = $l \cdot l = l^2$ Volumul paralelipipedului dreptunghic = $l \cdot L \cdot h$

Aria dreptunghiului = $l \cdot L$ Volumul cubului = $l \cdot l \cdot l = l^3$

Reguli de calcul cu puteri

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ factori}}$$

$$A^0 = 1$$

$$A^n \cdot A^p = A^{n+p}$$

$$A^n : A^p = A^{n-p} \quad (A \neq 0)$$

$$(A^n)^p = A^{n \cdot p}$$

$$(A \cdot B)^n = A^n \cdot B^n$$

$$(A : B)^n = A^n : B^n \quad (B \neq 0)$$

$$0^0 = \text{nu are sens}$$

Termeni matematici utilizați în manual

\mathbb{N} = mulțimea numerelor naturale = {0; 1; 2;.....}

cifre = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}

sistem zecimal (bază de numerație 10) = sistem de scriere a numerelor folosind cele 10 cifre

nenul = care nu este egal cu zero

nul = egal cu zero

are sens = are valoarea definită = există

diferit = nu este egal (\neq)

număr par = număr cu soț (ex.: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12,...) = $2k$

număr impar = număr fără soț (ex.: 1, 3, 5, 7, 9, 11,...) = $2k + 1$

\overline{xy} = un număr natural de două cifre

răsturnatul numărului \overline{xyz} este numărul \overline{zyx}

la pătrat = la puterea a doua

la cub = la puterea a treia

divizibilitate = împărțire exactă (fără rest)

divide = împarte exact ($A|B$ se citește „A divide B” $\Rightarrow B : A = C$)

se divide = se împarte exact ($A : B$ se citește „A se divide cu B” $\Rightarrow A : B = E$)

divizorii unui număr = numerele cu care se împarte exact un anumit număr

multiplii unui număr = numerele obținute prin înmulțirea aceluși număr cu 0, 1, 2,

număr prim = număr care are fix doi divizori (pe 1 și pe el însuși)

număr compus = număr care are trei sau mai mulți divizori

numere prime între ele = nr. care au un singur divizor comun, adică numere al căror c.m.m.d.c. este 1

fracție ordinară = număr scris cu linie de fracție (ex.: $\frac{7}{2}$)

raportul numerelor A și B ($B \neq 0$) este $\frac{A}{B}$

fracție zecimală = număr scris cu virgulă (ex.: 51,8)

fracție subunitară = fracție mai mică decât 1 (ex.: $\frac{7}{9}$)

fracție supraunitară = fracție mai mare decât 1 (ex.: $\frac{5}{2}$)

fracție echiunitară = fracție egală cu 1 (ex.: $\frac{7}{7}$)

fracții echivalente = două fracții egale între ele (ex.: $\frac{7}{2} = \frac{21}{6}$)

fracție ireductibilă = fracție care nu se poate simplifica

congruent = egal la geometrie; despre figuri geometrice, segmente, unghiuri diferite care prin suprapunere coincid; notat \equiv

puncte confundate = puncte care coincid, puncte identice, unul și același punct

drepte paralele = drepte situate în același plan care nu se intersectează

drepte concurente = drepte care se intersectează

drepte perpendiculare = drepte concurente care formează unghi drept

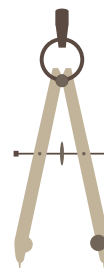
rectangular = ortogonal = perpendicular

perimetrul unei figuri geometrice = suma tuturor laturilor figurii

poligon = linie frântă închisă

figuri echivalente = figuri cu ariile egale

corpuri echivalente = corpuri cu volumele egale





ISBN 978-606-706-631-9



9 786067 066319